25考研 | 题型通法01笔记

第一章 函数、极限、连续（1）

高数辅导讲义
①基础题：6月底一刷完
②《70题经典题》
③预习"每节课的课后"
④先做题，再上课

课后：①复习总结上节课
②预习下节课
不会圈出来.
③做"基础必练题"
（选）挑着做"高数辅导讲义" 09-14 十道题

题型考点 函数的特性

1.单调性

（1）若 $f'(x)\geq 0$（仅在孤点处取等号），则 $f(x)$ 单调递增；若 $f'(x)\leq 0$（仅在孤点处取等号），则 $f(x)$ 单调递减. 若 $f(x)$ 可导且↑，则 $f'(x)\geq 0$，例 $f(x)=x^3$，$f'(x)=3x^2\geq 0$

（2）若 $f''(x)\geq 0$（仅在孤点处取等号），则 $f'(x)$ 单调递增；若 $f''(x)\leq 0$（仅在孤点处取等号），则 $f'(x)$ 单调递减. 不考，了解证明.

2.有界性

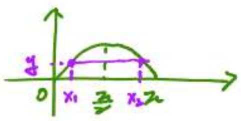
（1）定义：存在 $M>0$，使得 $|f(x)|\leq M$． $m\leq f(x)\leq M$

（2）闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数：一定有界

（3）开区间 (a,b) 内的连续函数：若 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=B$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界（充分条件），有界但不一定极限存在. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$，$x\in(0,1)$

（4）反三角函数：一定有界

① $y=\sin x$，$x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \Rightarrow x=\arcsin y$



$\sin x_1=y$，$\therefore x_1=\arcsin y$

$\sin x_2=y$ $\therefore x_2=\pi-x_1=\pi-\arcsin y$

② $y=\cos x$，$x\in[0,\pi] \Rightarrow x=\arccos y$

③ $y=\tan x$，$x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \Rightarrow x=\arctan y$

3.奇偶性

（1）定义：若 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 为偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$ 为奇函数. ① $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为奇函数. ② $f(x)=e^{-x}+e^{x}$ 为偶函数.

（2）结论：

①奇+奇=奇，偶+偶=偶；奇×奇=偶，奇×偶=奇，偶×偶=偶；偶(奇)=偶，偶(偶)=偶，奇(奇)=奇.

奇(偶)=偶
f(偶)=偶，例 $f(x)=e^{\cos x}$

②奇函数在 $x=0$ 处的泰勒展开只有奇数幂，偶函数在 $x=0$ 处的泰勒展开只有偶数幂.

$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$

$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$

$\sec x = 1 + ax + bx^2 + o(x^2)$，则 $a=0$，$b=\frac{1}{2}$.

$f(x) = \sec x$ $\quad f(0) = 1$

$f'(x) = \sec x \tan x$ $\quad f'(0) = 0$

$f''(x) = \sec x \tan^2 x + \sec^3 x$ $\quad f''(0) = 1$

$\therefore f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + o(x^2)$

4.周期性

（1） $f(x+T)=f(x)$

（2） 若 $f(x)$ 以 T 为周期，则 $f(ax+b)$ 以 $\frac{T}{|a|}$ 为周期

即 $\sec x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

5.导函数与原函数的函数特性：$F'(x)=f(x)$

(1) 若$F(x)$为偶函数$+C$，则$f(x)$为奇函数，反之也成立

(2) 若$F(x)$为奇函数$+C$，则$f(x)$ 为偶函数，反之不成立. 除非，$F(0)=0$.

(3) 若$F(x)$为周期函数，则$f(x)$为周期函数，反之不成立. 例：$f(x)=1+\cos x$

$F(x)=x+\sin x+C$

(4) 若$F(x)$为单调函数，则$f(x)$不一定单调，只要不变号.

【试题 1】(14-1.10;2.10) 设$f(x)$是周期为4的可导奇函数,且$f'(x)=2(x-1)$，$x\in[0,2]$，则$f(7)=$_______.

$f(0)=0$.　$f(x)=x^2-2x+C$

$\therefore C=0$

$\therefore f(x)=x^2-2x, x\in[0,2]$

【难度】 本题的数学一难度值为0.646，数学二难度值为0.587，数学三的考生也应掌握此题.

$f(7)=f(3)=f(-1)=-f(1)$

【解析】

由$f'(x)=2(x-1)$可知$f(x)=x^2-2x+C$. 由于$f(x)$是可导的奇函数，因而有$f(0)=0$，于是$C=0$，故

$$f(x)=x^2-2x.$$

又因为$f(x)$的周期为4，故有$f(7)=f(-1)=-f(1)=-(1^2-2)=1$.

【试题 2】(14-3.3) 设$p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$.当$x\to0$时，若$p(x)-\tan x$是比x^3高阶的无穷小量，则下列选项中错误的是

$\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$

(A) $a=0$ ✓　　(B) $b=1$ ✓　　(C) $c=0$ ✓　　(D) $d=\dfrac{1}{6}$

【难度】 本题的数学三难度值为0.738，数学一、数学二的考生也应掌握此题.

【解析】

方法1：

因为当$x\to0$时，$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$，所以

$$p(x)-\tan x=a+(b-1)x+cx^2+(d-\frac{1}{3})x^3+o(x^3).$$

又因为$p(x)-\tan x$是比x^3高阶的无穷小，所以$a=0,b=1,c=0,d=\dfrac{1}{3}$，故应选（D）.

方法2：

由题可知，当$x\to0$时，$p(x)-\tan x=o(x^3)$，即

$$\tan x=p(x)+o(x^3).$$

因为$\tan x$为奇函数，所以$p(x)+o(x^3)$的偶数幂的系数均为0，从而$a=0,c=0$.

①同阶 非高阶无穷小相减

又当$x\to 0$时，$\tan x\sim x$，若$b\neq 1$，则$\boxed{\tan x-bx\text{ 为 1 阶无穷小}}$，这是因为：阶不变.

②高阶无穷小相减，低阶.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-bx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}-b=1-b\neq 0.$$

所以，$b=1$，从而排除（A），（B），（C），应选（D）.

$F(-x)=\int_0^{-x^3}f(t)dt\overset{t=-u}{=\!=}-\int_0^{x^3}f(-u)\,du=-\int_0^{x^3}f(u)\,du$

【补例】设$f(x)=\int_0^{\cos^3 x}e^{\sin t}dt$，$F(x)=\int_0^{x^3}f(t)dt$，则$f(x)$和$F(x)$的奇偶性分别 $=-F(x)$

为： 方法1: $=\begin{cases}\int_0^u e^{\sin t}dt\\ u=\cos^3 x \quad 偶\end{cases}$ $=\begin{cases}\int_0^v f(t)dt \quad 奇\\ v=x^3 \quad 奇\end{cases}$ 偶 } 奇 $\therefore F(x)$为奇.

A. $f(x)$为奇函数，$F(x)$为偶函数. B. $f(x)$为偶函数，$F(x)$为奇函数.

C. $f(x)$和$F(x)$均为偶函数. D $f(x)$和$F(x)$均为非奇非偶函数.

方法2: $f(-x)=\int_0^{\cos^3(-x)}e^{\sin t}dt=\int_0^{\cos^3 x}e^{\sin t}dt=f(x)$，为偶.

题型考点 极限的概念与性质

1.极限的概念

（1）$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，$|a_n-a|<\varepsilon$，则称$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a}\Leftrightarrow n\to\infty$时，

极限
$a_n=a+\alpha$（α为无穷小）. 极限与无穷小的关系

（2）$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称$\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A}$

$\Leftrightarrow x\to x_0$时，$f(x)=A+\alpha$. 近似表达式.
$x\neq x_0$

2.极限的性质

（1）唯一性

（2）局部保号性

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$，则$x\to x_0$时，$f(x)=A+\alpha>\dfrac{A}{2}>0$.

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A<0$，则$x\to x_0$时，$f(x)=A+\alpha<\dfrac{A}{2}<0$.

$-1 < -\frac{1}{2}$

（3）局部有界性

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则$x\to x_0$时，$f(x)=A+\alpha$，故$A-1<f(x)<A+1$，即$f(x)$局部有界.

【试题 3-1】（14-3.1） 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq 0$，则当$n$充分大时，下列正确的有

$a+\alpha$ $\alpha>-\frac{1}{n}$ $a+\alpha$ $\alpha<\frac{1}{n}$

(A) $|a_n| > \frac{|a|}{2}$　　(B) $|a_n| < \frac{|a|}{2}$　　(C) $a_n > \cancel{a} - \frac{1}{n}$ $-\frac{2}{n}$　　(D) $a_n < \cancel{a} + \frac{1}{n}$

【难度】　本题的数学三难度值为 0.530，数学一、数学二的考生也应掌握此题.

分析：$\because \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$　$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$ （反之不成立）

$\therefore n\to\infty,\ |a_n| = |a| + \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\alpha} > \frac{|a|}{2}$

C.D: $\because \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ $\therefore n\to\infty,\ a_n = a+\alpha$ 不确定

C D: $a-\frac{1}{n} < a_n < a+\frac{1}{n}$　　例 D: $a_n = a+\frac{2}{n}$

　　　　　　　　　　　　　　　C: $a_n = a-\frac{2}{n}$

$\therefore a-\frac{1}{n} < a+\alpha < a+\frac{1}{n}$

$\therefore -\frac{1}{n} < \alpha < \frac{1}{n}$ ✗　　改: $a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$ ✓

不确定.　　　　　　$-\varepsilon < \alpha < \varepsilon$

【试题 3-2】 设有下列命题

$\Leftrightarrow n\to\infty,\ x_n = a+\alpha$　　$n+l\to\infty,\ m\to\infty$; $n\to\infty,\ x_{n+l} = a+\alpha$

✓① $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+l} = a$，其中 l 为某个确定的正整数.

✓② $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$.

✗③ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

✓④ $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + \sin x_n) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.　　$f(x) = x+\sin x$ 过 $(0,0)$.

$f(x) = x+\sin x$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，$f(x)$ 为单调函数．　$f'(x) = 1+\cos x > 0$

✗⑤ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$.　$\Rightarrow x_n = (\frac{1}{2})^n$，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{(\frac{1}{2})^n} = \frac{1}{2} \neq 1$

$\Leftarrow x_n = n$

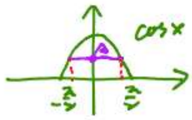
✗⑥当 $-\dfrac{\pi}{2} \le x_n \le \dfrac{\pi}{2}$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

$\Downarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} \cos x_n$ 存在

$\parallel$

A



则以上命题中正确的个数是

(A) 2.　　　(B) 3. ✓　　　(C) 4.　　　(D) 5.

结论: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，且 $f(x)$ 在 $x=A$ 处连续，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(A)$

若 $f(x)$ 为连续单调函数，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 也存在.

记 $y=f(x)$，$x=f^{-1}(y)$，$y_n = f(x_n)$，$x_n = f^{-1}(y_n)$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = f^{-1}(y_n)$ 存在.

【试题 4】 (10-3.4)　设 $f(x) = \ln^{10} x, g(x) = x, h(x) = e^{\frac{x}{10}}$，则当 x 充分大时有

(A) $g(x) < h(x) < f(x)$.　　指 >> 幂 >> 对　　(B) $h(x) < g(x) < f(x)$.

(C) ✓ $f(x) < g(x) < h(x)$.　　　　(D) $g(x) < f(x) < h(x)$.

【难度】 本题的数学三难度值为 0.564，数学一、数学二的考生也应掌握此题.

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x \xlongequal{\frac{1}{x}=t} \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{-\ln t}{t} = 0$

题型考点　无穷小的比较

1.高阶无穷小

【试题 5】 (13-3.1)　当 $x \to 0$ 时，用“$o(x)$”表示比 x 高阶的无穷小量，则下列

式子中错误的是

(A) $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$ ✓

$x^{1.5}\cdot x^{2.5}$ $x^{3.5}$

(B) $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$ ✓

(C) $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$ ✓

$x^{1.5}$ $x^{2.5}$

(D) $o(x)+o(x^2)=o(x^2)$

$x^{1.5}$

$=o(x)$ ✓

【难度】 本题的数学三难度值为 0.518，数学一、数学二的考生也应掌握此题.

2.无穷小的阶

若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^k}=c\neq 0$，则 $f(x)$ 为 $x\to 0$ 时的 k 阶无穷小.

3.等价无穷小

常见等价无穷小（$x\to 0$ 时）：

$a^x-1\sim x\ln a$

①$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，

$\ln(x+\sqrt{1+x^2})\sim x$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$；

(3阶)

②$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$1-\cos^k x\sim\dfrac{k}{2}x^2$，$x-\ln(1+x)\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$e^x-1-x\sim\dfrac{1}{2}x^2$；

③$x-\sin x\sim\dfrac{1}{6}x^3$，$x-\arcsin x\sim-\dfrac{1}{6}x^3$，$x-\tan x\sim-\dfrac{1}{3}x^3$，$x-\arctan x\sim\dfrac{1}{3}x^3$.

$\sin x<x<\tan x$，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$

4.结论

（1）等价定理

①等价原则：用于乘除法，加减用泰勒.

②充要条件：若 $\alpha\sim\beta$，则 $\alpha=\beta+o(\beta)$ 或 $\beta=\alpha+o(\alpha)$

【注】低阶无穷小+高阶无穷小等价于低阶无穷小，例如：$x\to 0$ 时，

$$\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}-1=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}+\frac{x}{\sin x}-1$$
$$=\frac{x-\sin x}{x\sin x}+\frac{x-\sin x}{\sin x}$$
$$\sim\frac{x-\sin x}{x\sin x}\sim\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^2}=\frac{1}{6}x.$$

1阶　2阶

抓大头.

低阶是大头

例：$x\to 0$ 时. $\sin x=x+o(x)\sim x$

$\sin x-x=-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\sim-\frac{1}{6}x^3$

（2）含变限积分的等价

①若 $f(x)$、$g(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，则当 $x\to 0$ 时，

$\int_0^x f(t)dt\sim\int_0^x g(t)dt$.

②若 $x\to 0$ 时，$f(x)\sim k_1x^m$，$\varphi(x)\sim k_2x^n$，则

$$\int_0^{\varphi(x)} f(t)dt \sim \int_0^{k_2x^n} k_1 t^m dt = \frac{k_1}{m+1} t^{m+1}\Big|_0^{k_2x^n} = \frac{k_1k_2^{m+1}}{m+1}x^{n(m+1)},$$

即 $\int_0^{\varphi(x)} f(t)dt$ 为 $x\to 0$ 时的 $\overset{上(下+1)}{n(m+1)}$ 阶无穷小.

③ 求导定阶：若 $f(x)$ 为 n 阶无穷小，则 $f'(x)$ 为 $n-1$ 阶无穷小 .$(n\geq 2)$

【试题 6】（09-1.1;2.2;3.2） 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\overset{\sim -bx^3}{\ln(1-bx)}$ 是等价无穷小量，则

(A) $a=1, b=-\frac{1}{6}$.　　(B) $a=1, b=\frac{1}{6}$.

(C) $a=-1, b=-\frac{1}{6}$.　　(D) $a=-1, b=\frac{1}{6}$.

法1：若 $a\neq 1$，则 $f(x)$ 为1阶无穷小

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x}=1-a\neq 0$

$\therefore a=1$ $\therefore f(x)\sim\frac{1}{6}x^3$

$\therefore b=-\frac{1}{6}$

【难度】 本题的数学一难度值为 0.697，数学二难度值为 0.817，数学三难度值为 0.729.

法2：$f(x)=x-[(ax)-\frac{1}{6}(ax)^3+o(x^3)]$

$=(1-a)x+\frac{a^3}{6}x^3+o(x^3)\sim -bx^3$

$\therefore a=1$ ，$b=-\frac{a^3}{6}=-\frac{1}{6}$.

【试题 7】（13-2.1） 设 $\cos x-1=x\cdot\sin\alpha(x)$，其中 $|\alpha(x)|<\frac{\pi}{2}$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是

法1：$-\frac{1}{2}x^2 \sim x\cdot\alpha(x)$　$\therefore \alpha(x)\sim -\frac{1}{2}x$

(A) 比 x 高阶的无穷小量　　(B) 比 x 低阶的无穷小量

(C) 与 x 同阶但不等价的无穷小量　　(D) 与 x 等价的无穷小量

【难度】 本题的数学二难度值为 0.884，，数学一、数学三的考生也应掌握此题.

法2：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin\alpha(x)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}\neq 1$

$\therefore C$.

$\square\to 0$ 且 $\square\neq 0$.

$\sin\square\sim\square$

$\therefore\square\sim\sin\square$

【试题 8】（14-2.1） 当 $x\to 0^+$ 时，若 $\ln^\alpha(1+2x)$，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小量，则 α 的取值范围是

$\sim(2x)^\alpha$ $\therefore\alpha>1$

$\sim(\frac{1}{2}x^2)^{\frac{1}{\alpha}}$ $\therefore\frac{2}{\alpha}>1$ $\therefore\alpha<2$

(A) $(2,+\infty)$.　(B) $(1,2)$.　(C) $\left(\frac{1}{2},1\right)$.　(D) $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

【难度】 本题的数学二难度值为 0.780，数学一、数学三的考生也应掌握此题.

【试题 9】（20-1.1；2.1） 当 $x\to 0^+$ 时，下列无穷小量中最高阶的是

(A) $\int_0^x (e^{t^2}-1)dt$.

(B) $\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})dt$.

(C) $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$.

(D) $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin t^3}\, dt$.

方法1：上(下+1)　A: $1\cdot(2+1)=3$　B: $1\cdot(\frac{3}{2}+1)=\frac{5}{2}$

C: $1\cdot(2+1)=3$　D: $2\cdot(\frac{3}{2}+1)=5$

方法2：等价　$A\sim\int_0^x t^2\,dt=\frac{1}{3}t^3\Big|_0^x=\frac{1}{3}x^3$

$B\sim\int_0^x t^{\frac{3}{2}}\,dt=\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\Big|_0^x=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$

$C\sim\int_0^x t^2\,dt=\frac{1}{3}x^3$

$D\sim\int_0^{\frac{1}{2}x^2} t^{\frac{3}{2}}\,dt=\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{2}x^2}=\frac{2}{5}\cdot(\frac{1}{2})^{\frac{5}{2}}\cdot x^5$

方法3，求导：$(A)'=e^{x^2}-1\sim x^2$

$(B)'=\ln(1+\sqrt{x^3})\sim x^{\frac{3}{2}}$

$(C)'=\sin(\sin x)^2\cdot\cos x\sim x^2\cdot 1$

$(D)'=\sqrt{\sin(1-\cos x)^3}\cdot\sin x\sim(\frac{1}{2}x^2)^{\frac{3}{2}}\cdot x=\frac{1}{2\sqrt{2}}x^4$.

题型考点　函数求极限

1.分析：极限类型、化简方法

2.化简：

⑤ (1) 根式有理化　$\frac{\sqrt{\ }-\sqrt{\ }}{(\ )}=\frac{\sqrt{\ }^2-\sqrt{\ }^2}{(\ )(\sqrt{\ }+\sqrt{\ })}\to$ 非0因子.

③ (2) 提公因子　$e^{\square}-e^{\triangle}=e^{\triangle}(e^{\square-\triangle}-1)\sim e^{\triangle}(\square-\triangle)$

$x\to0$，$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim x\cdot\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}x^3$

① (3) 计算非零因子

乘除法

④ (4) 等价替换　用于乘除法.

② (5) 拆分极限存在的项

只需一个存在.

① 分子是分母的同阶、高阶无穷小，极限存在.

② 减等价无穷小不行，$x\to0$时 $\sin x\sim x$，$\sin x-x\sim-\frac{1}{6}x^3$

⑥ (6) 幂指函数指数化　$A(x)^{B(x)}=e^{B(x)\ln A(x)}$

⑦ (7) 变量替换（倒代换）　$x\to\infty$，$\frac{1}{x}=t\to0$，$x\to x_0$，$x-x_0=t\to0$

3.计算：

(1) 洛必达法则

(2) 泰勒公式

【试题 10】（09-3.9） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$______.

$\sim\frac{1}{3}x^2$

【难度】 本题的数学三难度值为 0.556，数学一、数学二的考生也应掌握此题.

(1) 根式有理化

$= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\cos x}\left(e^{1-\cos x}-1\right)}{\frac{1}{3}x^2}$

(2) 提公因子

$= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e(1-\cos x)}{\frac{1}{3}x^2}$

(3) 计算非零因子

$= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e\cdot\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2}=\frac{3}{2}e.$

(4) 等价替换

(5) 拆分极限存在的项

(6) 幂指函数指数化

(7) 变量替换（倒代换）

【试题 11】（09-2.15） 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$.

【难度】 本题的数学二难度值为 0.756，数学一、数学三的考生也应掌握此题.

(1) 根式有理化

法1：原式 $= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{x^4}$

(2) 提公因子

$= \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2}$

(3) 计算非零因子

$= \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\tan x}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\ln(1+\tan x)}{x^2}\right)$

(4) 等价替换

$= \frac{1}{2}\left(0+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}\tan^2 x}{x^2}\right)$

(5) 拆分极限存在的项

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$

(6) 幂指函数指数化

(7) 变量替换（倒代换）

法2：原式 $= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2\left[x-\left(\tan x-\frac{1}{2}\tan^2 x+o(x^2)\right)\right]}{x^4}$

$= \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\tan x}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}\tan^2 x}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{o(x^2)}{x^2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}+0\right)=\frac{1}{4}$

改：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)\left[x^2-\ln(1+\tan^2 x)\right]}{\sin^6 x} \neq \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2\cdot\left[x^2-\ln(1+x^2)\right]}{x^6}=\frac{1}{4}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2\cdot\left[\tan^2 x-\ln(1+\tan^2 x)\right]}{\ }$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2\left[x^2 - \ln(1+\tan^2 x)\right]}{x^6}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \tan^2 x}{x^4} + \lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x - \ln(1+\tan^2 x)}{x^4}\right]$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\quad}{x^6} = 4$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2(x^2 - \tan^2 x)}{x^6} = -\frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 0}\frac{(x-\tan x)(x+\tan x)}{x^4} + \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\tan^4 x}{x^4}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}x^3}{x^3}\cdot\left(1+\frac{\tan x}{x}\right) + \frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right] = -\frac{1}{6}.$$

【试题 12】 (10-1.1) 极限 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x =$ 1^∞

(A) 1.　　(B) e.　　(C) e^{a-b}.　　(D) e^{b-a}.

【难度】 本题的数学一难度值为 0.643，数学二、数学三的考生也应掌握此题.

(1) 根式有理化

(2) 提公因子

(3) 计算非零因子

(4) 等价替换

(5) 拆分极限存在的项

(6) 幂指函数指数化

(7) 变量替换（倒代换）

法1：原式 $= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\right)^x$

$= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\cdot x}$

$= e^{a-b}$

① $(1+\square)^\Delta = e^{\square\cdot\Delta}$

② $(1+\square)^\Delta = (1+\square)^{\frac{1}{\square}\cdot\square\cdot\Delta} = e^{\square\cdot\Delta}$

法2：原式 $= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-a}\right)^x\cdot\left(\frac{x}{x+b}\right)^x$

$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x-a}\right)^x\cdot\left(1+\frac{-b}{x+b}\right)^x$

$= e^a\cdot e^{-b} = e^{a-b}$

法3：取 $a=0$. 则 原式 $= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+b}\right)^x = e^{-b}$

排除 A、B、D ∴ C.

例：$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x^2}}}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0}\frac{\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}$ ✗ $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}} = 1$

$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{\sin x}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = e$ ✓

幂指函数运算法则：

若 $\lim_{x\to x_0}A(x) = A$，$\lim_{x\to x_0}B(x) = B$，且 A、B 不全为 0

则 $\lim_{x\to x_0}A(x)^{B(x)} = A^B$

例：$(1+\square)^\Delta = \underbrace{(1+\square)^{\frac{1}{\square}}}_{B(x)}{}^{\overbrace{\square\cdot\Delta}^{=A(x)}} = e^{\square\cdot\Delta} = e^{A}.$