25考研 | 题型通法14笔记

第六章 二重积分（2）

题型考点 二重积分的计算

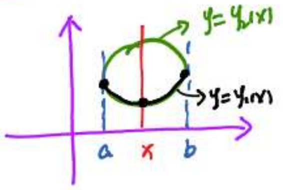
1.画 D； 描点.., 草纸

2.观察对称性； 普通对称，轮换对称

3.选择坐标系与积分次序；① X型.Y型 ② r型 θ型

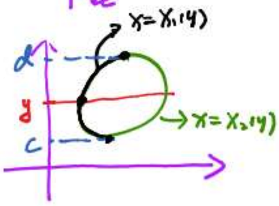
4.化成累次积分，并计算.

X型



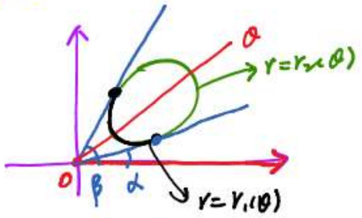
$I=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$

Y型



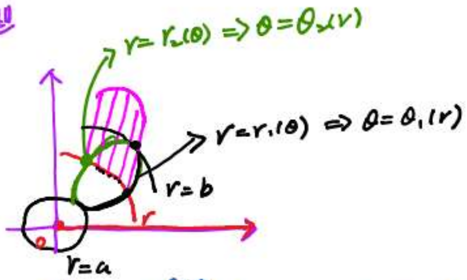
$I=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$

θ型



$I=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr$

r型



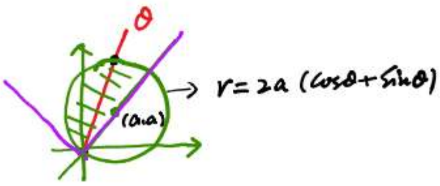
$\int_a^b r\,dr\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta$

【试题 187】（09-2.19;3.17） 计算二重积分 $\iint_D (x-y)\,dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,(x-1)^2+(y-1)^2\le 2, y\ge x\right\}$.

$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$

【难度】 本题的数学二难度值为 0.346，数学三难度值为 0.370，数学一的考生也应掌握此题.

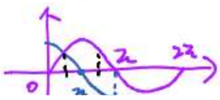
解：法1：原式 $=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta\int_0^{2(\cos\theta+\sin\theta)} r(\cos\theta-\sin\theta)\,r\,dr$



$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{8}{3}(\cos\theta+\sin\theta)^3\cdot(\cos\theta-\sin\theta)\,d\theta$

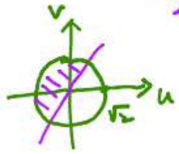
$(\cos\theta+\sin\theta)'=-\sin\theta+\cos\theta$

$=\frac{2}{3}(\cos\theta+\sin\theta)^4\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$



$= -\frac{8}{3}.$

法2：令 $x-1=u$，$y-1=v$，则 $D_{uv}=\{(u,v)\mid u^2+v^2\le 2,\ v\ge u\}$，$\underline{dxdy=dudv}$
平移



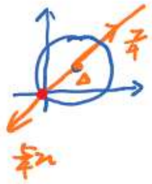
$\begin{cases} u = x+a \\ v = y+b \end{cases}$

$$原式 = \iint\limits_{D_{uv}} (u-v)\,dudv$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r(\cos\theta - \sin\theta)\, r\, dr$$

$$= \cdots = -\frac{8}{3}.$$

令 $x-1 = r\cos\theta$，$y-1 = r\sin\theta$，$\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{5}{4}\pi$

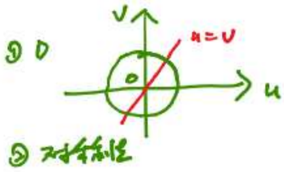


例解）［补例］ $D=\{(x,y)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}$，则 $\iint_D (x^2+y^2)\,d\sigma =$ ______.

解：令 $\frac{x}{a}=u$，$\frac{y}{b}=v$，则 $D_{uv}=\{(u,v)\mid u^2+v^2\le 1\}$，$dxdy = ab\,dudv$

$x=au$　　$y=bv$

$dx=a\,du$　　$dy=b\,dv$



则 原式 $=\iint_{D_{uv}} (a^2u^2+b^2v^2)\,ab\,dudv$

$=\iint_{D_{uv}} (a^2v^2+b^2u^2)\,ab\,dudv$

$=\frac{ab}{2}\iint_{D_{uv}} (a^2+b^2)(u^2+v^2)\,dudv$

$=\frac{ab}{2}(a^2+b^2)\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cdot r\,dr$

$=\frac{ab}{2}(a^2+b^2)\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}$

$=\frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2)$

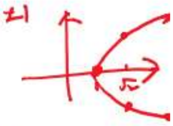
$x^2-y^2=1$

【试题 188】(10-3.16) 计算二重积分 $\iint_D (x+y)^3\,dxdy$，其中 D 由曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 及 $x-\sqrt{2}y=0$ 围成.

$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x$　　$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$

拐点：$x=1$时，$y=0$

$x=\sqrt{2}$时，$y=\pm 1$



【难度】 本题的数学三难度值为 0.346，数学一、数学二的考生也应掌握此题.

解：由对称性可知：

原式 $=\iint_D (x^3+3xy^2)\,dxdy+\iint_D (3x^2y+y^3)\,dxdy$

$=2\int_0^1 dy\int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}} (x^3+3xy^2)\,dx + 0$

$=\cdots$

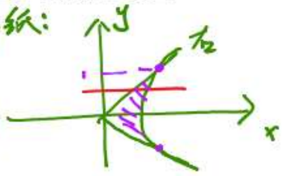
$=\frac{14}{15}.$

草纸：

① D

② 对称性

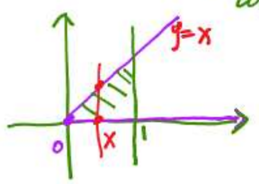
y



【试题 189】 (10-2.20) 计算二重积分 $I=\iint_D \underbrace{r^2\sin\theta}_{y}\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\,drd\theta$，其中 $D=\left\{(r,\theta)\middle|\,0\le r\le\sec\theta,0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$.

$\cos 2\theta = \cos^2\theta-\sin^2\theta$

$r=\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$　∴ $r\cos\theta=1$　∴ $x=1$



【难度】 本题的数学二难度值为 0.182，数学一、数学三的考生也应掌握此题

【难度】 本题的数学二难度值为 0.182，数学一、数学三的考生也应掌握此题.

解：记 $D_{xy}=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$，则
或 $0\le y\le 1,\ y\le x\le 1$

$$I=\iint\limits_{D_{xy}} y\sqrt{1-x^2+y^2}\,dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^x \sqrt{1-x^2+y^2}\,d(1-x^2+y^2)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2}{3}(1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^x\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\left[1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]dx$$

$$\xlongequal{x=\sin t}\frac{1}{3}\left[1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\cdot\cos t\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}.$$

① D
② 对称性
③ 坐标系：直
次序：y，X型

$(1-x^2+y^2)'_y=2y$

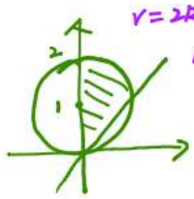
【试题 190】（11-2.13） 设平面区域 D 由直线 $y=x$，圆 $x^2+y^2=2y$ 及 y 轴所围成，则二重积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=$ ______.

【难度】 本题的数学二难度值为 0.364，数学一、数学三的考生也应掌握此题.

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} r\cos\theta \cdot r\sin\theta \cdot r\,dr$$

$r=2R\sin\theta.$

$R=1$



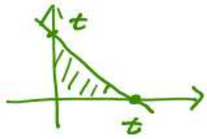
$$=\cdots=\frac{7}{12}.$$

【试题 191】（11-3.19） 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 具有连续导数，$f(0)=1$，且满足

$y=t-x$

$$\iint\limits_{D_t} f'(x+y)dxdy=\iint\limits_{D_t} f(t)dxdy,\ D_t=\{(x,y)|0\le y\le t-x,0\le x\le t\}(0<t\le 1).$$

求 $f(x)$ 的表达式.



【难度】 本题的数学三难度值为 0.285，数学一、数学二的考生也应掌握此题.

解：$\iint\limits_{D_t} f'(x+y)\,dxdy=\int_0^t dx\int_0^{t-x} f'(x+y)\,dy$　　$dy=d(y+x)$，x为常数

$$=\int_0^t \left(f(x+y)\Big|_0^{t-x}\right)dx$$

$$=\int_0^t [f(t)-f(x)]\,dx$$

$$=tf(t)-\int_0^t f(x)\,dx$$

$$\iint\limits_{D_t} f(t)\,dxdy=f(t)\cdot\frac{1}{2}t^2$$

$\therefore\ tf(t)-\int_0^t f(x)\,dx=\frac{t^2}{2}f(t)$　　含变限积分的方程 $\begin{cases}\text{初值}\\ \text{求导.}\end{cases}$

对t求导得：

$$f(t)+tf'(t)-f(t)=tf(t)+\frac{t^2}{2}f'(t)$$

$$\therefore\ \left(1-\frac{t}{2}\right)f'(t)=f(t)$$

$$\therefore\ \frac{df(t)}{f(t)}=\frac{2}{2-t}\,dt\qquad\left(\frac{f'(t)}{f(t)}=\frac{2}{2-t}\right)$$

积分得：$\ln|f(t)|=-2\ln|2-t|+\ln C$

$$\therefore f(t)=\frac{C}{(2-t)^2}$$

$\because f(0)=1 \quad \therefore c=4 \quad \therefore f(t)=\frac{4}{(2-t)^2}$

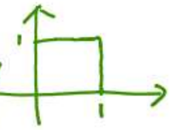
$$\therefore f(x)=\frac{4}{(2-x)^2}, \quad 0 \le x \le 1$$

【试题 192】(11-1.19;2.21) 已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0$，$f(x,1)=0$，$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=a$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$，计算二重积分 $I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy$.

① D

② 交换积分次序

③ 坐标系



【难度】 本题的数学一难度值为 0.284，数学二难度值为 0.259，数学三的考生也应掌握此题.

解：$I=\int_0^1 dx \underline{\int_0^1 xy f''_{xy}\, dy}$ → 含抽象函数的积分 用分部积分

其中：$\int_0^1 xy f''_{xy}\, dy = \int_0^1 xy\, d f'_x$

$= xy f'_x \big|_0^1 - \int_0^1 x f'_x\, dy$

$= x f'_x(x,1) - \int_0^1 x f'_x\, dy$

$\because f(x,1) = f(x,y)\big|_{y=1} = 0$

$\therefore f'_x(x,1) = \dfrac{d f(x,1)}{dx} = 0$

$\therefore \int_0^1 xy f''_{xy}\, dy = -\int_0^1 x f'_x\, dy$

$\therefore I = -\int_0^1 dx \int_0^1 x f'_x\, dy = -\int_0^1 dy \underline{\int_0^1 x f'_x\, dx}$

其中：$\int_0^1 x f'_x\, dx = \int_0^1 x\, d f(x,y)$

$= x f(x,y)\big|_0^1 - \int_0^1 f(x,y)\, dx$

$= f(1,y) - \int_0^1 f(x,y)\, dx$

$= -\int_0^1 f(x,y)\, dx$

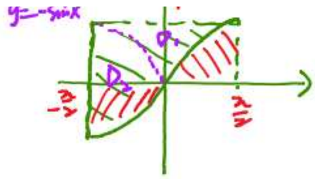
$\therefore I = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\, dx = \iint\limits_D f(x,y)\, dxdy = a.$

【试题 193】 (12-2.6) 设区域 D 由曲线 $y=\sin x$，$x=\pm\dfrac{\pi}{2}$，$y=1$ 围成，则

$\iint\limits_D (x^5 y-1)dxdy=$ $\iint\limits_{D_1} x^5 y\, dxdy + \iint\limits_{D_2} x^5 y\, dxdy - S_D = 0+0-\pi = -\pi$

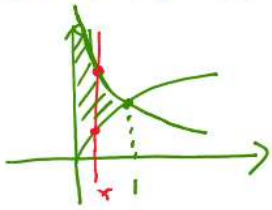
(A) π (B) 2 (C) -2 (D) $-\pi$ ✓

【难度】 本题的数学二难度值为 0.622，数学一、数学三的考生也应掌握此题.



【试题 194】(12-3.16) 计算二重积分 $\iint e^{x}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是以曲线 $y=\sqrt{x}, y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴为边界的无界区域.

【难度】 本题的数学三难度值为 0.585，数学一、数学二的考生也应掌握此题.



解：原式 $=\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}} e^x xy\, dy$

$=\int_0^1 \frac{1}{2}e^x x\left(\frac{1}{x}-x\right) dx$

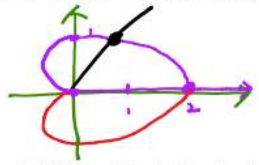
$=\frac{1}{2}\int_0^1 e^x(1-x^2)\, dx$

$=\cdots$

$=\frac{1}{2}.$

【试题 195】（12-2.18） 计算二重积分 $\iint\limits_D xy\,d\sigma$，其中区域 D 由曲线 $r=1+\cos\theta(0\le\theta\le\pi)$ 与极轴围成.

心形线



$\theta=0,\ r=2$
$\theta=\frac{\pi}{2},\ r=1$
$\theta=\pi,\ r=0$

$x^2+y^2=\sqrt{x^2+y^2}+x$

【难度】 本题的数学二难度值为 0.440，数学一、数学三的考生也应掌握此题.

解：原式 $=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{1+\cos\theta}r^2\cos\theta\sin\theta\cdot r\,dr$

$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta(1+\cos\theta)^4\,d\theta$ $\quad (1+\cos\theta)'=-\sin\theta$

$=-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\left[(1+\cos\theta)^5-(1+\cos\theta)^4\right]d(1+\cos\theta)$

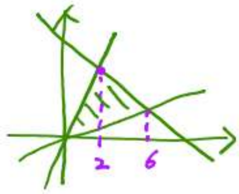
$=-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{6}(1+\cos\theta)^6-\frac{1}{5}(1+\cos\theta)^5\right]\Big|_0^{\pi}$

$=\frac{16}{15}.$

【试题 196】（13-2.17;3.17） 设平面区域 D 由直线 $x=3y$，$y=3x$，$x+y=8$ 围成，求 $\iint\limits_D x^2dxdy$.

【难度】 本题的数学二难度值为 0.650，数学三难度值为 0.677，数学一的考生也应掌握此题.

解：原式 $=\int_0^2dx\int_{\frac{1}{3}x}^{3x}x^2dy+\int_2^6dx\int_{\frac{1}{3}x}^{8-x}x^2dy$



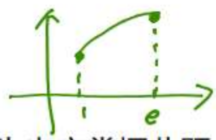
$=\cdots$

$=\frac{416}{3}.$

【试题 197】（13-2.21） 设曲线 L 的方程为 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x(1\le x\le e)$.

（Ⅰ）求 L 的弧长；

（Ⅱ）设 D 是由曲线 L，直线 $x=1$，$x=e$ 及 x 轴所围平面图形，求 D 的形心的横坐标.



【难度】 本题的数学二难度值为 0.424，数学一的考生也应掌握此题，数学三的考试大纲对平面曲线弧长和形心坐标不作要求，但建议数学三的考生了解形心公式，便于快速求解某些二重积分的计算题.

解：(1) $L=\int_1^e\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_1^e\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx$

$$=\int_1^e\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)dx=\cdots=\frac{e^2+1}{4}$$

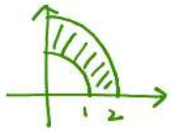
(2) $$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\,d\sigma}{\iint\limits_D 1\,d\sigma}=\frac{\int_1^e dx\int_0^{\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x}x\,dy}{\int_1^e dx\int_0^{\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x}1\,dy}$$

$$=\cdots$$

$$=\frac{3(e^2+1)(e^2-3)}{4(e^3-7)}$$

【试题 198】(14-2.17;3.16) 设平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\right\}$，计算 $\iint\limits_D \dfrac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

1. D
2. 对称性
3. ...
4. ...



【难度】 本题的数学二难度值为 0.532，数学三难度值为 0.501，数学一的考生也应掌握此题.

解：由对称性可知：

$$原式 = \iint\limits_D \frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_D\left[\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}+\frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\right]dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_D \sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})\,dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2 \sin(\pi r)\, r\,dr \quad \left(= \frac{1}{2}\int_1^2 r\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\pi r)\,d\theta\right.$$

$$= \cdots$$

$$= -\frac{3}{4}.$$

法2：

$$原式 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2\frac{r\cos\theta}{r\cos\theta+r\sin\theta}\cdot\sin(\pi r)\cdot r\,dr$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta\cdot\int_1^2\sin(\pi r)\cdot r\,dr$$

其中：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta \xlongequal{\theta=\frac{\pi}{2}-t} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4}.$$

$$\int_1^2\sin(\pi r)\cdot r\,dr = \cdots$$

题型考点　二重积分交换积分次序

1.题干提示交换积分次序或坐标系；

2.被积函数直接积分不好算时，一般需要交换积分次序或坐标系；

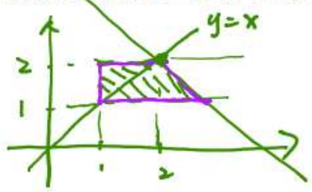
3.对累次积分求导，后半部分有求导变量时，一般需要交换积分次序或坐标系.

【试题 199】(09-2.4) 设函数 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_1^2 dx\int_x^2 f(x,y)dy+\int_1^2 dy\int_y^{4-y} f(x,y)dx=$

(A) $\int_1^2 dx\int_1^{4-x} f(x,y)dy$.　　(B) $\int_1^2 dx\int_x^{4-x} f(x,y)dy$.

(C) $\int_1^2 dy\int_1^{4-y} f(x,y)dx$.　　(D) $\int_1^2 dy\int_y^2 f(x,y)dx$.

【难度】 本题的数学二难度值为 0.815，数学一、数学三的考生也应掌握此题.



$x=4-y$ $\therefore x+y=4$

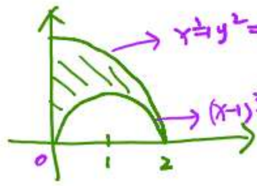
【试题 200】 (12-3.3) 设函数 $f(t)$ 连续，则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{2}f(r^2)r\mathrm{d}r=$

$=r$

(A) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$ (B) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$

(C) $\int_0^2\cancel{\mathrm{d}y}\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x$ (D) $\int_0^2\cancel{\mathrm{d}y}\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x$

【难度】 本题的数学三难度值为 0.619，数学一、数学二的考生也应掌握此题.



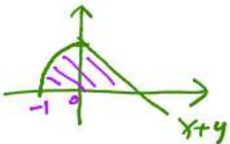
$x^2+y^2=4$ $\therefore y=\sqrt{4-x^2}$

$(x-1)^2+y^2=1$ $\therefore y=\sqrt{2x-x^2}$

【试题 201】 (14-1.3) 设 $f(x,y)$ 是连续函数，则 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x=$

(A) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x-1}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$. ×

(B) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0}f(x,y)\mathrm{d}y$.



$x+y=1$

$\therefore r\cos\theta+r\sin\theta=1$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$. $\therefore r=\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$

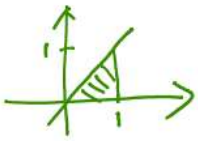
(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.

【难度】 本题的数学一难度值为 0.809，数学二、数学三的考生也应掌握此题.

【试题 202】 (14-3.12) 二次积分 $\int_0^1dy\int_y^1\left(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2}\right)dx=$______.

【难度】 本题的数学三难度值为 0.320，数学一、数学二的考生也应掌握此题.

解：原式 $=\int_0^1dy\int_y^1\frac{e^{x^2}}{x}dx-\int_0^1dy\int_y^1e^{y^2}dx$



$=\int_0^1dx\int_0^x\frac{e^{x^2}}{x}dy-\int_0^1(1-y)e^{y^2}dy$

$=\int_0^1e^{x^2}dx-\int_0^1e^{y^2}dy+\int_0^1ye^{y^2}dy$

$$= \frac{1}{2}e^{y^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$$

15：无穷级数 （数一、三）

16：空间几何、方向导数，

17：二重积分、曲线积分

18：曲面积分。

数一

单取一节

各取一节