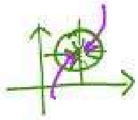
25考研 | 题型通法12笔记

第五章 多元函数微分学

题型考点 多元微分的概念

1.多元函数的极限



（1）利用一元函数极限的性质和结论 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0$

☆（2）取特殊路径判定极限不存在 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}\overset{y=kx}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\frac{k}{1+k^2}$，不存在

$y=x$

$y=-x$，x轴：$y=0$

y轴：$x=0$

（3）利用夹逼准则判定极限为 0

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)\xlongequal[y=kx^2]{y=kx}0$ ， $0\le|f(x,y)|\le\square\to0$

例：$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}\overset{y=kx}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{kx^3}{(1+k^2)x^2}=0$ 大概率为0

$0\le\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\le\begin{cases}\left|\frac{x^2y}{2xy}\right|=\frac{|x|}{2}\to0\\ \left|\frac{x^2y}{x^2}\right|=|y|\to0\end{cases}$

2.偏导数

（1） $f'_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$ 可以代入 $y=y_0$

（2） $f'_y(x_0,y_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$ 可以代入 $x=x_0$

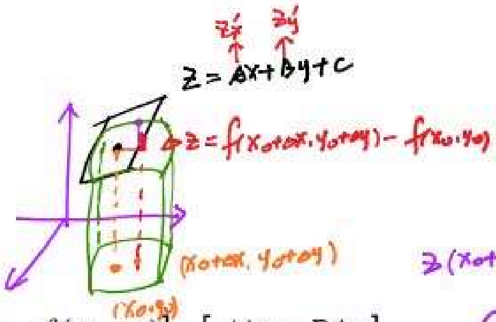
例：$z=(x+y)^{2+xy}\cdot e^{y\arctan x}$，求 $z'_x(1,0)=$ ____ .

$z''_{xy}(1,0)$

解：$z(x,0)=x^2\cdot e^0=x^2$

$\therefore z'_x(1,0)=\frac{dz(x,0)}{dx}\Big|_{x=1}=2x\Big|_{x=1}=2.$

3.全微分



(3满)（1）可微的定义

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$$

$z(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-z(x_0,y_0)$

$$\Leftrightarrow\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]-[A\Delta x+B\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$$

$=[A(x_0+\Delta x)+B(y_0+\Delta y)+C]$

$-[Ax_0+By_0+C]$

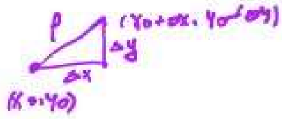
$$\Leftrightarrow\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}\frac{[f(x,y)-f(x_0,y_0)]-[A(x-x_0)+B(y-y_0)]}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$$

$=A\Delta x+B\Delta y$

$\Delta x\to0$，$\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)=o(\rho)$

$\Delta y \to 0$

(2) 全微分的计算：$dz = Adx + Bdy$.



【注】$A = f_x'(x_0, y_0), B = f_y'(x_0, y_0)$.

4.关系

连续

$\Uparrow$

一阶偏导数连续 $\Rightarrow$ 可微 $\Rightarrow$ 偏导存在

存在切平面　　x轴、y轴

$\Downarrow$

方向导数存在

(仅极一)

① $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f_x'(x,y)=f_x'(x_0,y_0)$ ✓

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y=y_0}} f_x'(x,y_0)=f_x'(x_0,y_0)$ ✗

② $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f_y'(x,y)=f_y'(x_0,y_0)$

【试题 157】（12-2.5） 设函数 $f(x,y)$ 可微，且对任意的 x,y 都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$，则使不等式 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的一个充分条件是

$f(x_1,y_1)<f(x_2,y_1)<f(x_2,y_2)$

(A) $x_1>x_2$，$y_1<y_2$　　$x_1<x_2$，$y_1>y_2$　　(B) $x_1>x_2$，$y_1>y_2$

(C) $x_1<x_2$，$y_1<y_2$　　(D) $x_1<x_2$，$y_1>y_2$

【难度】 本题的数学二难度值为 0.791，数学一、数学三的考生也应掌握此题.

【试题 158】（12-1.3） 如果函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续,那么下列命题正确的是

(A) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在,则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微　　方法1：特例

$=|x|+|y|$

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)}{x^2}$ 存在.

(B) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在,则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

$\to 0$　∴分子 $\to 0$，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=f(0,0)=0$

(C) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微,则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在　$=1$

(D) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微,则 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在　$=1$

【难度】 本题的数学一难度值为 0.304，数学二、数学三的考生也应掌握此题.

方法1：

方法2：B：$I=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{[f(x,y)-f(0,0)]-[A(x-0)+B(y-0)]}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cdots=0$

① $A=f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)}{x^2}\cdot x=0$

同理 $B=f_y'(0,0)=0$

② $I = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2} = 0$ ∴ 可微.

方法2: ∵ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，设为 k

∴ $(x,y)\to(0,0)$ 时， $\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}=k+\alpha$ ∴ $f(x,y)=k(x^2+y^2)+\alpha\cdot(x^2+y^2)$

① ∵ $f(x,y)$ 连续 ∴ $f(0,0)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left[k(x^2+y^2)+\alpha\cdot(x^2+y^2)\right]=0$

② $A=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{kx^2+\alpha\cdot x^2}{x}=\lim\limits_{x\to0}(kx+\alpha\cdot x)=0$

同理 $B=f_y'(0,0)=0$.

$$\therefore I=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{[f(x,y)-f(0,0)]-[A(x-0)+B(y-0)]}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{k(x^2+y^2)+\alpha\cdot(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

【试题 159】 (12-3.11) 设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$ 则

$dz|_{(0,1)}=$ $2dx-dy$

【难度】 本题的数学三难度值为 0.388，数学一、数学二的考生也应掌握此题.

方法1: 特例: $f(x,y)=2x-y+2$ ∴ $dz=2dx-dy$

方法2: $f(0,1)=?$ ，分子$\to0$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\left[f(x,y)-2x+y-2\right]=f(0,1)-1=0$

∴ $f(0,1)=1$

$$\therefore \lim_{\substack{x\to0\\y\to1}}\frac{[f(x,y)-f(0,1)]-[A(x-0)+B(y-1)]}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\y\to1}}\frac{[f(x,y)-1]-[2x-(y-1)]}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$$

∴ $A=2$, $B=-1$

∴ $dz=Adx+Bdy$

$=2dx-dy$

方法3: ∵ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$

∴ $\substack{x\to0\\y\to1}$ 时， $\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0+\alpha$

∴ $f(x,y)=2x-y+2+\alpha\cdot\sqrt{x^2+(y-1)^2}$

$$\therefore A=f_x'(0,1)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,1)-f(0,1)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{[2x+1+\alpha\cdot|x|]-1}{x}$$

$$=2+\lim_{x\to0}\alpha\cdot\frac{|x|}{x}=2+0=2$$

$$B = f_y'(0,1) = \lim_{y\to1}\frac{f(0,y)-f(0,1)}{y-1} = \lim_{y\to1}\frac{[-y+2+\alpha_1|y-1|]-1}{y-1}$$

$$= -1 + \lim_{y\to1}\alpha_1\frac{|y-1|}{y-1} = -1$$

$$\therefore dz = 2dx - dy$$

5.偏积分

（1）对 x 积分时，要加 $C(y)$；

（2）凑全微分 $f_x'dx + f_y'dy = df(x,y)$，则 $z = f(x,y) + C$.

【试题 160】（15-2.17 改） 已知函数 $f(x,y)$ 满足

$$f''_{xy}(x,y)=2(y+1)e^x, f'_x(x,0)=(x+1)e^x, f(0,y)=y^2+2y,$$

则 $f(x,y)=$ ________.

解：$\because f''_{xy}=2(y+1)e^x$

$\therefore$ 对 y 偏积分得：$f'_x=(y+1)^2e^x+C_1(x)$

$\because f'_x(x,0)=e^x+C_1(x)=(x+1)e^x \quad \therefore C_1(x)=xe^x$

$\therefore f'_x=(y+1)^2e^x+xe^x$

对 x 偏积分得：$f(x,y)=(y+1)^2e^x+(x-1)e^x+C_2(y)$

$\because f(0,y)=(y+1)^2-1+C_2(y)=y^2+2y \quad \therefore C_2(y)=0$

$\therefore f(x,y)=(y+1)^2e^x+(x-1)e^x=e^x(y^2+2y+x)$

题型考点 多元复合函数求偏导

1.选择题

（1）根据链式法则求导;

（2）举特例，将抽象函数具体化.

2.填空题、解答题

（1）画出复合关系，从外层往内层，一层层求导;

（2）函数不会混淆的可以简写，不写自变量，会混淆的不要简写.

【试题 161】（09-3.10） 设 $z=(x+e^y)^x$，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$ ________.

【难度】 本题的数学三难度值为 0.579，数学一、数学二的考生也应掌握此题.

【解析】

方法 1：$z=(x+e^y)^x=e^{x\ln(x+e^y)}$,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=e^{x\ln(x+e^y)}\cdot\left.\left[\ln(x+e^y)+\frac{x}{x+e^y}\right]\right|_{(1,0)}=1+2\ln 2.$$

方法 2：$z(x,0)=(x+1)^x=e^{x\ln(x+1)}$，

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=\left.\frac{dz(x,0)}{dx}\right|_{x=1}=e^{x\ln(x+1)}\cdot\left.[\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}]\right|_{x=1}=1+2\ln 2.$$

【试题 162】（09-1.9） 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f(x,xy)$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

f_1'

$z=f\begin{cases}1-x\\2\begin{cases}x\\y\end{cases}\end{cases}$

f_2'

【难度】 本题的数学一难度值为 0.495，数学二、数学三的考生也应掌握此题.

【解析】

根据复合函数的链式求导法则，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'\cdot y\,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{12}''\cdot x+f_2'+yf_{22}''\cdot x=xf_{12}''+f_2'+xyf_{22}''\,.$$

【试题 163】 (09-2.17) 设 $z=f(x+y,x-y,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 dz 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

$dz=f_1'\,d(x+y)+f_2'\,d(x-y)+f_3'\,dxy$
$=f_1'\cdot(dx+dy)+f_2'\cdot(dx-dy)+f_3'\cdot(ydx+xdy)$

【难度】 本题的数学二难度值为 0.694，数学一、数学三的考生也应掌握此题.

【解析】

根据复合函数的链式求导法则，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'+f_3'\cdot y,\ \frac{\partial z}{\partial y}=f_1'-f_2'+f_3'\cdot x\,.$$

所以，
$$dz=(f_1'+f_2'+yf_3')dx+(f_1'-f_2'+xf_3')dy\,.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=f_{11}''\cdot 1+f_{12}''\cdot(-1)+f_{13}''\cdot x+f_{21}''\cdot 1+f_{22}''\cdot(-1)+f_{23}''\cdot x\\&\quad+y[f_{31}''\cdot 1+f_{32}''\cdot(-1)+f_{33}''\cdot x]+f_3'\\&=f_{11}''-f_{22}''+xyf_{33}''+(x+y)f_{13}''+(x-y)f_{23}''+f_3'\end{aligned}$$

【试题 164】 (10-2.19) 设函数 $u=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足等式

$u=f(x,y)\Leftrightarrow\begin{cases}u=u(\xi,\eta)\\ \xi=x+ay\\ \eta=x+by\end{cases}$

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,.$$

变形题.

确定 a，b 的值，使等式在变换 $\zeta=x+ay$，$\eta=x+by$ 下简化为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial\eta}=0$.

【难度】 本题的数学二难度值为 0.331，数学一、数学三的考生也应掌握此题.

记 $u=u(\xi,\eta)$，则

【解析】

方法 1：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial\zeta}+\dfrac{\partial u}{\partial\eta}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial\eta}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$，

$u_x'=u_1'\cdot 1+u_2'\cdot 1$

$u_{xx}''=u_{11}''\cdot 1+u_{12}''\cdot 1+u_{21}''\cdot 1+u_{22}''\cdot 1\ \cdots$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=a\frac{\partial u}{\partial \zeta}+b\frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}+2ab\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta\partial \eta}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=a\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}+(a+b)\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta\partial \eta}+b\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

将以上各式代入原等式，得

$$(5a^2+12a+4)\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}+[10ab+12(a+b)+8]\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial\eta}+(5b^2+12b+4)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0.$$

$=0$ $\neq 0$ $=0$

所以
$$\begin{cases}5a^2+12a+4=0,\\5b^2+12b+4=0.\\10ab+12(a+b)+8\neq 0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}a=-2,\\b=-\frac{2}{5};\end{cases}\begin{cases}a=-\frac{2}{5},\\b=-2;\end{cases}\begin{cases}a=-2,\\b=-2;\end{cases}\begin{cases}a=-\frac{2}{5},\\b=-\frac{2}{5}.\end{cases}$$

由$10ab+12(a+b)+8\neq 0$，舍去$\begin{cases}a=-2,\\b=-2;\end{cases}\begin{cases}a=-\frac{2}{5},\\b=-\frac{2}{5}.\end{cases}$

故$a=-2$，$b=-\frac{2}{5}$或$a=-\frac{2}{5}$，$b=-2$.

方法 2：由题可知$\begin{cases}x=\dfrac{a\eta-b\zeta}{a-b},\\y=\dfrac{\zeta-\eta}{a-b}.\end{cases}$所以

$\begin{cases}u=f(x,y)\\x=\cdots\\y=\cdots\end{cases}$ $\Leftrightarrow u=u(\zeta,y)$ $\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial\eta}=0$

$$\frac{\partial u}{\partial\zeta}=\frac{-b}{a-b}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{a-b}\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial\eta}=\frac{-ab}{(a-b)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{a+b}{(a-b)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{-1}{(a-b)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

由$\dfrac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial\eta}=0$与$4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$相比较可得

$$\frac{-ab}{4}=\frac{a+b}{12}=\frac{-1}{5}.$$

解得
$$\begin{cases}a=-2,\\b=-\frac{2}{5}.\end{cases}\text{或}\begin{cases}a=-\frac{2}{5},\\b=-2.\end{cases}$$

【试题 165】（11-3.10） 设函数$z=\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$，则$dz\big|_{(1,1)}=$______.

【难度】 本题的数学三难度值为 0.475，数学一、数学二的考生也应掌握此题.

【解析】

【解析】

两边取对数得
$$\ln z=\frac{x}{y}\ln\left(1+\frac{x}{y}\right),$$

故
$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\left[\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{x+y}\right],$$

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\left[\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{x+y}\right].$$

令 $x=1$，$y=1$ 得

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=1+2\ln 2,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=-(1+2\ln 2),$$

从而 $dz\big|_{(1,1)}=(1+2\ln 2)(dx-dy)$.

【试题 166】（11-1.11） 设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$，则 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$ ______.

【难度】 本题的数学一难度值为 0.658，数学二、数学三的考生也应掌握此题.

【解析】

$$\frac{\partial F}{\partial x}=y\frac{\sin(xy)}{1+x^2y^2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=y\frac{y\cos(xy)(1+x^2y^2)-2xy^2\sin(xy)}{(1+x^2y^2)^2},$$

故 $$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=4.$$

【试题 167】（11-1.16;2.17） 设函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导，且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$. 求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

$g'(1)=0$

$z=f<\begin{matrix}1<\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\\2<\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\end{matrix}$

【难度】 本题的数学一难度值为 0.696，数学二难度值为 0.685，数学三的考生也应掌握此题.

【解析】

方法 1：因为 $z=f(xy,yg(x))$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+yg'(x)f_2',$$ 用不到x了，x可代入

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y\left[xf_{11}''+g(x)f_{12}''\right]+g'(x)f_2'+yg'(x)\left[xf_{21}''+g(x)f_{22}''\right].$$

由题可知 $g(1)=1$，$g'(1)=0$，所以

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1).$$

解法 2：由题可知 $g(1)=1$，$g'(1)=0$.

因为 $z=f(xy,yg(x))$，所以

$$\frac{\quad}{\partial x} = yf_1' + yg'(x)f_2'$$

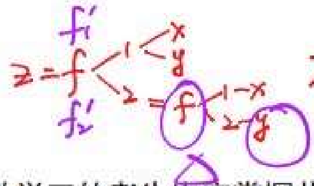
从而 $$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=1} = yf_1'(y,y)$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = \left\{f_1'(y,y) + y\left[f_{11}''(y,y) + f_{12}''(y,y)\right]\right\}\Big|_{y=1}$$

$$= f_1'(1,1) + f_{11}''(1,1) + f_{12}''(1,1).$$

【试题 168】(11-3.16) 已知函数 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，$f(1,1)=2$ 是 $f(u,v)$ 的极值，$z=f(x+y,f(x,y))$. 求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$



不能简写.

$\therefore f_1'(1,1)=0,\ f_2'(1,1)=0$

【难度】 本题的数学三难度值为 0.341，数学一、数学二的考生也应掌握此题.

【解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'(x+y,f(x,y))+f_2'(x+y,f(x,y))\cdot f_1'(x,y)$$

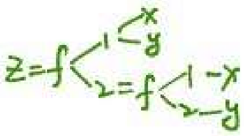
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''(x+y,f(x,y))+f_{12}''(x+y,f(x,y))\cdot f_2'(x,y)+f_{12}''(x,y)\cdot f_2'(x+y,f(x,y))$$

$$+f_1'(x,y)\left[f_{21}''(x+y,f(x,y))+f_{22}''(x+y,f(x,y))\cdot f_2'(x,y)\right].$$

由题意知 $f_1'(1,1)=0$，$f_2'(1,1)=0$，

从而 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=f_{11}''(2,2)+f_2'(2,2)f_{12}''(1,1)$.

【试题 168】(11-3.16) 已知函数 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，$f(1,1)=2$ 是 $f(u,v)$ 的极值，$z=f(x+y,f(x,y))$. 求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$



【难度】 本题的数学三难度值为 0.341，数学一、数学二的考生也应掌握此题.

解：$z_x'=f_1'(x+y,f(x,y))+f_2'(x+y,f(x,y))\cdot f_1'(x,y)$

$z_{xy}''=f_{11}''(x+y,f(x,y))+f_{12}''(x+y,f(x,y))\cdot f_2'(x,y)$

$+[f_{21}''(x+y,f(x,y))+f_{22}''(x+y,f(x,y))\cdot f_2'(x,y)]f_1'(x,y)$

$+f_{12}''(x,y)\cdot f_2'(x+y,f(x,y))$

$\because f(1,1)=2$ 是 $f(u,v)$ 的极值

$\therefore f_1'(1,1)=0,\ f_2'(1,1)=0$

$\therefore z_{xy}''|_{x=1,y=1}=f_{11}''(2,2)+f_{12}''(1,1)f_2'(2,2)$

【试题 169】(12-2.11) 设 $z=f(\ln x+\dfrac{1}{y})$，其中函数 $f(u)$ 可微，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ______.

【难度】 本题的数学二难度值为 0.829，数学一、数学三的考生也应掌握此题.

【解析】

$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot\frac{1}{x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)$，所以 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=f'-f'=0$.

【试题 170】（13-2.5） 设 $z=\frac{y}{x}f(xy)$，其中函数 f 可微，则 $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$

① $f(u)=1$ $z=\frac{y}{x}$, $z'_x=-\frac{y}{x^2}$ $z'_y=\frac{1}{x}$

(A) $2yf'(xy)$ ~~(B)~~ $-2yf'(xy)$ ~~(C)~~ $\frac{2}{x}f(xy)$ ~~(D)~~ $-\frac{2}{x}f(xy)$

② $f(u)=u$ $z=y^2$, $z'_x=0$, $z'_y=2y$

【难度】 本题的数学二难度值为 0.903，数学一、数学三的考生也应掌握此题.

【解析】

由 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f(xy)+\frac{y}{x}f'(xy)\cdot y=-\frac{y}{x^2}f(xy)+\frac{y^2}{x}f'(xy)$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}f(xy)+\frac{y}{x}f'(xy)\cdot x=\frac{1}{x}f(xy)+yf'(xy),$$

则

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{x}f(xy)+yf'(xy)+\frac{1}{x}f(xy)+yf'(xy)=2yf'(xy),$$

故选（A）.

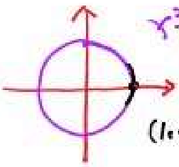
题型考点　多元隐函数求偏导

1.隐函数存在定理：$F(x,y,z)=0$

（1）若 $F_x'\neq 0$，则 $x=x(y,z)$；

（2）若 $F_y'\neq 0$，则 $y=y(x,z)$；

（3）若 $F_z'\neq 0$，则 $z=z(x,y)$.



$x^2+y^2=1$

$(1,0)$处，$x=x(y)$

$f(x,y)=x^2+y^2$

$f_x'(1,0)=2x|_{(1,0)}=2$

$f_y'(1,0)=2y|_{(1,0)}=0$

2.求偏导数

（1）直接求，把 z 看作 x,y 的函数；

（2）公式法：$z_x'=-\frac{F_x'}{F_z'},z_y'=-\frac{F_y'}{F_z'}$；

（3）全微分法（一阶微分形式不变性）

$\boxed{\text{【试题 171】（10-1.2;2.5）}}$ 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 F 为可微函数，且 $F_2'\neq 0$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$

取：$F(u,v)=u-v$

$\therefore F(\frac{y}{x},\frac{z}{x})=\frac{y}{x}-\frac{z}{x}=0$

$\therefore z=y$

$\therefore z_x'=0,\ z_y'=1$

$\therefore xz_x'+yz_y'=y=z$

（A）x.　　（B）z.

（C）$-x$.　　（D）$-z$.

【难度】 本题的数学一难度值为 0.688，数学二难度值为 0.610，数学三的考生也应掌握此题.

【解析】

方法 1：等式 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 两端对 x 求偏导,得

$$-\frac{y}{x^2}F_1'+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{1}{x}-z\frac{1}{x^2}\right)F_2'=0\,, \qquad ①$$

等式$F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$两端对$y$求偏导，得

$$\frac{1}{x}F_1'+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y}F_2'=0\,. \qquad ②$$

①$\times x^2$ + ②$\times xy$ 得

$$\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)F_2'=zF_2',$$

所以 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.即正确选项为（B）.

方法 2：取特例 $F(u,v)=u-v$，则 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=\frac{y}{x}-\frac{z}{x}=0$，即 $z=y$.

故 $\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial y}=1$，所以 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=y=z$，

排除选项（A）、（C）、（D），应选（B）.

【试题 172】（13-3.10） 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(z+y)^x=xy$ 确定，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$______.

【难度】 本题的数学三难度值为 0.453，数学一、数学二的考生也应掌握此题.

【解析】

将点 $(1,2)$ 代入方程得，$z(1,2)=0$.

对方程两边关于 x 求导，得

$$e^{x\ln(z+y)}\left[\ln(z+y)+\frac{xz_x'}{z+y}\right]=y,$$

将 $z(1,2)=0$ 代入，得

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=2(1-\ln 2).$$

【试题 173】（14-2.11） 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 确定的函数，则 $\left.dz\right|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=$________.

$e^{2yz}\cdot 2z\,dy+e^{2yz}\cdot 2y\,dz+dx+2y\,dy+dz=0$

$x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2},z=0$ 代入

【难度】 本题的数学二难度值为 0.466，数学一、数学三的考生也应掌握此题.

【解析】

由一阶微分形式不变性可知

$$e^{2yz}d(2yz)+dx+2ydy+dz=0,$$

即 $$2e^{2yz}(ydz+zdy)+dx+2ydy+dz=0,$$

解出 $$dz=-\frac{dx+2ydy+2e^{2yz}zdy}{2ye^{2yz}+1},$$

代入 $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2},z=0$ 得 $$dz|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{2}(dx+dy).$$