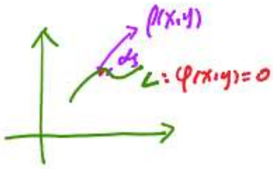
25考研 | 题型通法18笔记

第九章 多元函数积分学02（仅数一）

题型考点 第一类曲线积分的计算

一、概念

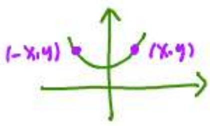


$dm=\rho(x,y)\,ds$

$m=\int_L \rho(x,y)\,ds$ （$x=x(y)$；$y=y(x)$） 边界方程可代入

二、性质

1.普通对称性



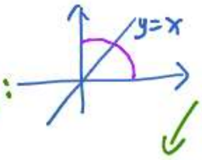
L关于y(x)轴对称，x(y)也具有对称性，$\int_L \rho(x,y)\,ds$ 关于x(y)偶倍奇0.

2.轮换对称性

$I=\int_{L_{xy}}\rho(x,y)\,ds=\int_{L_{yx}}\rho(y,x)\,ds$

若 $L_{xy}=L_{yx}$，则 $I=\frac{1}{2}\int_{L_{xy}}[\rho(x,y)+\rho(y,x)]\,ds$

例：



$L=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$

$L_{yx}=\quad y^2+x^2=1\quad y\geq 0\quad x\geq 0$

$I=\int_L x^2\,ds=\frac{1}{2}\int_L(x^2+y^2)\,ds=\frac{1}{2}\int_L 1\,ds=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 2\pi=\frac{\pi}{4}.$

三、计算（参数法） $L:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$

(1) $\int_L f(x,y)ds=\begin{cases}\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2}\,dx \Leftarrow \begin{cases}x=x\\ y=y(x)\end{cases}\\ \int_c^d f(x(y),y)\sqrt{1+x'^2}\,dy \Leftarrow \begin{cases}x=x(y)\\ y=y\end{cases}\end{cases}$

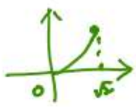
☆ (2) $\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$

(3) $\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(r\cos\theta,r\sin\theta)\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta \Leftarrow \begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta\\ y=r(\theta)\sin\theta\end{cases}$

【试题 230】(09-1.11) 已知曲线 $L:y=x^2\left(0\leq x\leq\sqrt{2}\right)$，则 $\int_L xds=$__________.

【难度】 本题的数学一难度值为 0.447.

①画L
②对称性



解：原式 $=\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{1+4x^2}\,dx$

③ 计算

$$= \int_0^{\sqrt{2}} x \cdot \sqrt{1+4x^2}\, dx$$

$$= \cdots = \frac{13}{6}.$$

第一类·空间曲线积分：参数法，

例：$\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$ 参数化 $\begin{cases} x= \\ y= \\ z= \end{cases}$

① 沿 z 轴过 Γ 的柱面：$x^2+y^2=1$

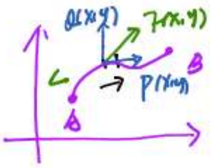
② 柱面参数化：$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$ $\theta\in[0,2\pi]$ 或 $[-\pi,\pi]$

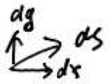
③ $\therefore z=x^2+y^2=1$

综上：$\Gamma: \begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \\ z=1 \end{cases}$

题型考点　第二类曲线积分

一、概念

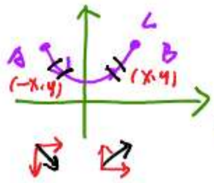




$I=\int_L pdx+Qdy$

二、性质

1)

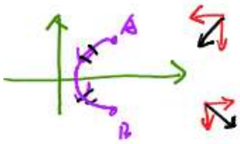


L关于y轴对称，x坐标具有对称性.

dx同向：① $\int_L P(x,y)dx$，P(x,y)关于x偶倍奇0

dy $\boxed{\text{反向}}$ ② $\int_L Q(x,y)dy$，Q(x,y)关于x $\boxed{\text{偶0奇倍}}$.

2)



dx反向：关于y 偶0奇倍

dy同向： 偶倍奇0.

三、计算

（1）直接法（参数法）

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{\alpha}^{\beta}[P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]dt$$

β 终点. α 起点.

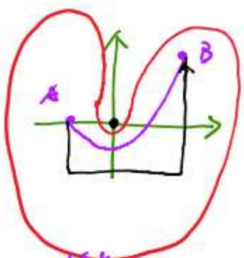
（2）间接法

①积分与路径无关（P、Q在$\boxed{\text{单连通区域}D}$内连续）

$\Leftrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$；

$P(x,y)=\dfrac{\cdots}{x^2+y^2}$

$Q(x,y)=\dfrac{\cdots}{x^2+y^2}$



$\Leftrightarrow Pdx+Qdy$为某函数的全微分；

$\Rightarrow \int_L pdx+Qdy=u(x,y)\Big|_{起点}^{终点}$

$\Leftrightarrow Pdx+Qdy=0$为全微分方程；

$\Leftrightarrow \oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$；

$\Leftrightarrow P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}$为某函数的梯度.

②格林公式（①封闭、②连续、③正向）

挖点.(分割)

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

③原函数法（$df(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$）

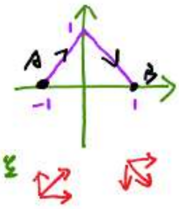
③原函数法（$df(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$）

$$\int_A^B P(x,y)dx+Q(x,y)dy=f(x,y)\Big|_A^B.$$

【试题 231】（10-1.11） 已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x|\left(x\in[-1,1]\right)$，起点是 A $(-1,0)$，终点为 B $(1,0)$，则曲线积分 $I=\int_L xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=$ __0__.

【难度】 本题的数学一难度值为 0.588.

解法1：①画图



方向坐标具有对称性

②对称性

dx同向，$\int_L xy\,dx$ 关于 x 奇 0

dy反向，$\int_L x^2\,dy$ 关于 x 偶 0

解法2：
$\begin{cases} x=x \\ y=1-|x| \end{cases}$

$$原式=\int_{-1}^0[x(1+x)+x^2]dx+\int_0^1[x(1-x)-x^2]dx=\cdots=0.$$

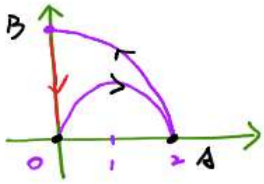
方法3: $I=\int_{L+\overrightarrow{BO}}-\int_{\overrightarrow{BO}}$

$=\iint\limits_{D}(2x-x)\,dxdy-\int_{\overrightarrow{BO}}x\overset{0}{y}\,dx$

$=0-0=0.$

【试题 232】（12-1.19） 已知L是第一象限中从点$(0,0)$沿圆周$x^2+y^2=2x$到点$(2,0)$，再沿圆周$x^2+y^2=4$到点$(0,2)$的曲线段，计算曲线积分

$$I=\int_L 3x^2y\,dx+(x^3+x-2y)\,dy.$$



【难度】 本题的数学一难度值为 0.557.

解: 记 $A(2,0)$, $B(0,2)$, $O(0,0)$

$D=\{(x,y)\mid \sqrt{2x-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2},\ 0\le x\le 2\}$ X型.

$I=\int_{L+\overrightarrow{BO}}-\int_{\overrightarrow{BO}}$

$=\iint\limits_{D}\underbrace{[(3x^2+1)-3x^2]}_{(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})}\,dxdy-\int_{\overrightarrow{BO}}(x^3+x-2y)\,dy$

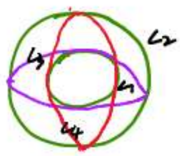
$=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2-\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 1^2-\int_2^0(-2y)\,dy$

$=\frac{\pi}{2}-4.$

【试题 233】（13-1.4） 设$L_1: x^2+y^2=1$，$L_2: x^2+y^2=2$，$L_3: x^2+2y^2=2$，$L_4: 2x^2+y^2=2$为四条逆时针方向的平面曲线，记

$$I_i=\int_{L_i}\left(y+\frac{y^3}{6}\right)dx+\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)dy\ (i=1,2,3,4),$$

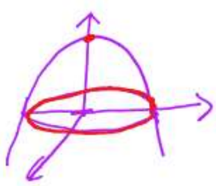
则$\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=$



(A) I_1　　(B) I_2　　(C) I_3　　(D) I_4

【难度】 本题的数学一难度值为 0.268.

$I_i=\iint\limits_{D_{L_i}}\left[(2-x^2)-\left(1+\frac{y^2}{2}\right)\right]dxdy=\iint\limits_{D_{L_i}}\left(1-x^2-\frac{y^2}{2}\right)dxdy$



被积函数均大于0时,最大.

$1-x^2-\frac{y^2}{2}\ge 0$

$x^2+\frac{y^2}{2}\le 1$

【试题 234】（14-1.12） 设L是柱面$x^2+y^2=1$与平面$y+z=0$的交线，从z轴

[illegible]

正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L z\mathrm{d}x + y\mathrm{d}z =$ ______.

z轴

【难度】 本题的数学一难度值为 0.303.

方法1：参数法：$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \\ z=-\sin\theta \end{cases}$ θ 从 $-\pi$ 到 π.
$0 \quad 2\pi$

$$\text{原式} = \int_{-\pi}^{\pi}\left[(-\sin\theta)^2 - \sin\theta\cos\theta\right]d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\theta\, d\theta - \int_{-\pi}^{\pi}\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$= \pi - 0 = \pi$$

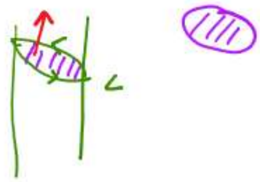
方法2：Σ 为：$\begin{cases} y+z=0 \\ x^2+y^2\le 1 \end{cases}$ 的上侧

$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x \cdots$

① $\int_{-\pi}^{\pi}$（两两相乘）$dx = 0$

② $\int_{-\pi}^{\pi}$（一个的平方）$dx = \pi$

③ $\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\, dx = 2\pi$.



由斯托克斯公式可知：

$$原式=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dxdz & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & 0 & y \end{vmatrix}=\iint_{\Sigma} dydz-(-1)dxdz \quad dx \quad dy \quad dz$$

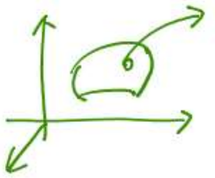
$$=\iint_{\Sigma}(1,1,0)\cdot\overset{(-z'_x,-z'_y,1)}{(0,1,1)}\,dxdy$$

$$=\iint_{\Sigma} dxdy$$

$$=+\iint_{x^2+y^2\le 1} dxdy=\pi.$$

题型考点　第一类曲面积分

一、概念



$$dm=\rho(x,y,z)\,dS$$

$$m=\iint_{\Sigma}\rho(x,y,z)\,dS$$

二、性质

1.普通对称性

(1) Σ关于 yoz 面对称，x 坐标具有对称性，关于 x 偶倍奇0

(2) 　xoz 　y 　y

(3) 　xoy 　z 　z

2.轮换对称性

$$I=\iint_{\Sigma_{xyz}}\rho(x,y,z)\,dS=\iint_{\Sigma_{yzx}}\rho(y,z,x)\,dS=\iint_{\Sigma_{zxy}}\rho(z,x,y)\,dS$$

若 $\Sigma_{xyz}=\Sigma_{yzx}=\Sigma_{zxy}$，则

$$I=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma}\left[\rho(x,y,z)+\rho(y,z,x)+\rho(z,x,y)\right]dS$$

例：$\Sigma=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1,\ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$

$$I=\iint_{\Sigma}x^2\,dS=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,dS$$

$$=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma}1\,dS=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot 4\pi=\frac{\pi}{6}.$$

三、计算

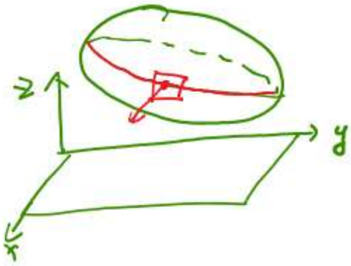
一投、二代、三计算 $dS=\begin{cases}\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy\\ \sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}\,dydz\\ \sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\,dxdz\end{cases}$

$\sqrt{1+(f_x')^2+(f_z')^2}\,dxdz$

【试题 235】（10-1.19） 设P为椭球面$S: x^2+y^2+z^2-yz=1$的动点，若S在点P处的切平面与xOy面垂直，求点P的轨迹C．并计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{\left(x+\sqrt{3}\right)|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S$$，其中Σ是椭球面S位于曲线C上方的部分．

【难度】 本题的数学一难度值为 0.228.



解：① 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-yz-1$，则

S的法向量 $\vec{n}=(F_x', F_y', F_z')=(2x, 2y-z, 2z-y)$

∵ P处的切平面与xOy垂直

∴ $\vec{n}\perp\vec{k}$ 即 $(2x, 2y-z, 2z-y)\cdot(0,0,1)=2z-y=0$

∴ C的方程 $\begin{cases}2z-y=0\\ x^2+y^2+z^2-yz-1=0\end{cases}$

② C在xOy面上的投影方程为：

$x^2+y^2+\frac{y^2}{4}-\frac{y^2}{2}=x^2+\frac{3}{4}y^2=1$

$$dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{2x}{y-2z}\right)^2+\left(\frac{2y-z}{y-2z}\right)^2}\,dxdy$$

$$=\frac{\sqrt{4x^2+5y^2+5z^2-8yz}}{|y-2z|}\,dxdy$$

$$=\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|y-2z|}\,dxdy$$

$$\therefore I=\iint\limits_{x^2+\frac{3}{4}y^2\le 1}(x+\sqrt{3})\,dxdy$$

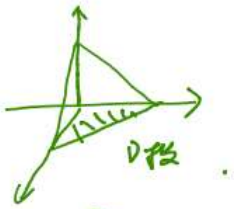
$$=\iint\limits_{x^2+\frac{3}{4}y^2\le 1}x\,dxdy+\iint\limits_{x^2+\frac{3}{4}y^2\le 1}\sqrt{3}\,dxdy$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

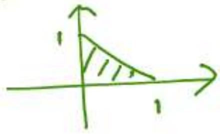
$$S=\pi ab$$

$$=0+\sqrt{3}\cdot\pi\cdot 1\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=2\pi.$$

【试题 236】（12-1.12） 设$\Sigma=\{(x,y,z)\,|\,x+y+z=1,x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0\}$，则$\iint\limits_{\Sigma}y^2dS=$________.



【难度】 本题的数学一难度值为 0.412.



解：$\text{原式}=\iint\limits_{D_{xy}}y^2\cdot\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,dxdy$

$$=\sqrt{3}\int_0^1dy\int_0^{1-y}y^2dx$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1(1-y)y^2dy$$

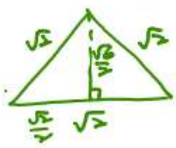
$$=\frac{\sqrt{3}}{12}.$$

改：$\iint\limits_{\Sigma}(y^2+2xz)\,dS=$________

$$=\iint\limits_{\Sigma}y^2dS+\iint\limits_{\Sigma}2xz\,dS\quad y\to x$$

$$=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,dS+\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}(2xz+2yz+2xy)\,dS$$

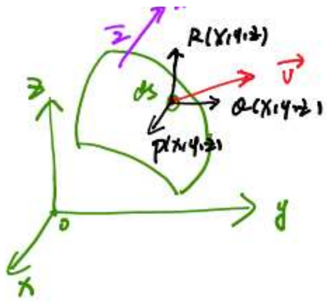
$$=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)^2dS$$



$$=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}1^2dS=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

题型考点 第二类曲面积分的计算

一、概念



$d\Phi = P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy$

$\therefore \Phi = \iint_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy$

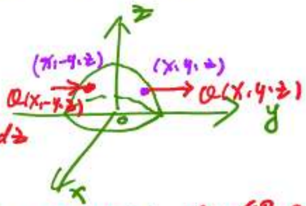
二、性质

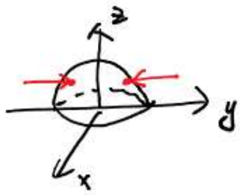
(1) 若Σ关于yoz面对称，则x坐标具有对称性

x轴流量特殊，关于x偶0奇倍

(2) 若Σ关于xoz面对称，则y坐标具有对称性.

y轴流量特殊，关于y偶0奇倍





$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\,dxdz$

若$Q(x,-y,z) = Q(x,y,z)$，则偶0.

若$Q(x,-y,z) = -Q(x,y,z)$，则奇倍.

(3) 若Σ关于xoy面对称，则z坐标具有对称性.

z轴流量特殊，关于z偶0奇倍

三、计算

（1）直接法：

①一投、二代、三定号；

②轮换投影法

$$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \begin{cases} \iint\limits_{\Sigma} (P,Q,R)\cdot(-z'_x,-z'_y,1)dxdy \\ \iint\limits_{\Sigma} (P,Q,R)\cdot(1,-x'_y,-x'_z)dydz \\ \iint\limits_{\Sigma} (P,Q,R)\cdot(-y'_x,1,-y'_z)dxdz \end{cases}$$

（2）高斯公式（封闭、连续、外侧）：

（挖去补）

$$\oiint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_{\Omega_\Sigma}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$$

【试题 237】（09-1.19） 计算曲面积分 $I = \oiint\limits_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，其中 Σ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

【难度】 本题的数学一难度值为 0.256.

解：记 $P(x,y,z) = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$Q(x,y,z) = \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$R(x,y,z) = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

Σ_0 为 $x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$（$\varepsilon>0$，足够小）的内侧

$\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \geq \varepsilon^2,\ 2x^2+2y^2+z^2 \leq 4\}$

$\therefore \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} = \cdots\cdots = 0$

改：计算 $I = \cdots\cdots$，

其中，Σ 是 $z=\sqrt{4-2x^2-2y^2}$ 的上侧

方法1：

②

由高斯公式可知：

方法2：$I = \frac{1}{2}$（237题）

$I = \iint\limits_{\Sigma+\Sigma_0} - \iint\limits_{\Sigma_0}$

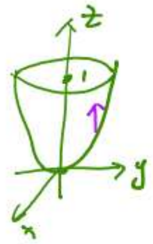
$= \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV - \frac{1}{\varepsilon^3}\iint\limits_{\Sigma_0} xdydz + ydxdz + zdxdy$

$$= 0 + \frac{\;}{\varepsilon^3}\iiint_{V_{\varepsilon_0}} (1+1+1)\,dV$$

$$= \frac{3}{\varepsilon^3}\cdot\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3 = 4\pi.$$

【试题 238】（14-1.18） 设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2\left(z\le 1\right)$ 的上侧，计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x-1)^3\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ .$$



【难度】 本题的数学一难度值为 0.391.

解：记 $\Sigma_0=\begin{cases} z=1 \\ x^2+y^2\le 1\end{cases}$ 下侧，则

$$I=\iint_{\Sigma+\Sigma_0}-\iint_{\Sigma_0}$$

$$=-\iiint_{\Omega_{\Sigma+\Sigma_0}}\left[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1\right]dV-\iint_{\Sigma_0}(z-1)\,dxdy$$

$$=-\iiint_{\Omega_{\Sigma+\Sigma_0}}(3x^2+3y^2+7)\,dV+\iiint_{\Omega_{\Sigma+\Sigma_0}}6x\,dV+\iiint_{\Omega_{\Sigma+\Sigma_0}}6y\,dV-0$$

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\,dr\int_{r^2}^1(3r^2+7)\,dz+0+0$$

$$=-4\pi.$$

题型考点 空间曲线积分

（1）参数法

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz=\int_\alpha^\beta\left[P(t)x'(t)+Q(t)y'(t)+R(t)z'(t)\right]dt$$

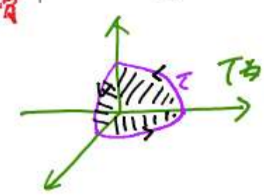
（2）斯托克斯公式（封闭，连续，右手准则）

+轮换投影（向量点乘）

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix} dydz & dxdz & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R\end{vmatrix}=\iint_\Sigma\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R\end{vmatrix}dS$$

Σ

分片光滑



T为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 在第1卦限部分与坐标面的交线

【试题 239】（11-1.12） 设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L xz\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\frac{y^2}{2}\mathrm{d}z=$______.

【难度】 本题的数学一难度值为 0.286.

法1：L的参数方程为: $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \\ z=\cos\theta+\sin\theta \end{cases}$ θ从0到2π 或$-\pi$到π.

$$\text{则 } I=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta)\sin\theta+\cos^2\theta+\frac{1}{2}\sin^2\theta(-\sin\theta+\cos\theta)\right]d\theta$$

$$=\cdots=\pi.$$

法2: $\Sigma=\begin{cases} z=x+y \\ x^2+y^2\le 1\end{cases}$ 的上侧，Σ的法向量 $\vec{n}=(-1,-1,1)$，单位化$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & x & \frac{y^2}{2}\end{vmatrix}dS=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(1-x-y)\,dS$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{x^2+y^2\le 1}(1-x-y)\cdot\sqrt{1+1^2+1^2}\,dxdy$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}1\,dxdy-0-0$$

$$=\pi.$$

法3: 降维: $I=\oint_{x^2+y^2=1}x(x+y)\,dx+x\,dy+\frac{y^2}{2}\,d(x+y)$

$=\cdots$ 格林公式 $=\pi.$