

25考研 | 题型通法19笔记



第一章 行列式

题型考点 数值型行列式的计算

1. 行列式的定义

- (1) 取数相乘 (2) 冠以符号 (3) 全部相加 $n!$

不同行(列)

“大前小后”
连序数

2. 特殊行列式

- (1) 行和相等加列，列和相等加行

- ★(2) “么”型行列式：按“么”的横展开，展开后，关注对称线元素。

- (3) “爪”型行列式：用中间的爪，消去一个侧爪

- (3分)(4) “梭”型行类似：按第一行展开得递推关系，解~~差分~~方程或化简数列

(3分)(5) 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = (x_n - x_1)(x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

3. 一般行列式：

化简 降阶

- (1) 边化0，边展开

- (2) 计算特征值时，化0，提公因子，展开

$$M_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$$

- ★4. 代数余子式之和： M_{ij} 余子式 A_{ij} 代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

- (1) 把相应的行或列，替换成代数余子式的系数

$$A_{11} + A_{21} + \cdots + A_{n1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- (2) 伴随矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$AA^* = |A|E$$

$$\therefore A^* = |A|A^{-1}$$

5. 分块矩阵的行列式

$$(1) \begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$(2) \begin{vmatrix} O & A_m \\ B_n & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A_m \\ B_n & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A_m \\ B_n & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A||B|$$

例： $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ ，求 $A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $k=1, 2, \dots, n$

解： $|A| = (-1)^{n-1} n! \neq 0 \therefore A$ 可逆

$$\therefore A^* = |A|A^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\swarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} n! \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A_{k1} + A_{k2} + \cdots + A_{kn} = (-1)^{n-1} n! \cdot \frac{1}{k}, \quad k=1, 2, \dots, n.$$

【试题 240】 (21-2.16; 3.15) 多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为 -5.

考点: 行列式的定义
方法: 三步曲

$$\begin{aligned} & (-1)^{\text{奇}} x \cdot 1 \cdot x \cdot x + (-1)^{\text{奇}} 2x \cdot x \cdot x \cdot 2 \\ \text{则: } & \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 3 & 4 \\ \hline & & & \end{array} & \begin{array}{cccc} & & 4 & 2 & 3 & 1 \\ \hline & & & & & \end{array} \end{aligned}$$

$$= -x^3 - 4x^3 = -5x^3$$

【试题 241】 (14-1.5;2.7;3.5)

行列式
$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$$

(A) $(ad-bc)^2$. (B) $-(ad-bc)^2$.

(C) $a^2d^2-b^2c^2$. (D) $b^2c^2-a^2d^2$.

考点: 行列式计算

注意: ① 分块.

② 展开 (0 比较多)

【难度】 本题的数学一难度值为 0.623, 数学二难度值为 0.608, 数学三难度值为

0.607.

【解析】

方法 1: 按第一列展开得

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -a \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & d & 0 \end{vmatrix} \\ = -ad(ad-bc) + cb(ad-bc) = -(ad-bc)^2$$

方法 2: 交换第二、三行, 然后交换第一、三列得:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a & 0 & 0 \\ d & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -(ad-bc)^2$$

应选 B.

【试题 242】 (15-1.13)

n 阶行列式
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

“么”型.

【解析】

方法 1: 按最后一列展开得

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+2} 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \\ = 2 \cdot (-1)^{n-2}$$

$$+ \cdots + (-1)^{n-1} 2 \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2 = \frac{2-2^{n+1}}{1-2}$$

方法 2: 第 1 行乘以 $\frac{1}{2}$ 加到第 2 行, 再把第 3 行乘以 $\frac{1}{2}$ 加到第 4 行, 以此类推可得:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 2+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2+1+\cdots+\frac{1}{2^{n-3}} \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2+1+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}} \end{vmatrix}$$

$$= 2^{n-1} \left(2+1+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}} \right)$$

$$= 2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2$$

$$= 2^{n+1} - 2$$

方法 3: 记 $D_n =$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \end{vmatrix}_n$$

, 按第 1 列展开得

$$D_n = 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}_{n-1} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}_{n-1} = 2D_{n-1} + 2,$$

所以 $D_n + 2 = 2(D_{n-1} + 2)$, 从而 $D_n + 2 = 2^{n-2}(D_2 + 2)$.

因为 $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6$, 所以 $D_n + 2 = 2^{n-2} \cdot 8 = 2^{n+1}$, 即 $D_n = 2^{n+1} - 2$.

$$\begin{aligned} D_n &= 2D_{n-1} + 2 \\ 2D_{n-1} &= 2^2 D_{n-2} + 2^2 \\ 2^2 D_{n-2} &= 2^3 D_{n-3} + 2^3 \\ &\vdots \\ 2^{n-2} D_2 &= 2^{n-1} D_1 + 2^{n-1} \\ \therefore D_n &= 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n+1} D_1 \\ &= 2 + 2^2 + \cdots + 2^n \\ &= 2^{n+1} - 2. \end{aligned}$$

【试题 243】 (16-1.13;3.13)

行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【解析】 按第四行展开得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= -4 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (\lambda+1) \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= 4 + 3\lambda + 2\lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4. \end{aligned}$$

【试题 244】 (19-2.14)

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, A_{ij} 表示 $|A|$ 中 (i, j) 元

的代数余子式, 则 $A_{11} - A_{12} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解析】

$$\begin{aligned} A_{11} - A_{12} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4 \end{aligned}$$

题型考点 抽象矩阵的行列式

1. 化为乘法 $|AB| = |A||B|$ $|A+B| \neq |A|+|B|$

2. 特征值: $|A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ $A\alpha = \lambda\alpha \Leftrightarrow (\lambda E - A)\alpha = 0, \alpha \neq 0$
 $\Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0$ 解法: λ
 3. 其他结论: $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(A)$ 解: $(\lambda E - A)x = 0$ 解: α .

(1) 若 A 不可逆, $r(A_n) < n$, $Ax = 0$ 有非零解, A 的行或列向量组线性相关, 则

$$|A| = 0$$

(2) 若 A 可逆, $r(A_n) = n$, $Ax = 0$ 仅有零解, A 的行或列向量组线性无关, 则 $|A| \neq 0$

$$(3) |A^*| = |A|^{n-1}, |A^T| = |A|, |A^{-1}| = |A|^{-1} \quad |kA| = k^n |A|$$

【试题 245】(10-2.14;3.13) 设 A, B 为 3 阶矩阵, 且 $|A|=3, |B|=2, |A^{-1} + B|=2$,

则 $|A + B^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

考点: 矩阵行列式的计算 通法: 化为乘法
【难度】 本题的数学二难度值为 0.515, 数学三难度值为 0.539, 数学一的考生也应

掌握此题.

$$\text{分析: } A^{-1}(A+B^{-1})B = A^{-1}(AB+E) = B+A^{-1}$$

$$\therefore |A^{-1}| \cdot |A+B^{-1}| \cdot |B| = |B+A^{-1}|$$

$$\therefore \frac{1}{3} \cdot |A+B^{-1}| \cdot 2 = 2$$

$$\therefore |A+B^{-1}| = 3$$

$$\begin{aligned} \text{解2: } A+B^{-1} &= A \cdot B B^{-1} + B^{-1} = (AB+E)B^{-1} \\ &= (AB+AA^T)B^{-1} \\ &= A(B+A^T)B^{-1} \end{aligned}$$

拆E

$$\therefore |A+B^{-1}| = |A| \cdot |B+A^T| \cdot |B^{-1}| = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

【试题 246】 (12-2.14;3.13) 设 A 为 3 阶矩阵, $|A|=3$, A^* 为 A 的伴随矩阵.

若交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B , 则 $|BA^*| = |B| \cdot |A^*| = -|A| \cdot |A|^2 = -3^3 = -27$

【难度】 本题的数学二难度值为 0.619, 数学三难度值为 0.557, 数学一的考生也应掌握此题.

【试题 247】 (13-1.13;2.14;3.13) 设 $A=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|A|$ 为 A 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j=1, 2, 3)$, 则 $|A| = -1$.

【难度】 本题的数学一难度值为 0.288, 数学二难度值为 0.274, 数学三难度值为

0.283

$$\text{解: } \because a_{ij} = -A_{ij} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & -A_{22} \end{pmatrix}$$

$$\therefore A = -(A^*)^T \text{ 或 } A^* = -A^T$$

$$\therefore |A| = |-(A^*)^T| = (-1)^3 |(A^*)^T| = -|A^*| = -|A|^2$$

$$\therefore |A| = 0 \text{ 或 } |A| = -1$$

② $\because A \neq 0 \therefore$ 存在 $a_{ij} \neq 0$, 不妨设 $a_{11} \neq 0$

$$|A| = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} = -a_{11}^2 - a_{12}^2 - a_{13}^2 < 0$$

$$\therefore |A| = -1.$$

解2: 特例法: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ & & \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & & \end{pmatrix} = -A^T.$

$$\therefore |A| = -1.$$

解3: A 正交矩阵: $A^* = -A^T, |A| = -1$
 $A^* = A^T, |A| = 1$

$$AA^T = E$$

$$\therefore |A| |A^T| = 1 \therefore |A|^2 = 1 \therefore |A| = \pm 1$$

【试题 248】 (15-2.14;3.13) 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 2, -2, 1, $B=A^2-A+E$,

其中 E 为 3 阶单位矩阵, 则行列式 $|B| = 21$. B 的特征值: 3, 7, 1

【试题 249】 (18-3.13) 设 A 为 3 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的向量组, 若

$$A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2, A\alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_3 \text{ 则 } |A| = 2. \quad A(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$

【解析】 向量的线性组合在原有向量组中

$$\therefore \lambda_1 = 2.$$

由题可知: $A(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$
 $(a_1+a_2, a_2+a_3, a_1+a_3)$

因为 a_1, a_2, a_3 是线性无关的向量组, 所以 $|a_1, a_2, a_3| \neq 0$

方法 1: $|A| \cdot |a_1, a_2, a_3| = |a_1, a_2, a_3| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix},$ 故 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$

$AP = PB \therefore P^{-1}AP = B \therefore A, B$ 相似 $\therefore \lambda_A = \lambda_B, r(A) = r(B)$ 必要条件

方法 2: 故 (a_1, a_2, a_3) 可逆, 所以 A 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 相似, 故 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$

第二章 矩阵

一、方阵的幂

1. 找规律

2. 成比例: 若 $A = \alpha\beta^T$, $l = \beta^T\alpha = \text{tr}(A)$, 则 $A^n = l^{n-1}A$.

3. 可对角化: 若 $A = PAP^{-1}$, 则 $A^n = P\Lambda^n P^{-1}$.

二、矩阵的转置、伴随、逆

A_n 转置	$ A^T = A $	$(kA)^T = kA^T$	$(A^T)^T = A$	$(AB)^T = B^T A^T$	$(A^T)^n = (A^n)^T$
A_n 伴随	$ A^* = A ^{n-1}$	$(kA)^* = k^{n-1}A^*$	$(A^*)^* = A ^{n-2}A$	$(AB)^* = B^* A^*$	$(A^*)^n = (A^n)^*$
A_n 逆	$ A^{-1} = A ^{-1}$	$(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$	$(A^{-1})^{-1} = A$	$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$	$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

三、逆矩阵

1. 具体矩阵求逆

$$(1) A^{-1} = \frac{A^*}{|A|};$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d^{-1} & b^{-1} \\ c^{-1} & a^{-1} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} c & b \\ a & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & b^{-1} \\ c^{-1} & d^{-1} \end{pmatrix}$$

☆(2) 初等变换法: $(A, E) \xrightarrow{\text{行变}} (E, A^{-1})$.

2. 抽象矩阵求逆: 用定义 $A \cdot E = E$

3. A 为可逆矩阵 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 的列 (行) 向量组线性无关 $\Leftrightarrow r(A_n) = n$

【试题 250】(99-3) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 而 $n \geq 2$ 为正整数, 则 $A^n - 2A^{n-1} = \underline{0}$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2A$$

$$\therefore A^3 = 2A^2$$

$$\therefore A^n = 2A^{n-1}$$

要点: 归纳法

找规律.

【试题 251】(94-1) 已知 $\alpha = (1, 2, 3)$, $\beta = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, 设 $A = \alpha^T \beta$, 其中 α^T 是 α

列、行、数、比例

的转置, 则 $A^n = \underline{A^{n-1} A} = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

$$= 3^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

【试题 252】 (88-1) 已知 $AP = PB$, 其中 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$A = P B P^{-1}$$

求 A 及 $A^5 = P B^5 P^{-1} = P B P^{-1} = A$

【解析】

由 $AP = PB$, 得

$$A = PBP^{-1}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{pmatrix} E \\ A \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{因为 } B^5 = \begin{pmatrix} 1^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0^5 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B,$$

$$\text{所以 } A^5 = PB^5P^{-1} = PBP^{-1} = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

【试题 253】 (09-1.6;2.7;3.5)

设 A, B 均为 2 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴

随矩阵, 若 $|A| = 2, |B| = 3$, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为

(A) $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}.$

$A A^* = |A| E$

若 A 可逆, 则 $A^* = |A| A^{-1}$

【难度】 本题的数学一难度值为 0.651, 数学二难度值为 0.610, 数学三难度值为

0.618.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* &= \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} \\ &= (-1)^{2 \times 2} |A| |B| \cdot \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} O & |A| |B| B^{-1} \\ |A| |B| A^{-1} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & |A| B^* \\ |A| A^* & O \end{pmatrix} \\ &\quad \quad \quad 1, 2 \quad 2 B^* \quad 1 \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$$

分块矩阵的逆: $\textcircled{1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$

$$\textcircled{2} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

初等变换:

$$\text{例} \Rightarrow \begin{pmatrix} A & C & | & E & 0 \\ 0 & B & | & 0 & E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} A & C & | & E & 0 \\ 0 & E & | & 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$$

左行右列.

$$\xrightarrow{\text{列}} \begin{pmatrix} A & 0 & | & E & -CB^{-1} \\ 0 & E & | & 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} E & 0 & | & A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & E & | & 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$$

题型考点 初等变换与初等矩阵

1.初等矩阵的作用：相当于一次初等变，左行右列.

2.可逆矩阵相当于若干个初等矩阵的乘积.

3.初等矩阵的逆、转置、伴随

逆	$E_{ij}^{-1} = E_{ij}$	$E_i^{-1}(k) = E_i\left(\frac{1}{k}\right)$	$E_{ij}^{-1}(k) = E_{ij}(-k)$
转置	$E_{ij}^T = E_{ij}$	$E_i^T(k) = E_i(k)$	$E_{ij}^T(k) = E_{ji}(k)$
伴随	$E_{ij}^* = E_{ij} \cdot E_{ij}^{-1} = -E_{ij}$	$E_i^*(k) = E_i(k) \cdot E_i^{-1}(k) = kE_i\left(\frac{1}{k}\right)$	$E_{ij}^*(k) = E_{ij}(k) \cdot E_{ij}^{-1}(k) = E_{ij}(-k)$

【试题 254】 (09-2.8;3.6)

设 A, P 均为 3 阶矩阵, P^T 为 P 的转置矩阵, 且

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

若 $P = (a_1, a_2, a_3)$, $Q = (a_1 + a_2, a_2, a_3)$, 则 $Q^T A Q$ 为

(A) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

【难度】 本题的数学二难度值为 0.676, 数学三难度值为 0.631, 数学一的考生也应

掌握此题.

【试题 255】 (11-1.5;2.7;3.5)

设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵

$$B, \text{再交换 } B \text{ 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵. 记 } P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{则 } A =$$

(A) $P_1 P_2$.

(B) $P_1^{-1} P_2 \cdot E_{23} A E_{21}^{(1)} = E$

(C) $P_2 P_1$.

(D) $P_2 P_1^{-1}$.

【难度】 本题的数学一难度值为 0.796，数学二难度值为 0.803，数学三难度值为

0.783.



【试题 256】 (12-1.6;2.8;3.6)

设 A 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵, 且

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ 若 } P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3), \text{ 则 } Q^{-1}AQ =$$

$$(A) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(B) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = E_{21}(-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} E_{21}(1)$$

$$(C) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(D) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} E_{21}(-1)$$

【难度】 本题的数学一难度值为 0.778, 数学二难度值为 0.789, 数学三难度值为

0.754.

$$\text{ins1: } \because P^{-1}AP = \Lambda$$

$$\therefore \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\text{特征向量: } \alpha_1, \alpha_2 \quad \alpha_3$$

$$\therefore \alpha_1, \alpha_2 \text{ 是 } \lambda_1 = 1 \text{ 的特征向量.}$$

$$\therefore Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3), Q^{-1}AQ = \Lambda$$

【试题 257】 (15-2.22;3.20)

$$\text{设矩阵 } A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \text{ 且 } A^3 = O.$$

(I) 求 a 的值;

$$\text{ins1: } \because A^3 = O \therefore |A|^3 = 0 \therefore |A| = 0 \therefore a = 0$$

$$\text{ins2: } \because A^3 = O \therefore \lambda^3 = 0 \therefore \lambda = 0 \therefore \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \therefore \text{tr}(A) = 3a = 0 \therefore a = 0$$

(II) 若矩阵 X 满足 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵, 求 X .

$$f(x) \text{ 为多项式: } f(a) = 0, \text{ 则 } f(\lambda) = 0 \quad \text{表格}$$

【解析】

$$(I) \text{ 因为 } A^3 = O, \text{ 所以 } |A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 = 0, \text{ 得 } a = 0, \text{ 且 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(II) 对 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$ 变形整理得:

$$= X(E - A^2) - AX(E - A^2) = (E - A)X(E - A^2) = E.$$

由于

$$= (E - A)X(E - A^2) = E \quad \therefore X = (E - A)^{-1}(E - A^2)^{-1} = [(E - A^2)(E - A)]^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E-A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, E-A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

且

$$(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(E-A^2)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{所以 } X=(E-A)^{-1}(E-A^2)^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

解 → 273 题.