

25考研 | 题型通法02笔记



第一章 函数、极限、连续 (2)

题型考点 函数求极限

1.分析：极限类型、化简方法

2.化简：

⑥ (1) 根式有理化

③ (2) 提公因子

① (3) 计算非零因子

乘除法

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x \cos x}{x^3} \quad \text{错}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

④ (4) 等价替换

乘除法

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}(2x)^3}{2x^3} = \frac{2}{3} \checkmark$$

② (5) 拆分极限存在的项

加减法

⑤ (6) 幂指函数指数化

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

$$1^\infty, \infty^0, 0^0$$

⑦ (7) 变量替换 (倒代换)

3.计算：

(1) 洛必达法则

(2) 泰勒公式

【试题 13】 (10-3.15) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}} \cdot 0^0$

$$\star \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1$$

【难度】 本题的数学三难度值为 0.370，数学一、数学二的考生也应掌握此题。

(1) 根式有理化

$$\text{解: } f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(e^{\frac{1}{x}} - 1)}{\ln x}} \quad \frac{1}{x} = t \quad = e^{\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^{-t} - 1)}{-\ln t}}$$

(2) 提公因子

$$\text{法} = e^{\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-e^{-t} \ln(e^{-t} - 1)}{(e^{-t} - 1)} \cdot \frac{1}{-t}}$$

✓ (3) 计算非零因子

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{\frac{1}{x}} - 1)}{\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}}{(e^{\frac{1}{x}} - 1)} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}}}$$

✓ (4) 等价替换

$$= e^{\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-(\ln t + 1)}{-\ln t} \cdot (-t)} = e^{\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-(1 + \ln t)}{\ln t}} = e^{-1}$$

(5) 拆分极限存在的项

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}}{\frac{\ln x}{x^2}}}$$

✓ (6) 幂指函数指数化

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{\ln x}} = e^1$$

(7) 变量替换 (倒代换)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)}}{e^{\frac{1}{x}}} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x} \cdot x}}{e^{\frac{1}{x}}} = 1$$
$$= e^{-\frac{1}{2}} \checkmark$$



【试题 14】 (11-2.9)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+2^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【难度】 本题的数学二难度值为 0.492, 数学一、数学三的考生也应掌握此题.

(1) 根式有理化

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2^x - 1}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$$

(2) 提公因子

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{2x}}$$

(3) 计算非零因子

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln 2}{2x}}$$

(4) 等价替换

$$= e^{\frac{1}{2} \ln 2} \quad \checkmark$$

(5) 拆分极限存在的项

$$= \sqrt{2} \quad \checkmark$$

(6) 幂指函数指数化

(7) 变量替换 (倒代换)

【试题 15】 (11-3.15)

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x \ln(1+x)} \quad \frac{(\sqrt{-}-\sqrt{-})(\sqrt{+}\sqrt{+})}{\sqrt{+}\sqrt{+} \rightarrow \text{非0/0}} = \frac{\sqrt{-}-\sqrt{-}}{\sqrt{+}\sqrt{+}} \text{ 洛} \text{ 必.}$$

【难度】 本题的数学三难度值为 0.665, 数学一、数学二的考生也应掌握此题.

(1) 根式有理化

$$\text{解: 洛} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x - x^2 - 2x}{x^2 [\sqrt{1+2\sin x} + (x+1)]}$$

(2) 提公因子

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x - x^2 - 2x}{2x^2}$$

(3) 计算非零因子

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} - \frac{1}{2}$$

(4) 等价替换

$$= 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

(5) 拆分极限存在的项

(6) 幂指函数指数化

(7) 变量替换 (倒代换)

【试题 16】 (11-1.15)

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{1}{e^x - 1}}. \quad 1^\infty$$

【难度】 本题的数学一难度值为 0.629, 数学二、数学三的考生也应掌握此题.

(1) 根式有理化

$$\text{解: 洛} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{e^x - 1} \ln \left(1 + \frac{\ln(1+x) - x}{x} \right)}$$

(2) 提公因子

(3) 计算非零因子

(4) 等价替换

(5) 拆分极限存在的项

(6) 幂指函数指数化

(7) 变量替换 (倒代换)

$$\begin{aligned} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}} \\ &= e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\ln(1+x) - x}{x} \right)^{\frac{1}{e^x - 1}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x(e^x - 1)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$\Delta \rightarrow 0, \Delta \rightarrow 0$

$$\text{① } \lim_{x \rightarrow x_0} (1+\Delta)^{\Delta} = \lim_{x \rightarrow x_0} (1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta} \cdot \Delta \cdot \Delta} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} \Delta \cdot \Delta}$$

$$\text{② } \lim_{x \rightarrow x_0} (1+\Delta)^{\Delta} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\Delta \ln(1+\Delta)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} \Delta \ln(1+\Delta)} = e^{\Delta \cdot \Delta}$$

$$\begin{aligned} \text{例: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x^2}}}{e^{\frac{1}{x}}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2} \ln(1+x)}}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\frac{1}{x^2} \ln(1+x) - \frac{1}{x}}{1}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

【试题 17】 (11-3.9) 设 $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$, 则 $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【难度】 本题的数学三难度值为 0.624, 数学一、数学二的考生也应掌握此题.

(1) 根式有理化

$$f(x) = x e^{\lim_{t \rightarrow 0} 3t \cdot \frac{x}{t}} = x e^{3x}$$

(2) 提公因子

$$\therefore f'(x) = e^{3x} (1+3x)$$

(3) 计算非零因子

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{3x} (3+9x+3) \\ &= e^{3x} (9x+6) \end{aligned}$$

(4) 等价替换

(5) 拆分极限存在的项

(6) 幂指函数指数化

(7) 变量替换 (倒代换)

【试题 18】 (12-3.9)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

【难度】 本题的数学三难度值为 0.521, 数学一、数学二的考生也应掌握此题.

(1) 根式有理化

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (1 + \tan x - 1)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}}$$

(2) 提公因子

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos x - \sin x}}$$

(3) 计算非零因子

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x - \sin x) \cos x}}$$

(4) 等价替换

$$= e$$

(5) 拆分极限存在的项 $= e^{-\sqrt{2}}$

(6) 幂指函数指数化

(7) 变量替换 (倒代换)

【试题 19】 (12-3.15)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4}$

【难度】 本题的数学三难度值为 0.603, 数学一、数学二的考生也应掌握此题.

(1) 根式有理化

✓ (2) 提公因子

✓ (3) 计算非零因子

✓ (4) 等价替换

(5) 拆分极限存在的项

(6) 幂指函数指数化

(7) 变量替换 (倒代换)

解法 1:
$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2-2+2\cos x} [e^{x^2-2+2\cos x} - 1]}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-2+2\cos x}{x^4} \quad \text{① 洛} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-2\sin x}{4x^3} \quad \text{② 泰.} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{2x^3} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$f(b) - f(a) = (b-a)f'(\xi)$
 $\xi \in (a,b)$

解法 2:
$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2-2+2\cos x) e^{\frac{x^2-2+2\cos x}{x^2}}}{x^4}, \text{ 易知 } x^2 \text{ 与 } 2-2\cos x \text{ 同阶} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x^2-2+2(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4))]}{x^4} \cdot 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

其中: $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0, \lim_{x \rightarrow 0} (2-2\cos x) = 0$

由泰勒展开可知: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-2+2\cos x}{x^2} = 0 \therefore \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x^2-2+2\cos x}{x^2}} = 1$

【试题 20】 (13-2.9)

$\lim_{x \rightarrow 0} (2 - \frac{\ln(1+x)}{x})^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【难度】 本题的数学二难度值为 0.576, 数学一、数学三的考生也应掌握此题.

(1) 根式有理化

(2) 提公因子

(3) 计算非零因子

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{x - \ln(1+x)}{x})^{\frac{1}{x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}} \\ &= e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}. \end{aligned}$$

(4) 等价替换



(5) 拆分极限存在的项

(6) 幂指函数指数化

(7) 变量替换 (倒代换)



【试题 21】 (14-2.5)

设函数 $f(x) = \arctan x$. 若 $f(x) = xf'(\xi)$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{x^2} =$

- (A) 1. (B) $\frac{2}{3}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{1}{3}$.

【难度】 本题的数学二难度值为 0.514, 数学一、数学三的考生也应掌握此题.

(1) 根式有理化

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

(2) 提公因子

$$\therefore f(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}$$

(3) 计算非零因子

$$\therefore \arctan x = x \cdot \frac{1}{1+\xi^2}$$

(4) 等价替换

$$\therefore \xi^2 = \frac{x}{\arctan x} - 1$$

(5) 拆分极限存在的项

(6) 幂指函数指数化

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^2 \arctan x}$$

(7) 变量替换 (倒代换)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3} = \frac{1}{2}$$

【试题 22】 (14-1.15;2.15;3.15)

求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$.

【难度】 本题的数学一难度值为 0.570, 数学二难度值为 0.576, 数学三难度值为

0.559.

(1) 根式有理化

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2} \quad e^{\frac{1}{t}} - 1 \sim \frac{1}{t}$$

(2) 提公因子

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x} \right]$$

(3) 计算非零因子

$$\stackrel{\frac{1}{x} \rightarrow 0}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1 - t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2}$$

(4) 等价替换

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}t^2}{t^2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(5) 拆分极限存在的项

(6) 幂指函数指数化

(7) 变量替换 (倒代换)



【试题 23】 (20-2.15 改)

求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - e^{-1}x \right]$.

(1) 根式有理化

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\left(\frac{x}{1+x} \right)^x - e^{-1} \right]$$

✓ (2) 提公因子

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{x \ln \frac{x}{1+x}} - e^{-1} \right)$$

$$e^{\square} - e^{\Delta} = (e^{\square - \Delta} - 1) e^{\Delta} \\ \sim (\square - \Delta) e^{\Delta}$$

✓ (3) 计算非零因子

$$= e^{-1} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\boxed{x \ln \frac{x}{1+x} + 1}} - 1 \right)$$

(4) 等价替换

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x}{1+x}$$

(5) 拆分极限存在的项

$$= e^{-1} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(x \ln \frac{x}{1+x} + 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x \ln \frac{1+x}{x}$$

✓ (6) 幂指函数指数化

$$\frac{1}{x} = t \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-1} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{t} \ln \left(\frac{1}{1+t} \right) + 1}{t}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

(7) 变量替换 (倒代换)

$$= e^{-1} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x \cdot \frac{1}{x} \\ = -1$$

$$= \frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}t^2}{t^2}$$

$$= \frac{1}{2e}.$$

【试题 23】 (20-2.15 改) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - e^{-1}x \right]$.

(1) 根式有理化

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1+x} - e^{-1}x(1+x)^x}{(1+x)^x}$$

(2) 提公因子

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x [e^{x \ln x} - e^{x \ln(1+x) - 1}]}{e^{x \ln(1+x)}}$$

(3) 计算非零因子

(4) 等价替换

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{x \ln(1+x) - 1} [e^{x \ln x - x \ln(1+x) + 1} - 1]}{e^{x \ln(1+x)}}$$

(5) 拆分极限存在的项

(6) 幂指数函数指数化

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{-1} [x \ln x - x \ln(1+x) + 1]$$

(7) 变量替换 (倒代换)

$$= \frac{1}{e} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot [x \ln \frac{x}{1+x} + 1]$$

$$\stackrel{t=1/x}{=} \frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{t} \ln \frac{1}{1+t} + 1}{t}$$

$$= \frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2e}.$$

题型考点 极限反问题

1. 已知极限求极限: 化简已知极限, 然后把要求极限加、减、乘、除、等价凑已知极

限.

通法:

【试题 24】 (00-2 改) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + f(x) \sin x}{x^3} = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

$$\text{解: 通法: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin x + f(x) \sin x}{x^2 \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin x - \sin 6x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \sin x + \sin 6x}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin x - 6x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 6x}{x^3} + 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \cdot (-\frac{1}{2}x^3)}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}(6x)^3}{x^3}$$

$$= -1 + 36 = 35$$

$$\text{ins 2: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + f(x) \sin x}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x - 6x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + f(x) \sin x}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6}(6x)^3}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - 6 \sin x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin x + f(x) \sin x}{x^3}$$

$$= -36 + 6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2}$$

$$= -35 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = 35$$

$$\text{于是: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + f(x) \sin x}{x^3} = 0$$

$$\therefore x \rightarrow 0 \text{ 时, } \frac{\sin 6x + f(x) \sin x}{x^3} = 0 + o(1)$$

$$\text{即 } \sin 6x + f(x) \sin x = o(x^3)$$

$$\therefore f(x) = \frac{-\sin 6x + o(x^3)}{\sin x}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + \frac{-\sin 6x + o(x^3)}{\sin x}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin x - \sin 6x + o(x^3)}{x^2 \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin x - 6x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 6x}{x^3} + 0 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6(-\frac{1}{6}x^3)}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8}(6x)^3}{x^3} \\ &= -1 + 36 = 35 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{1} = 0$$

$\alpha = o(1)$ 代表任意无穷小.

2. 已知极限求参数: 参考函数求极限

【试题 25】 (10-3.1) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - a \right) e^x \right] = 1$, 则 a 等于

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

【难度】 本题的数学三难度值为 0.662, 数学一、数学二的考生也应掌握此题.

【解析】

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - a \right) e^x \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - ax)e^x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{axe^x}{x} \\ &= -1 + a. \end{aligned}$$

由题设知 $a - 1 = 1$, 从而 $a = 2$. 故应选择 (C).

【试题 26】 (11-2.1;3.1) 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是

等价无穷小量. 则

$$\begin{aligned} \text{于是: } &= 3\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) \\ &\quad - \left(3x - \frac{1}{6}(3x)^3 + o(x^3)\right) \end{aligned}$$

(A) $k=1, c=4.$

(B) $k=1, c=-4.$

✓ (C) $k=3, c=4.$

(D) $k=3, c=-4.$

$= 4x^3 + 0(x^2)$

【难度】 本题的数学二难度值为 0.820，数学三难度值为 0.773，数学一的考生也

应掌握此题. 解析: $f(x) = \underbrace{(3\sin x - 3x)}_S - \underbrace{(\sin 3x - 3x)}_S$



$$\frac{3(-\frac{1}{6}x^3) - (-\frac{1}{6}(3x)^3)}{(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6})x^3} = 4x^3$$

【解析】

方法1:

泰勒公式, 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} 3\sin x - \sin 3x &= 3[x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)] - [3x - \frac{1}{6}(3x)^3 + o(x^3)] \\ &= 4x^3 + o(x^3) \sim cx^k \end{aligned}$$

所以, $k=3$, $c=4$.

方法2:

洛必达法则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x - \sin 3x}{cx^k} &\stackrel{k > 0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cos x - 3\cos 3x}{ckx^{k-1}} \\ &\stackrel{k > 1}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3\sin x + 9\sin 3x}{ck(k-1)x^{k-2}} \\ &\stackrel{k > 2}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3\cos x + 27\cos 3x}{ck(k-1)(k-2)x^{k-3}} \\ &\stackrel{k=3}{=} \frac{24}{6c} = 1, \end{aligned}$$

所以, $k=3$, $c=4$.

因此选 (C).

【试题 27】(11-2.15) 已知函数 $F(x) = \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^\alpha}$. 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$,

试求 α 的取值范围.

【难度】 本题的数学二难度值为 0.620, 数学一、数学三的考生也应掌握此题.

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) &\stackrel{\alpha > 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}} \\ &\stackrel{\alpha > 1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^{3-\alpha}}{\alpha(\alpha-1)(1+x^2)} = 0 \\ \therefore 3-\alpha < 2 \quad \therefore \alpha > 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) &\stackrel{\alpha > 1}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\alpha x^{\alpha-1}} = 0 \\ \therefore \alpha-1 < 2 \quad \text{即 } \alpha < 3 \end{aligned}$$

备注: $1 < x < 2$

【试题 28】 (12-2.15) 已知函数 $f(x) = \frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x}$ 记 $a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(I) 求 a 的值;

$$= \frac{x}{\sin x} + \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$$

(II) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) - a$ 与 x^k 是同阶无穷小量, 求常数 k 的值.

【难度】 本题的数学二难度值为 0.791, 数学一、数学三的考生也应掌握此题.

【解析】

(I) 由题可知:

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x^2-\sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x^2-\sin x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x-\sin x}{x^2} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^2} = 1$$

(II) 方法 1: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-a}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x} - 1}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x^2-\sin x-x \sin x}{x^{k+1} \sin x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-\sin x)+x(x-\sin x)}{x^{k+2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(x-\sin x)}{x^{k+2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^{k+2}}$$

所以, 当 $k=1$ 时, 有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-a}{x^k} = \frac{1}{6}$, 此时 $f(x)-a$ 与 x^k 是同阶无穷小量 ($x \rightarrow 0$),

因此 $k=1$.

方法 2: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-a}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x} - 1}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x^2-\sin x-x \sin x}{x^{k+1} \sin x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x^2 - \left[x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right] - [x^2 + o(x^3)]}{x^{k+2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x^{k+2}},$$

所以, 当 $k=1$ 时, 有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-a}{x^k} = \frac{1}{6}$, 此时 $f(x)-a$ 与 x^k 是同阶无穷小量 ($x \rightarrow 0$),

因此 $k=1$.

另法: $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)-a = \frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x} - 1$

$$= \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) + \left(\frac{x}{\sin x} - 1 \right)$$

$$= \frac{x-\sin x}{x \sin x} + \frac{x-\sin x}{\sin x}$$

$\beta + o(\beta) \sim \beta$

$$\sim \frac{x-\sin x}{x \sin x} \sim \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^2} = \frac{1}{6}x$$

$\therefore k=1$.

【试题 29】(13-1.1)

已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = c$, 其中 k, c 为常数, 且 $c \neq 0$,

则

(A) $k=2, c=-\frac{1}{2}$

(B) $k=2, c=\frac{1}{2}$

(C) $k=3, c=-\frac{1}{3}$

(D)  $k=3, c=\frac{1}{3}$

【难度】 本题的数学一难度值为 0.792，数学二、数学三的考生也应掌握此题.



【试题 30】 (13-2.15;3.15)

当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 为等价

$$\sum_{k=0}^2 \frac{1}{a x^k} = 1$$

无穷小量, 求 n 与 a 的值.

【难度】 本题的数学二难度值为 0.560，数学三难度值为 0.492，数学一的考生也

应掌握此题.

【解析】

方法1: 洛必达法则

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{ax^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x + 2 \cos x \cdot \sin 2x \cdot \cos 3x + 3 \cos x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x}{anx^{n-1}} \\ & \stackrel{n=2}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{2ax} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x \cdot \sin 2x \cdot \cos 3x}{2ax} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x}{2ax} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2ax} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2ax} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{2ax} \\ &= \frac{1}{2a} + \frac{4}{2a} + \frac{9}{2a} = \frac{7}{a} = 1 \end{aligned}$$

所以 $a=7$, $n=2$.

方法2: 拆分极限存在的项

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{ax^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{1 - \cos x}^{28\pi} + \overbrace{\cos x - \cos x \cdot \cos 2x}^{28\pi} + \overbrace{\cos x \cdot \cos 2x - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}^{28\pi}}{ax^n} \\ & \underline{\underline{n = 2}} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \cos x}{ax^2} + \frac{\cos x(1 - \cos 2x)}{ax^2} + \frac{\cos x \cdot \cos 2x \cdot (1 - \cos 3x)}{ax^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{ax^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x(1 - \cos 2x)}{ax^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \cos 2x \cdot (1 - \cos 3x)}{ax^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{ax^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{ax^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(3x)^2}{ax^2} \\ &= \frac{7}{a} = 1 \end{aligned}$$

所以 $a=7$, $n=2$.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x} \dots \sqrt[n]{\cos nx}}{x^2} \quad 1 - \cos^k x \sim \frac{k}{2} x^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \left[1 - \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x} \dots \sqrt[n]{\cos nx} \right]}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^2}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x}}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} \left[1 - \sqrt[3]{\cos 3x} \dots \sqrt[n]{\cos nx} \right]}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} + \dots + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[n]{\cos nx}}{x^2} \\ & \quad \quad \quad \circ \quad \frac{1}{\frac{1}{n}} (nx)^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} + 1 + \cancel{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} + \dots + \cancel{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \\
&= \frac{1}{2} + 1 + \frac{2}{2} + \dots + \frac{n}{2} \\
&= \frac{1}{2} (1+2+\dots+n) = \frac{n(n+1)}{4}
\end{aligned}$$

方法3: 泰勒公式

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{ax^n} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right] \left[1 - \frac{4}{2}x^2 + o(x^2)\right] \left[1 - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)\right]}{ax^n} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^2 + o(x^2)}{ax^n} = 1
\end{aligned}$$

所以, $n=2$, $a=7$.

另法:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{ax^n} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos 2x \cos 3x - 1}{-ax^n} \quad \square \sim \ln(1+2) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x \cos 2x \cos 3x}{-ax^n} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x + \ln \cos 2x + \ln \cos 3x}{-ax^n} \quad (\ln \cos x)' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x \\
&\stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overset{180^\circ}{-\tan x} - \overset{180^\circ}{2\tan 2x} - \overset{180^\circ}{3\tan 3x}}{-anx^{n-1} \rightarrow 180^\circ} \\
&\stackrel{\text{洛}}{=} \frac{1}{2a} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\tan 2x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\tan 3x}{x} \right) \\
&= \frac{1}{2a} (1+4+9) = \frac{7}{a} = 1 \\
&\therefore a=7.
\end{aligned}$$