25考研 | 题型通法21笔记

第三章 向量组

题型考点 向量组的线性表示 ①定义 ②秩

1. $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$ （定义）

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}_1x_1+\boldsymbol{\alpha}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_mx_m=\boldsymbol{\beta}$，非齐次线性方程组有解

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ （秩）

混子

2. $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ （秩）

$\Rightarrow r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\le r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$，反之不成立.

3. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 等价，表示同一个向量空间 .

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$ （秩）

$\Rightarrow r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$，反之不成立

组外关系 组内关系

4. (1) 行变行等价，列变列等价 (2) 行（列）变不改变列（行）向量组的线性表示

可逆

关系. $AQ=B$

(1) 列 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)Q=(\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n) \Leftrightarrow \beta_1,\beta_2\cdots\beta_n$ 可由 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 表示,

$\therefore(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n)Q^{-1}\Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 可由 $\beta_1\beta_2\cdots\beta_n$ 表示,

(2) $(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)$: $k_1\alpha_1+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}=\alpha_n$

$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_{n-1} \vdots \alpha_n) \xrightarrow{行} (\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_{n-1}' \vdots \alpha_n')$

【试题 262】(10-2.7;3.5) 设向量组 I：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 II：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ ~~由~~线性表示.下列命题正确的是

$\Leftrightarrow r(\mathrm{I},\mathrm{II})=r(\mathrm{II})$

法1: $\Rightarrow r(\mathrm{I})\le r(\mathrm{II})\le s$

(A) 若向量组 I 线性无关，则 $r\le s$. (B) 若向量组 I 线性相关，则 $r>s$.

(C) 若向量组 II 线性无关，则 $r\le s$. (D) 若向量组 II 线性相关.则 $r>s$.

【难度】 本题的数学二难度值为 0.480，数学三难度值为 0.492，数学一的考生也应掌握此题.

法2: 通俗理解: A: I(瘦子)被II表示, $\therefore s\ge r$

【试题 263】（11-1.20;2.22;3.20） 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示.

（I）求 a 的值; $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不能由 $\beta_1\beta_2\beta_3$ 表示. ? $\Rightarrow r(\alpha)>r(\beta)$ ×

$\beta_1=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$

（II）将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示. 1 □ 2

【难度】 本题的数学一难度值为 0.657，数学二难度值为 0.627，数学三难度值为

0.630.

方法1：

解：(1) 由题设可知： $r(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3) < r(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3,\ \beta_1\ \beta_2\ \beta_3) \le 3$ ∵ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ 是3维向量

$\therefore |\beta_1\ \beta_2\ \beta_3| = a-5 = 0 \quad \therefore a = 5$ 或 $(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3) \to (\ldots)$

方法2：∵ $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ 不能由 $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$ 表示

∴ $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$ 相关 或 $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) < 3$

∴ $|\beta_1\ \beta_2\ \beta_3| = a-5 = 0$ 或 行阶梯形

假设 $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$ 无关，则 $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$ 可表示任意三维向量.

(2) $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \xrightarrow{行} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right)$

$\therefore \beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3$

$\beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2$

$\beta_3 = 5\alpha_1 + 10\alpha_2 - 2\alpha_3$

【试题 264】（13-1.5;2.7;3.5）设 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若 $AB=C$，且 B 可逆，

列变

则

(A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

(B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价

(C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价

(D) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价

【难度】 本题的数学一难度值为 0.510，数学二难度值为 0.467，数学三难度值为 0.452.

题型考点 向量组的线性相关性

1. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关

$\Leftrightarrow k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0,k_1,k_2,\cdots,k_m$ 可以不全为 0（定义）

$\Leftrightarrow \alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_mx_m=0$，齐次线性方程组有非零解

$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)<m$（不满秩，所决定的向量空间的维度 < 向量个数）

$\Leftrightarrow |\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m|=0$（$\alpha_i,i=1,2,\cdots,m$ 为 m 维向量）

2. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关

$\Leftrightarrow k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0,k_1,k_2,\cdots,k_m$ 只能全为 0（定义）

$\Leftrightarrow \alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_mx_m=0$，齐次线性方程组仅有零解

$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=m$（满秩，所决定的向量空间的维度 < 向量个数）

$\Leftrightarrow |\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m|\neq 0$（$\alpha_i,i=1,2,\cdots,m$ 为 m 维向量）

【试题 265】（12-1.5;2.7;3.5） 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，

其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的为 秩，行列可. $(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4)\xrightarrow{列}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&-1&0\\c_1&0&0\end{pmatrix}, r\le 2$

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不定. (B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 不一定 (C) $|\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4|=0$ (D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

若 $c_1=0$，则相关.

若 $c_1\neq 0$

【难度】 本题的数学一难度值为 0.872，数学二难度值为 0.844，数学三难度值为 0.838.

【试题 266】（14-1.6;2.8;3.6） 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维向量，则对任意常数 k，l，向量组 $\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

(A) 必要非充分条件. (B) 充分非必要条件.

(C) 充分必要条件. (D) 既非充分也非必要条件.

【难度】 本题的数学一难度值为 0.433，数学二难度值为 0.383，数学三难度值为

0.400 …… $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 列满秩

0.400.

① 若 $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ 无关，则 [illegible]

$\because (\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}$

$\therefore r(\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3) = 2$

② α_1, α_2 无关，$\alpha_3 = 0$，而 $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ 相关

题型考点　向量组的极大无关组与秩

1.向量组的极大无关组：（1）部分组（2）无关（3）个数$=r$(组)

2.化行阶梯型可以确定极大无关组，化行最简形可以求剩余向量用极大无关组的具体表示. 3. 三秩相等.

【试题 267】(10-1.13)　设$\alpha_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm T}$，$\alpha_2=(1,1,0,2)^{\mathrm T}$，$\alpha_3=(2,1,1,a)^{\mathrm T}$.若由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$生成的向量空间的维数为$2$，则$a=$_______.

$\Leftrightarrow$秩　$\therefore r=2$

①α_1是一个4维向量 坐标内有4个元素,
②$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是3个4维向量
③$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$决定2维向量子空间. 即$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=2$.

【难度】　本题的数学一难度值为 0.816，数学二、数学三的考生也应掌握此题.

法1：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&-3\\0&0&a-6\\0&0&0\end{pmatrix}$　$\therefore a=6$

法2：$\because r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$ $\therefore\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$相关 $\therefore\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}$相关

$\Downarrow$

法3：$\because r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=2$ $\therefore$所有3阶子式全为0 $\Rightarrow$ $\therefore\begin{vmatrix}2&1&1\\-1&0&1\\0&2&a\end{vmatrix}=0$ $\therefore a=6$.

题型考点　向量空间（数学一）(数二、三不考)

1.基：极大无关组

2.过渡矩阵：向量组的线性表示、可逆矩阵方程

若$\boldsymbol A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$和$\boldsymbol B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$均为$n$维向量空间的一组基，且满足$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol B$，则$\boldsymbol P=\boldsymbol A^{-1}\boldsymbol B$为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵.

$(\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n)\begin{pmatrix}|&|&\cdots&|\end{pmatrix}=(\beta_1\ \beta_2\cdots\beta_n)$

过渡矩阵.

$AP=B$ $\therefore P=A^{-1}B$. $(A,B)\xrightarrow{行}(E,P)$

3.坐标：线性表示

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为一组基，且$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$，则$\beta$在$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标为$k_1,k_2,\cdots,k_n$.

$\beta=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)\underbrace{\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}}_{=x}=Ax$

4.坐标变换：β在基$\boldsymbol A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，$\boldsymbol B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$下的坐标分别为$x,y$，即$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{By}$，则$y=\boldsymbol B^{-1}\boldsymbol{Ax}$，$x=\boldsymbol A^{-1}\boldsymbol{By}$.

$\beta=Ax=By$

【试题 268】(09-1.5)　设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是3维向量空间$\mathbf R^3$的一组基,则由基$\alpha_1,\frac12\alpha_2,\frac13\alpha_3$到基$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$的过渡矩阵为

$(\alpha_1,\frac12\alpha_2,\frac13\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)$

(A) $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&3\\1&0&3\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}\frac12&\frac14&-\frac16\\-\frac12&\frac14&\frac16\\\frac12&-\frac14&\frac16\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}\frac12&-\frac12&\frac12\\\frac14&\frac14&-\frac14\\-\frac16&\frac16&\frac16\end{pmatrix}$

【难度】　本题的数学一难度值为 0.665，数学二、数学三的考生不作要求.

【试题 269】(19-1.20) 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm T},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,2)^{\mathrm T},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,a,3)^{\mathrm T}$为$\boldsymbol{R}^3$的一组基，$\boldsymbol{\beta}=(1,1,1)^{\mathrm T}$在这组基下的坐标为$(b,c,1)^{\mathrm T}$.

$$\beta=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\begin{pmatrix}b\\c\\1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \beta=b\alpha_1+c\alpha_2+\alpha_3$$

(1) 求a,b,c的值;

(2) 证明$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$为$\boldsymbol{R}^3$的一组基，并求$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$到$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的过渡矩阵.

解：(1) 由(1)可知：$\beta=b\alpha_1+c\alpha_2+\alpha_3$

即 $b\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\a\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\therefore\begin{cases}b+c+1=1\\2b+3c+a=1\\b+2c+3=1\end{cases}$$

解得：$a=3,\ b=2,\ c=-2$

(2) $(\alpha_2,\alpha_3,\beta,\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&0&1\\0&0&1&\frac{1}{2}&0&0\end{array}\right)$

$\therefore r(\alpha_2,\alpha_3,\beta)=3$ 即$\alpha_2\ \alpha_3\ \beta$线性无关 $\therefore\alpha_2,\alpha_3,\beta$为一组基.

$\therefore$从α_2,α_3,β到$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$的过渡矩阵为：$\begin{pmatrix}1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&1\\\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}$

第四章 线性方程组

题型考点 解的判定与解的结构

1.解的判定

(1) $A_{m\times n}x=0$，对比$r(A)$（有效方程的个数）与n（未知数的个数）的关系；

$\begin{cases} r(A)=n, & \text{仅有0解} \\ r(A)<n, & \text{有非0解} \end{cases}$

(2) $A_{m\times n}x=b$，先判断$r(A,b)$是否等于$r(A)$，确定是否有矛盾方程，若

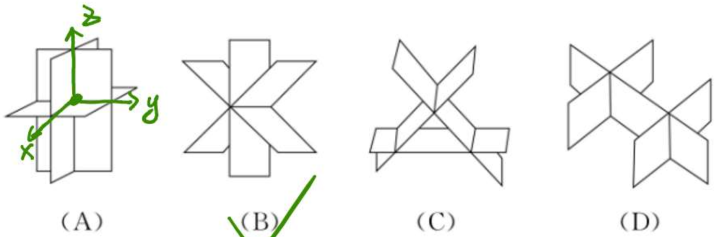
无解

$r(A,b)=r(A)$，再对比$r(A)$与n的关系.

$\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

【试题 270】(11-1.6;2.8) 设有三张不同平面的方程$a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=b_i, i=1,2,3$，它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为2，则这三张平面可能的位置关系为

$r(A)=r(A,b)=2<3$ ∴无穷多解，有无穷多交点.



(D)：无解
$r(A)=2$
$r(A,\beta)=3$

唯一解 ⇓
$r(A)=r(A,\beta)=3$
∴ $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 无关，
$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 相关.

无穷多解
$r(A)=r(A,\beta)=2$
$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 相关
$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta$ 相关

(C)：无解.
$r(A)<r(A,\beta)$
且 $r(A)=2$，$r(A,\beta)=3$
∴ $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 相关，$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta$ 相关

(C)例 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\2x_1+x_2-x_3=2\\3x_1+2x_2=1\end{cases}$ 无解

D)例 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\x_1+x_2+x_3=2\\2x_1-x_2-x_3=3\end{cases}$ 平行

【试题 271】(19-1.6) 如图所示，有3张平面两两相交，交线相互平行，它们的方程$a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=d_i(i=1,2,3)$组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别为$A$，$\overline{A}$，则

无解

$\underset{2}{r(A)}<\underset{3}{r(\overline{A})}$

(A) $r(A)=2,r(\overline{A})=3$.　　(B) $r(A)=2,r(\overline{A})=2$.

(C) $r(A)=1,r(\overline{A})=2$.　　(D) $r(A)=1,r(\overline{A})=1$.

2.解的结构

(1) $A_{m\times n}x=0$的基础解系：①是解，②无关，③个数$=n-r(A)$

极大无关组

(2) ①C_1齐+C_2齐=齐，②λ非+μ非$=\begin{cases}齐,\lambda+\mu=0\\非,\lambda+\mu=1\end{cases}$，③非$_{通}$=齐$_{通}$+非$_{特}$

$A\alpha_1=\beta$，$A\alpha_2=\beta$

$A(\lambda\alpha_1+\mu\alpha_2)=\lambda A\alpha_1+\mu A\alpha_2$
$=\lambda\beta+\mu\beta=(\lambda+\mu)\beta$ $\overset{!!}{0}$

$\eta_1-\eta_2$，$\eta_1-\eta_3$，$\eta_2-\eta_3$，齐次的解，2个无关

【试题 272】(11-3.6) 设A为4×3矩阵，η_1,η_2,η_3是非齐次线性方程组$Ax=\beta$

的3个线性无关的解，k_1,k_2 为任意常数，则 $Ax=\beta$ 的通解为　　$Ax=\beta$ 有 k 个无关解，则……

(A) $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)$　　(B) $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)$

(C) $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$　　(D) $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$

【难度】 本题的数学三难度值为0.649，数学一、数学二的考生也应掌握此题.

【试题273】 (11-1.6;2.8) 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是4阶矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵．若 $(1,0,1,0)^T$ 是方程组 $\boxed{Ax=0\text{ 的一个基础解系}}$，则 $A^*x=0$ 的 $\boxed{\text{基础解系}}$ 可为　　考点：　故：$A^*x=0$ 的通解为：______.

(A) α_1,α_3.　　(B) α_1,α_2.

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.　　(D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

① 是解
② 无关
③ 个数 $=4-r(A)$
$\quad\quad 1 \quad \therefore r(A)=3$

① 是解
② 无关
③ 个数 $=4-r(A^*)$

【难度】 本题的数学一难度值为0.407，数学二难度值为0.434，数学三的考生也应掌握此题.

解：① $\because \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系，　$4-r(A)=1$

$r(A^*)=\begin{cases} n & r(A)=n \\ 1 & r(A)=n-1 \\ 0 & r(A)\le n-2 \end{cases}$

$\therefore r(A)=3$ 且 $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\alpha_1+\alpha_3=0$，$\alpha_1,\alpha_3$ 相关.

$\therefore r(A^*)=1 \quad \therefore 4-r(A^*)=3 \quad \therefore D$

② $\because \boxed{A^*A=|A|E=0}$

$\therefore A^*\alpha_i=0,\ i=1,2,3,4$，即 α_i 是 $A^*x=0$ 的解

③ $\because \alpha_1,\alpha_3$ 相关 且 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$

$\therefore r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=3$，$r(\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)=3$

$\therefore \alpha_1\alpha_2\alpha_4$ 或 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为基础解系

矩阵

矩阵的基本运算

- 矩阵的线性运算
  - （1）矩阵的加法：对应元素相加
  - （2）矩阵的数乘：所有元素全部乘以k， $|kA| = k^n|A|$
- 矩阵的乘法
  - 左行乘右列，注意矩阵的乘法不满足交换律和消去律
- 方阵的幂
  - （1）找规律
    - 对角阵： $\Lambda^n = \begin{pmatrix} a^n & & \\ & b^n & \\ & & c^n \end{pmatrix}$
    - "坍缩矩阵"
  - （2）成比例： 若 $A = \alpha\beta^T$， $l = \beta^T\alpha = tr(A)$，则 $A^n = l^{n-1}A$.
  - （3）可对角化： 若 $A = P\Lambda P^{-1}$，则 $A^n = P\Lambda^n P^{-1}$.
  - （4）若A²=A，则称A为幂等矩阵（了解）
    - 特征值λ²=λ，解得 λ=0 或 1
    - r(A)=tr(A)，因为非零特征值1的个数=特征值之和
    - 充要条件：r(A)+r(E-A)=n
    - 幂等矩阵一定可相似对角化
- 伴随矩阵
  - （1）行的代数余子式竖着写
  - （2） $AA^* = A^*A = |A|E$
- 矩阵的转置
  - (i) $(A^T)^T = A$； (ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$；
  - (iii) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$； (iv) $(AB)^T = B^TA^T$.
- 逆矩阵
  - （1）抽象矩阵求逆矩阵：用定义
  - （2）具体矩阵求逆矩阵：
    - 第二定义： $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$
    - 初等变换法： $(A,E) \xrightarrow{\text{行变}} (E, A^{-1})$.
  - （3）A可逆 <=> |A|≠0 <=> r(A)=n <=> A的列（行）向量线性无关
  - （4）A不可逆 <=> |A|=0 <=> r(A)<n <=> A的列（行）向量线性相关
- 结论

A_n转置	$\lvert A^T\rvert = \lvert A\rvert$	$(kA)^T = kA^T$	$(A^T)^T = A$	$(AB)^T = B^TA^T$	$(A^T)^* = (A^*)^T$
A_n伴随	$\lvert A^*\rvert = \lvert A\rvert^{n-1}$	$(kA)^* = k^{n-1}A^*$	$(A^*)^* = \lvert A\rvert^{n-2}A$	$(AB)^* = B^*A^*$	$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$
A_n逆	$\lvert A^{-1}\rvert = \lvert A\rvert^{-1}$	$(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$	$(A^{-1})^{-1} = A$	$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$	$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

初等变换与初等矩阵

- 初等矩阵
  - 初等矩阵的作用：相当于一次初等变，左行右列
  - 可逆矩阵相当于若干个初等矩阵的乘积，代表若干次初等变换

逆	$E_{ij}^{-1} = E_{ij}$	$E_i^{-1}(k) = E_i\left(\frac{1}{k}\right)$	$E_{ij}^{-1}(k) = E_{ij}(-k)$
转置	$E_{ij}^T = E_{ij}$	$E_i^T(k) = E_i(k)$	$E_{ij}^T(k) = E_{ji}(k)$
伴随	$E_{ij}^* = \lvert E_{ij}\rvert \cdot E_{ij}^{-1} = -E_{ij}$	$E_i^*(k) = \lvert E_i(k)\rvert \cdot E_i^{-1}(k) = kE_i\left(\frac{1}{k}\right)$	$E_{ij}^*(k) = \lvert E_{ij}(k)\rvert \cdot E_{ij}^{-1}(k) = E_{ij}(-k)$

- 初等变换
  - 求逆矩阵
  - 解可逆矩阵方程
  - 化行阶梯形求秩
  - 化行最简形阶方程组和列向量的线性表示
  - 求过渡矩阵（仅数一）

- 秩的定义：最高阶非零子式的阶数
- 秩的计算：利用初等变换化行阶梯形
  - ① $0 \le R(A_{m\times n}) \le \min\{m,n\}$.
  - ② $R(A^T) = R(A)$.
  - ③若 $A \sim B$，则 $R(A) = R(B)$.
  - ④若 P、Q 可逆，则 $R(PAQ) = R(A)$.
  - ⑤ $\max\{R(A), R(B)\} \le R(A, B) \le R(A) + R(B)$.

矩阵的秩

⑥ $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \le R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$.

秩的结论

⑦ $R(\boldsymbol{AB}) \le \min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}$

⑧若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times l}=\boldsymbol{O}$，则 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\le n$

⑨ $R(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n, R(\boldsymbol{A})=n; \\ 1, R(\boldsymbol{A})=n-1; \\ 0, R(\boldsymbol{A})\le n-2. \end{cases}$

⑩若 $R(\boldsymbol{A}_{m\times n})=n$，则 $R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{B})$；若 $R(\boldsymbol{A}_{m\times n})=m$，则 $R(\boldsymbol{BA})=R(\boldsymbol{B})$.

11.分块矩阵秩的结论

(1) $R\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \ge R\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$

(2) $R(\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{AB}) = R(\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{O}) = R(\boldsymbol{A})$

(3) $R\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{BA} \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = R(\boldsymbol{A})$

(4) $R\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} \end{pmatrix}$；$R(\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{AA}^T) = R(\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{O}) = R(\boldsymbol{O} \quad \boldsymbol{AA}^T)$

分块矩阵

(1) 幂

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & & \\ & \boldsymbol{B} & \\ & & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^n & & \\ & \boldsymbol{B}^n & \\ & & \boldsymbol{C}^n \end{pmatrix}$$

(2) 行列式

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & & \\ & \boldsymbol{B} & \\ & & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{C}|;$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|;$$

$$\begin{vmatrix} O & \boldsymbol{A}_m \\ \boldsymbol{B}_n & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}_m \\ \boldsymbol{B}_n & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & \boldsymbol{A}_m \\ \boldsymbol{B}_n & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|;$$

(3) 逆

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & & \\ & \boldsymbol{B} & \\ & & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & & \\ & \boldsymbol{B}^{-1} & \\ & & \boldsymbol{C}^{-1} \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} & & \boldsymbol{A} \\ & \boldsymbol{B} & \\ \boldsymbol{C} & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & \boldsymbol{C}^{-1} \\ & \boldsymbol{B}^{-1} & \\ \boldsymbol{A}^{-1} & & \end{pmatrix}$$