

25考研 | 题型通法05笔记



第二章 一元函数微分学 (2)

题型考点 导数的应用

1. 单调性、凹凸性

(1) 若 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 单调递增; 若 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 单调递减;

(2) 若 $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 为凹函数; 若 $f''(x) < 0$, 则 $f(x)$ 为凸函数;

已知: $f''(x) > 0$. 证明: $\forall x_1 < x$, $f(\frac{x_1+x}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x)}{2}$

证明: $\forall x_1 < x$, 令 $T(x) = \frac{f(x_1)+f(x)}{2} - f(\frac{x_1+x}{2})$

$$T'(x) = \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{2}f'(\frac{x_1+x}{2})$$

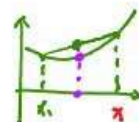
$\because f''(x) > 0 \therefore f'(x) \uparrow \Rightarrow f(x)$ 为凹函数.

$$\because x_1 < x \therefore \frac{x_1+x}{2} < \frac{x+x}{2} = x$$

$$\therefore f'(\frac{x_1+x}{2}) < f'(x) \therefore T'(x) > 0 \therefore T(x) \uparrow$$

$$\therefore T(x) > T(x_1) = 0$$

$$\therefore \frac{f(x_1)+f(x)}{2} > f(\frac{x_1+x}{2}) \therefore f(x)$$
 为凹函数.



2. 极值点、拐点、最值

(1) 极值点的判定:

① 必要条件: 令 $f'(x) = 0$, 解得驻点和不可导点;

② 充分条件:

- ☆ { (a) $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 左右两侧异号;
(b) $f''(x_0) \neq 0$; > 0 , 极小值
 < 0 , 极大值.

(3/4) (c) $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, 且 n 为偶数.

$$\text{证明: } f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

$$= f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

∵ 若 n 为偶数, $(x-x_0)^n > 0$,

① 若 $f^{(n)}(x_0) > 0$, 则 $f(x) > f(x_0)$, $\therefore x = x_0$ 为 $f(x)$ 极小值.

② 若 $f^{(n)}(x_0) < 0$, 则 $f(x) < f(x_0)$, $\therefore x = x_0$ 为 $f(x)$ 极大值.

2. 若 n 为奇数, 不妨设 $f'(x_0) > 0$

当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $(x - x_0)^n < 0$, $f(x) < f(x_0)$

当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $(x - x_0)^n > 0$, $f(x) > f(x_0)$

$\therefore x = x_0$ 不是 $f(x)$ 的极值点.

(2) 拐点的判定:

①必要条件: 令 $f''(x) = 0$, 解得二阶导等于零的点和二阶不可导点;

②充分条件:

(a) $f''(x)$ 在 $x = x_0$ 左右两侧异号;

(b) $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 左右两侧单调性改变; $\begin{cases} f' \uparrow \Rightarrow f \text{ 为凹} \\ f' \downarrow \Rightarrow f \text{ 为凸} \end{cases}$

(c) $f'''(x_0) \neq 0$;

(d) $f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, 且 n 为奇数.

【试题 64】 (10-3.3)

设函数 $f(x), g(x)$ 具有二阶导数, 且 $g''(x) < 0$. 若

$g(x_0) = a$ 是 $g(x)$ 的极值, 则 $f(g(x))$ 在 x_0 取极大值的一个充分条件是 $f'(a) > 0$ 且 $f''(a) < 0$.

(A) $f'(a) < 0$.

(B) $f'(a) > 0$.

(C) $f''(a) < 0$.

(D) $f''(a) > 0$.

【难度】 本题的数学三难度值为 0.388, 数学一、数学二的考生也应掌握此题.

【解析】

令 $F(x) = f(g(x))$, 则

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x),$$

$$F''(x) = f''(g(x))[g'(x)]^2 + f'(g(x))g''(x).$$

由于 $g(x_0)$ 是 $g(x)$ 的极值, 故 $g'(x_0) = 0$. 所以

$$F'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0) = 0,$$

$$F''(x_0) = f''(g(x_0))[g'(x_0)]^2 + f'(g(x_0))g''(x_0) = f'(a)g''(x_0).$$

由题设知 $g''(x) < 0$, 若 $f'(a) > 0$, 则可得到 $F''(x_0) < 0$. 这是函数 $y = f(g(x))$ 在

$x = x_0$ 处取得极大值的一个充分条件, 从而可知选项 (B) 正确.

【试题 65】 (10-3.12)

若曲线 $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ 有拐点 $(-1, 0)$, 则 $b =$ _____.

$$y(-1) = 0, \quad y''(-1) = 0$$

【难度】 本题的数学三难度值为 0.822, 数学一、数学二的考生也应掌握此题.

【解析】

$$y' = 3x^2 + 2ax + b, \quad y'' = 6x + 2a.$$

由题可知 $\begin{cases} y|_{x=-1} = a - b = 0, \\ y''|_{x=-1} = -6 + 2a = 0. \end{cases}$ 解得 $a = b = 3$.



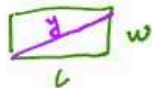
【试题 66】(10-2.13)

已知一个长方形的长 l 以 2cm/s 的速率增加，宽 w 以 3cm/s

的速率增加，则当 $l = 12\text{cm}$ ， $w = 5\text{cm}$ 时，它的对角线增加的速率为 3cm/s 。(教一=对 教二=解)(教三=)

【难度】 本题的数学二难度值为 0.298，数学一的考生也应掌握此题，数学三的考生

对此题仅了解即可。



解：由题可知： $\frac{dl}{dt} = 2 (\text{cm/s})$ ， $\frac{dw}{dt} = 3 (\text{cm/s})$

$$y = \sqrt{l^2 + w^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{l^2 + w^2}} \cdot (l \cdot \frac{dl}{dt} + w \cdot \frac{dw}{dt}) \quad \left| \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial l} \cdot \frac{dl}{dt} + \frac{\partial y}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dt} \right.$$

$$= \frac{l}{\sqrt{l^2 + w^2}} \cdot \frac{dl}{dt} + \frac{w}{\sqrt{l^2 + w^2}} \cdot \frac{dw}{dt}$$

当 $l = 12$ ， $w = 5$ 时，

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{13} \cdot (12 \times 2 + 5 \times 3) = 3.$$

【试题 67】(10-1.16;2.15)

求函数 $f(x) = \int_1^x (x^2 - t) e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值。

【难度】 本题的数学一难度值为 0.454，数学二难度值为 0.452，数学三的考生也应

掌握此题。

【解析】

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ，由于

$$f(x) = x^2 \int_1^x e^{-t^2} dt - \int_1^x t e^{-t^2} dt,$$

$$f'(x) = 2x \int_1^x e^{-t^2} dt + 2x^3 e^{-x^2} - 2x^3 e^{-x^2} = 2x \int_1^x e^{-t^2} dt. \quad f''(x) = 2 \int_1^x e^{-t^2} dt + 4x^2 e^{-x^2}$$

令 $f'(x) = 0$ ，得 $f(x)$ 的驻点为 $x = 0, \pm 1$ 。

列表如下：

当 $x < -1$ 时 $f'(x) < 0$ ， $f(x) \downarrow$
 当 $-1 < x < 0$ 时 $f'(x) > 0$ ， $f(x) \uparrow$
 当 $0 < x < 1$ 时 $f'(x) < 0$ ， $f(x) \downarrow$
 当 $x > 1$ 时 $f'(x) > 0$ ， $f(x) \uparrow$

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小	$\nearrow$	极大	$\searrow$	极小	$\nearrow$

因此， $f(x)$ 的单调增加区间为 $(-1, 0)$ 和 $(1, +\infty)$ ；

$f(x)$ 的单调减少区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(0, 1)$ ；

$f(x)$ 的极小值为 $f(\pm 1) = \int_1^1 (-t) e^{-t^2} dt = 0$ ；

$$f(x) \text{ 的极大值为 } f(0) = -\int_1^0 t e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} e^{-t^2} \Big|_1^0 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right).$$



【试题 68】 (11-2.3)

函数 $f(x) = \ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

【难度】 本题的数学二难度值为 0.588, 数学一、数学三的考生也应掌握此题.

【解析】

法一: $f(x) = \ln|x-1| + \ln|x-2| + \ln|x-3|$, $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

所以

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$

$$= \frac{3x^2 - 12x + 11}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

令 $f'(x) = 0$, 即 $3x^2 - 12x + 11 = 0$, 由于 $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 11 > 0$,

所以 $f'(x) = 0$ 有两个实根, 即 $f(x)$ 有两个驻点, 因此选 (C).

法二: 令 $u(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$, 则 $f(x) = \ln|u(x)|$, $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

$$\therefore f'(x) = 0 \Leftrightarrow u'(x) = 0$$

$\because u(1) = u(2) = u(3) = 0$

$\therefore$ 由罗尔定理可知: 存在 $\xi_1 \in (1, 2)$, $\xi_2 \in (2, 3)$ 使得: $u'(\xi_1) = u'(\xi_2) = 0$

$\therefore u'(x) = 0$ 至少有一个根

$\because u(x)$ 为 x 的 3 次多项式

$\therefore u'(x)$ 为 x 的 2 次多项式

$\therefore u'(x) = 0$ 最多有两个实根

$\therefore u'(x) = 0$ 恰有两个实根.

【试题 69】 (11-1.1)

曲线 $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是

- (A) (1, 0).

- (B) (2, 0).

- (C) (3, 0).

- (D) (4, 0).

法一: $y' = \dots$
 $y'' = \dots$
 $y''' = \dots$

法二: 画图.

【难度】 本题的数学一难度值为 0.527, 数学二、数学三的考生也应掌握此题.



$x \rightarrow 2$ 时 $y \rightarrow -16(x-2)^2$
 $x \rightarrow 3$ 时 $y \rightarrow 2(x-3)^3$ $x=3$ 为拐点
 $x \rightarrow 4$ 时 $y \rightarrow 12(x-4)^4$

【解析】

方法 1: 令 $f(x) = (x-x_0)^n g(x)$, 其中 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处 n 阶可导且 $g(x_0) \neq 0$,

则 $x=x_0$ 为方程 $f(x)=0$ 的 n 重根

当 $n \geq 2$ 时, $f'(x) = n(x-x_0)^{n-1} g(x) + (x-x_0)^n g'(x)$

$x=3$, $f(x)=0$ 3重
 $f'(x)=0$ 2重

$$= (x - x_0)^{n-1} [ng(x) + (x - x_0)g'(x)]$$

$$= (x - x_0)^{n-1} h(x),$$

$$f(x_0) = 0$$

$$f'(x_0) = 0$$

$$1重, f''(x_0) = 0$$

$$0重, 不是根$$

$$f''(x_0) \neq 0$$

其中 $h(x_0) = ng(x) + (x - x_0)g'(x)|_{x=x_0} = ng(x_0) \neq 0$,

求一次导少一次根.

所以 $x = x_0$ 为方程 $f'(x) = 0$ 的 $n-1$ 重根.

以此类推, 当 $n \geq 3$ 时, $x = x_0$ 为方程 $f''(x) = 0$ 的 $n-2$ 重根.

由此可知, $x = 3$ 是方程 $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4 = (x-3)^3 g(x) = 0$ 的 3 重根,

所以它是方程 $y'' = 0$ 的单根, 不是方程 $y''' = 0$ 的根, 即 $y''(3) = 0, y'''(3) \neq 0$,

故 $(3, 0)$ 为曲线的拐点, 应选 (C).

方法 2:



【试题 70】 (11-2.16)

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + t + \frac{1}{3}, \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t + \frac{1}{3} \end{cases}$ 确定, 求函数 $y = y(x)$ 的极值和曲线 $y = y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

【难度】 本题的数学二难度值为 0.776, 数学一的考生也应掌握此题, 数学三的考试

大纲对参数方程不作要求, 数学三的考生对本题仅作了解..

【解析】

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{4t}{(t^2 + 1)^3}.$$

令 $\frac{dy}{dx} = 0$, 得 $t = \pm 1$.

当 $t = 1$ 时, $x = \frac{5}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$, 当 $t = -1$ 时, $x = -1$, $y = 1$.

令 $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, 得 $t = 0$, 此时 $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}$.

列表如下:

t	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
x	$(-\infty, -1)$	-1	$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$	$\frac{5}{3}$	$\left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

由此可知, 函数 $y(x)$ 的极大值为 $y(-1) = 1$, 极小值为 $y\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{1}{3}$;

曲线 $y = y(x)$ 的凹区间为 $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$, 凸区间为 $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$;

曲线 $y = y(x)$ 的拐点为 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

【试题 71】(14-1.2;2.3;3.4)

设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$,

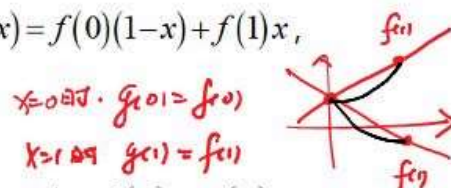
则在区间 $[0, 1]$ 上

(A) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$.

(B) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$.

(C) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$.

✓(D) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$.



【难度】 本题的数学一难度值为 0.521, 数学二难度值为 0.532, 数学三难度值为

0.430. 证:- 令 $\varphi(x) = f(x) - g(x)$, 则

$$\text{A. B: } \varphi(x) = f(x) - [f(1) - f(0)]$$

$$\text{C. D: } \varphi'(x) = f'(x) > 0$$

证:- $\therefore \varphi(x)$ 为凹函数.

$$\therefore \varphi(0) = 0, \varphi(1) = 0$$

$$\therefore \varphi(x) \leq 0$$

$$\therefore f(x) \leq g(x)$$

证:- $\therefore \varphi'(x) \uparrow$

$$\therefore \varphi'(x) = f'(x) - f'(0), \quad 0 < (0, 1)$$

$$\therefore \varphi'(0) = 0 \quad \varphi'(1) = 0$$

$\therefore$ 当 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 时, $\varphi'(x) < 0 \therefore \varphi(x) \downarrow$

当 $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ 时, $\varphi'(x) > 0 \therefore \varphi(x) \uparrow$

$$\therefore \varphi(0) = \varphi(1) = 0$$

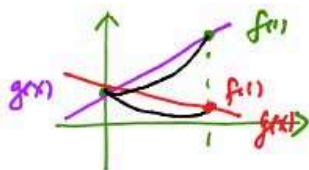
$$\therefore \varphi(x) \leq 0$$

$$\varphi(0) = 0 \quad \varphi(1) = 0$$

$$\varphi(\frac{1}{2}) = ?$$

证法二: $g(0) = f(0), g(1) = f(1)$

$g(x)$ 为一条直线. (x 的二次函数)



当 $f''(x) > 0$ 时, $f(x)$ 为凹

【试题 72】 (14-1.16)

设函数 $y = f(x)$ 由方程 $y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$ 确定, 求

$f(x)$ 的极值.

平均分/总分

【难度】 本题的数学一难度值为 0.467, 数学二、数学三的考生也应掌握此题.

【解析】

方程两端对 x 求导, 得

$$3y^2y' + y^2 + 2xyy' + 2xy + x^2y' = 0. \quad ①$$

令 $y' = 0$, 得 $y = 0$ 或 $y = -2x$.

将 $y = 0$ 代入方程不成立, 舍去.

将 $y = -2x$ 代入方程得 $-6x^3 + 6 = 0$, 解得 $x = 1$, $f(1) = -2$.

①式两端再对 x 求导, 得

$$(3y^2 + 2xy + x^2)y'' + 2(3y + x)(y')^2 + 4(y + x)y' + 2y = 0,$$

将 $x = 1, f(1) = -2, f'(1) = 0$ 代入上式, 求得 $f''(1) = \frac{4}{9} > 0$.

所以 $x = 1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点, 极小值为 $f(1) = -2$.

【试题 73】 (16-2.4;3.1)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如

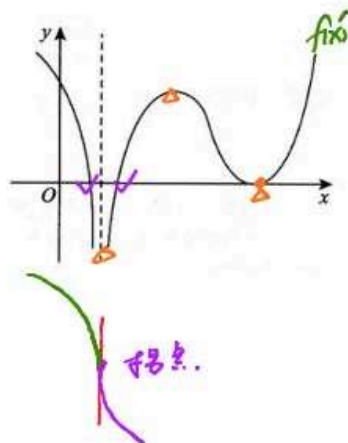
图所示, 则

(A) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点.

✓ (B) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 3 个拐点.

(C) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 1 个拐点.

(D) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点.



题型考点 函数求最值

1. 单调性 

2. 闭区域上求最值 ① $f'(x)=0$, 驻点, 不可导点. ② 驻点, 不可导点, 端点, 求值 ③ 比较大

【试题 74】 (09-2.13) 函数 $y = x^{2x}$ 在区间 $(0, 1]$ 上的最小值为_____.

【难度】 本题的数学二难度值为 0.661, 数学一、数学三的考生也应掌握此题.

【解析】

根据幂指函数指数化, 得 $y = e^{2x \ln x}$, 求导得

$$y' = e^{2x \ln x} (2 \ln x + 2).$$

令 $y' = 0$ 得驻点 $x = \frac{1}{e}$.

进一步判断最值点, 有以下两种方法:
方法一: 唯一极值点, 必为最值点.
方法二: 比较大

方法1: 当 $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ 时, $y' < 0$, 函数单调递减;

当 $x \in \left(\frac{1}{e}, 1\right]$ 时, $y' > 0$, 函数单调递增.

故 $x = \frac{1}{e}$ 为 $y = e^{2x \ln x}$ 的最小值点, 最小值为 $y\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{2}{e}}$.

方法2: 又因为 $y\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{2}{e}} < 1, y(1) = 1, y_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{2x \ln x} = 1$,

故 $y = e^{2x \ln x}$ 在区间 $(0, 1]$ 上的最小值为 $y\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{2}{e}}$.

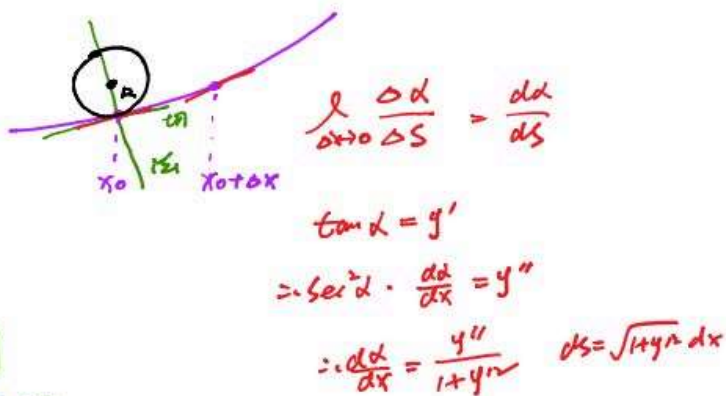
题型考点 曲率 (数学一、数学二)

1. 曲率: $K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

2. 曲率半径: $R = \frac{1}{K}$

3. 曲率圆

- ① 曲线夹在曲率圆与切线之间
- ② 曲率圆与曲线具有相同的 y', y''
- ③ R 越小, 曲线越弯曲, K 越大



【试题 75】 (09-2.5) 若 $f''(x)$ 不变号, 且曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 1)$ 上的曲率圆为

$x^2 + y^2 = 2$, 则函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 内

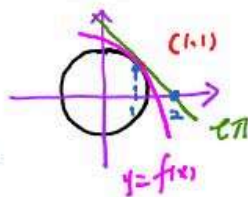
对 x 求导: $2x + 2y \cdot y' = 0$ 代入 $x=1, y=1$ 得: $y' = -1 \therefore$ 切线: $x + y = 2$

(A) 有极值点, 无零点.

(B) 无极值点, 有零点.

(C) 有极值点, 有零点.

(D) 无极值点, 无零点.



【难度】 本题的数学二难度值为 0.464, 数学一的考生也应掌握此题, 数学三的考生

不要求.

【解析】

① 方程 $x^2 + y^2 = 2$ 两边对 x 求导得:

$$2x + 2yy' = 0, \text{ 解得 } y'(1) = -1;$$

再求导得:

$$2 + 2(y')^2 + 2yy'' = 0, \text{ 解得 } y''(1) = -2.$$

②由于在 $x = 1$ 处曲率圆于曲线有相同的一阶导数值与二阶导数值，所以：

$$f'(1) = -1, f''(1) = -2$$

因为 $f''(x)$ 不变号，所以在区间 $[1, 2]$ 上 $f''(x) < 0$ ，从而 $f'(x)$ 单调递减，
即 $f'(x) < f'(1) = -1 < 0$ ，故函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递减，无极值点。

③同时，当 $x > 1$ 时，由 $f''(x) < -1$ 得：



$$\int_1^x f'(t)dt < \int_1^x (-1)dt,$$

即 $f(x) - f(1) < 1 - x$, 所以 $f(x) < 2 - x$, 从而 $f(2) < 0$, 又由于 $f(1) = 1 > 0$,

故由零点定理可知 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 内有零点, 故应选 (B)。

另外, 在区间 $[1, 2]$ 上, 由拉格朗日中值定理可知 $f(2) - f(1) = f'(\xi) < -1, \xi \in (1, 2)$,

从而也可求得 $f(2) < 0$ 。

【试题 76】(12-2.13) 曲线 $y = x^2 + x (x < 0)$ 上曲率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标为 $(-1, 0)$ 。

【难度】 本题的数学二难度值为 0.510, 数学一的考生也应掌握此题, 数学三的考生

不作要求。

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(1+(2x+1)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore x = -1 \quad (1+(2x+1)^2)^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$$

【试题 77】(14-2.4)

$$\text{曲线} \begin{cases} x = t^2 + 7, \\ y = t^2 + 4t + 1 \end{cases}$$

上对应于 $t = 1$ 的点处的曲率半径是

$$(1+(2x+1)^2)^{\frac{3}{2}} = 8 \quad \therefore 1+(2x+1)^2 = 2$$

$$(2x+1)^2 = 1 \quad x < 0$$

$$\therefore x = -1$$

$$\rho = \frac{1}{K}$$

(A) $\frac{\sqrt{10}}{50}$

(B) $\frac{\sqrt{10}}{100}$

☒ (C) $10\sqrt{10}$

(D) $5\sqrt{10}$

【难度】 本题的数学二难度值为 0.585, 数学一的考生也应掌握此题, 数学三的考生

不作要求。

【解析】

$$y' = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t+4}{2t} = \frac{t+2}{t},$$

$$y'' = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{-\frac{2}{t^2}}{2t} = -\frac{1}{t^3},$$

则曲线在 $t = 1$ 的对应点处的曲率

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \Big|_{t=1} = \frac{1}{10\sqrt{10}}.$$

曲率半径 $\rho = \frac{1}{K} = 10\sqrt{10}$, 故选 (C)。

题型考点 导数的经济学应用 (数学三)

1. 边际: 导数;

2. 弹性: $E_{yx} = \frac{dy/y}{dx/x} = \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{x}{y}$;

① 需求价格弹性: $\eta = - \left(\frac{dQ}{dP} \right) \cdot \frac{P}{Q}$;

② 收益价格弹性: $E_{rp} = \frac{dR}{dP} \cdot \frac{P}{R} = \left(Q + P \frac{dQ}{dP} \right) \cdot \frac{1}{Q} = 1 - \eta$.

$x_0 \rightarrow x_0 + \Delta x$, $y_0 \rightarrow y_0 + \Delta y$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
 $1 \rightarrow 1.1$ $10000 \uparrow \rightarrow 11000 \uparrow$ $\Delta y = 1000$
 $1 \uparrow$ $1.1 \uparrow$ $\Delta y = 0.1$
 $\frac{\Delta x}{x} = \frac{0.1}{1} = 10\%$ $\frac{\Delta y}{y} = \frac{1000}{10000} = 10\%$
 $\frac{0.1}{1} = 10\%$

$k = pQ \rightarrow$

【试题 78】 (09-3.12) 设某产品的需求函数为 $Q = Q(p)$ ，其对价格 p 的弹性

$\varepsilon_p = 0.2$ ，则当需求量为 10000 件时，价格增加 1 元会使产品收益增加 _____ 元。

$\left| \frac{dQ/Q}{dp/p} \right|$

【难度】 本题的数学三难度值为 0.208，数学一、数学二的考生不要求。

【解析】

由题意可知，需求价格弹性为

$$\frac{dR}{dp} = ?$$

$$= \left| \frac{dQ}{dp} \cdot \frac{p}{Q} \right|$$

$$\varepsilon_p = -\frac{dQ}{dp} \cdot \frac{p}{Q} = 0.2,$$

收益函数为

$$R = pQ(p),$$

故有

$$\frac{dR}{dp} = Q + p \frac{dQ}{dp} = Q \left(1 + \frac{dQ}{dp} \cdot \frac{p}{Q} \right) = Q(1 - \varepsilon_p) = 0.8Q,$$

即

$$dR = 0.8Q dp.$$

由微分的经济意义可知，当 $Q = 10000$ ， $dp = 1$ 时，产品的收益会增加

$$dR = 0.8 \times 10000 \times 1 = 8000 \text{ (元)},$$

故应填 8000.

【试题 79】 (10-3.11) 设某商品的收益函数为 $R(p)$ ，收益弹性为 $1 + p^3$ ，其中 p

为价格，且 $R(1) = 1$ ，则 $R(p) = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$\frac{dR}{dp} \cdot \frac{p}{R} = 1 + p^3$$

求导公式，解微分方程。

【难度】 本题的数学三难度值为 0.307，数学一、数学二的考生不作要求。

【解析】

由弹性公式知 $\frac{dR}{dp} \cdot \frac{p}{R} = 1 + p^3$.

$$\text{整理得 } \frac{1}{R} dR = \left(\frac{1}{p} + p^2 \right) dp.$$

$$\text{两边积分为 } \ln R = \ln p + \frac{p^3}{3} + \ln C.$$

$$\text{从而 } R = Cpe^{\frac{p^3}{3}}.$$

$$\text{代入 } R(1) = 1, \text{ 得 } C = e^{-\frac{1}{3}}, \text{ 故 } R(p) = pe^{\frac{p^3-1}{3}}.$$

【试题 80】 (13-3.18)

设生产某产品的固定成本为 60000 元, 可变成本为 20 元/

件, 价格函数为 $p = 60 - \frac{Q}{1000}$ (p 是单价, 单位: 元; Q 是销量, 单位: 件), 已知产销

平衡, 求:

(I) 该商品的边际利润 $L'(Q) = \dots$

(II) 当 $p = 50$ 时的边际利润, 并解释其经济意义;

(III) 使得利润最大的定价 p . $L'(Q) = 0$

【难度】 本题的数学三难度值为 0.735, 数学一、数学二的考生不作要求.

【解析】

(I) 成本函数为 $C(Q) = 60000 + 20Q$,

收益函数为 $R(Q) = pQ = 60Q - \frac{Q^2}{1000}$,

利润函数为 $L(Q) = R(Q) - C(Q) = -\frac{Q^2}{1000} + 40Q - 60000$,

故该商品的边际利润 $L'(Q) = -\frac{Q}{500} + 40$.

(II) 当 $p = 50$ 时, 销量 $Q = 10000$, $L'(10000) = 20$. $\frac{dL}{dQ} = 20 \therefore dL = 20 dQ$

其经济意义为: 销售第 10001 件商品时所得的利润为 20 元.

$p=50$ 时, $Q=10000$ $dQ=1$
 $\therefore dL=20$ 件时

(III) 令 $L'(Q) = -\frac{Q}{500} + 40 = 0$, 得 $Q = 20000$, 且 $L''(20000) < 0$,

故当 $Q = 20000$ 件时利润最大, 此时 $p = 40$ (元).

【试题 81】 (14-3.9)

设某商品的需求函数为 $Q = 40 - 2P$ (P 为商品的价格),

则该商品的边际收益为_____.

$$R(Q) = PQ = \frac{40-Q}{2} \cdot Q$$

【难度】 本题的数学三难度值为 0.274, 数学一、数学二的考生不作要求

【解析】

由题设可得价格函数 $P = \frac{40-Q}{2}$, 所以该商品的收益函数为

$$R = PQ = \frac{(40-Q)Q}{2}, \text{ 且 } \frac{dR}{dQ} = 20 - Q,$$

故边际收益为 $20 - Q$.

① $Q = Q(p)$ 自变量为 p

② 其他函数自变量均为 Q :

$$C(Q) = \text{固定} + \text{可变}$$

$$R(Q) = pQ$$

$$L(Q) = R(Q) - C(Q)$$

$$T(Q) \text{ 税}$$

