

25高数强化 (9)

9	微分中值定理证明题方法举例	P81-P90
---	---------------	---------

下：91-104

主讲 武忠祥 教授



还不关注，
你就慢了



题型五 微分中值定理有关的证明题

(一) 证明存在一个点 $\xi \in (a, b)$, 使 $F[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$

方法：构造辅助函数用罗尔定理。

构造辅助函数的方法主要有两种

1. 分析法(还原法) 根据对欲证的结论 $F[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$

的分析, 确定 $g(x)$, 使 $g'(x) = F[x, f(x), f'(x)]$

2. 微分方程法: 欲证: $F[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$

1) 求微分方程 $F(x, y, y') = 0$ 的通解 $H(x, y) = C$

2) 设辅助函数: $g(x) = H(x, f(x))$

25武忠祥考研

【例1】设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $f(a) = b, f(b) = a$,

a 与 b 同号, 求证: $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$.

1. 分析法: 欲证 $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$. 只要证 $\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$

则应构造辅助函数 $g(x) = xf(x)$

2. 微分方程法: 欲证 $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$, 解微分方程 $y' = -\frac{y}{x}$,

得其通解为 $xy = C$. 则应构造辅助函数 $g(x) = xf(x)$

【证】令 $g(x) = xf(x)$, 则

$$g(a) = af(a) = ab, g(b) = bf(b) = ab,$$

由罗尔定理知, $\exists \xi \in (a, b)$ 使 $g'(\xi) = 0$

即 $\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$ 原题得证.

$$\begin{aligned} & g'(x) \\ & \parallel \\ & x f'(x) + f(x) \\ & \parallel \\ & x f(x) \end{aligned}$$

$$g \neq 0$$

25武忠祥考研

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

关注微信公众号：发普 持续更新QQ群：378327010

$$\left[\ln|\bar{f}(x)| \right]' = \frac{\bar{f}'(x)}{\bar{f}(x)} = 0 \Rightarrow \bar{f}'(x) = 0$$

【例2】设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续, 在 $(1,2)$ 内可导且

$$f(1) = \frac{1}{2}, f(2) = 2. \text{ 求证: } \exists \xi \in (1, 2) \text{ 使 } f'(\xi) = \frac{2f(\xi)}{\xi}.$$

【证】只要证 $\xi f'(\xi) - 2f(\xi) = 0$

$$\text{令 } F(x) = \frac{f(x)}{x^2}$$

$$\text{则 } F(1) = f(1) = \frac{1}{2}, F(2) = \frac{f(2)}{4} = \frac{1}{2}$$

由罗尔定理知 $\exists \xi \in (1,2)$ 使 $F'(\xi) = 0$.

$$\text{即 } \xi^2 f'(\xi) - 2\xi f(\xi) = 0$$

从而有 $\xi f'(\xi) - 2f(\xi) = 0$ 原题得证.

25武忠祥考研

$$\bar{f}(x) = \frac{f(x)}{x^2}$$

① 分析法:

$$x f'(x) - 2f(x) = 0$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{2}{x} = 0$$

$$\left[\ln f(x) \right]' - \left[2 \ln x \right]' = 0$$

$$\left[\ln \frac{f(x)}{x^2} \right]' = 0$$

$$\text{② 分离变量: } y' = \frac{2y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x} dx$$

$$H(x, y) = C$$

$$\ln|y| = 2 \ln|x| + C$$

$$\ln \frac{|y|}{x^2} = C$$

$$\frac{y}{x^2} = \pm e^C = C$$

$$\bar{f}(x) = \frac{f(x)}{x^2}$$

【注】 1) 欲证 $\xi f'(\xi) + \underline{n}f(\xi) = 0$,

令 $F(x) = \underline{x^n f(x)}$;

2) 欲证 $\underline{\xi f'(\xi) - n f(\xi)} = 0$,

令 $F(x) = \frac{f(x)}{x^n}$;



还不关注，
你就慢了



【例3】设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，且

$f(a) = f(b) = 0$. 求证： $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$.

【证】令 $F(x) = e^{\lambda x} f(x)$, 则 $F(a) = F(b) = 0$,

由罗尔定理知， $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $F'(\xi) = 0$.

即 $e^{\lambda \xi} [f'(\xi) + \lambda f(\xi)] = 0$

但 $e^{\lambda \xi} \neq 0$

则 $f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$

故原题得证.

$$y' + \lambda y = 0$$

$$y = e^{-\lambda x} \left[\int 0 \cdot e^{\lambda x} dx + C \right]$$

$$y = C e^{-\lambda x}$$

$$e^{\lambda x} y = C$$

$$H(x, y) = C$$

$$f'(\xi) + \frac{n}{\xi} f(\xi) = 0$$

$$F(x) = e^{\int \frac{n}{x} dx} f(x) = x^n f(x)$$

【注】1) 欲证 $\xi f'(\xi) + n f(\xi) = 0$,

令 $F(x) = x^n f(x)$;

2) 欲证 $\xi f'(\xi) - n f(\xi) = 0$,

令 $F(x) = \frac{f(x)}{x^n}$;

* 1) 欲证 $f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$,

令 $F(x) = e^{\lambda x} f(x)$;

特别的 $f'(\xi) + f(\xi) = 0$, ✓

令 $F(x) = e^x f(x)$;

$\lambda = -1$
 $f'(\xi) - f(\xi) = 0$, ✓

令 $F(x) = e^{-x} f(x)$;

2) 欲证 $\alpha f'(\xi) + \beta f(\xi) = 0$, *

令 $F(x) = e^{\frac{\beta}{\alpha} x} f(x); (\alpha \neq 0)$

$\alpha \neq 0$

3) 欲证 $f'(\xi) + g'(\xi) f(\xi) = 0$,

令 $F(x) = e^{g(x)} f(x)$;

4) 欲证 $f'(\xi) + g(\xi) f(\xi) = 0$,

令 $F(x) = e^{\int g(x) dx} f(x)$;

(*) ✓

① 分.

② 否

③ 已有结论 *

【例4】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且

$$f(0) = f(1) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = 1. \text{ 证明:}$$

1) 存在 $\eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使 $f(\eta) = \eta$;

* 2) 对任意实数 λ , 存在 $\xi \in (0, \eta)$, 使 $f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1$.

$$[f(\eta) - \eta]' \quad e^{-\lambda x} [f(x) - x]$$

$$[f'(\eta) - 1] - \lambda [f(\eta) - \eta] = 0$$

已有

【证】 1) 令 $F(x) = f(x) - x$,

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0, \quad F(1) = f(1) - 1 = -1 < 0.$$

由零点定理知 $\exists \eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使 $F(\eta) = 0$, 即 $f(\eta) = \eta$.

2) 令 $\varphi(x) = e^{-\lambda x} [f(x) - x]$, 则 $\varphi(0) = 0, \varphi(\eta) = 0$

由罗尔定理知 $\exists \xi \in (0, \eta)$, 使 $\varphi'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1$.

【例5】设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有2阶导数，且 $f(1)=1$.

证明：(1) 存在 $\xi \in (0,1)$ ，使得 $f'(\xi)=1$;
 * (2) 存在 $\eta \in (-1,1)$ ，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

【证1】(1) 因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(0)=0$.

根据微分中值定理，存在 $\xi \in (0,1)$ ，使得 $f(1)-f(0)=f'(\xi)$.

又 $f(1)=1$ ，所以 $f'(\xi)=1$.

(2) 令 $F(x)=e^x[f'(x)-1]$

因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f'(x)$ 是偶函数，故 $f'(-\xi)=f'(\xi)=1$.

则 $F(x)$ 可导，且 $F(-\xi)=F(\xi)=0$. 根据罗尔定理，存在

$\eta \in (-\xi, \xi) \subset (-1,1)$ ，使得 $F'(\eta)=0$.

即 $F'(\eta)=[f''(\eta)+f'(\eta)-1]e^\eta$

25武忠祥考研

【例5】设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有2阶导数，且 $f(1)=1$.

证明：(1) 存在 $\xi \in (0,1)$ ，使得 $f'(\xi)=1$;

(2) 存在 $\eta \in (-1,1)$ ，使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

【证2】(1) 因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(0)=0$.

根据微分中值定理，存在 $\xi \in (0,1)$ ，使得 $f(1) - f(0) = f'(\xi)$.

又 $f(1)=1$ ，所以 $f'(\xi)=1$.

(2) 令 $F(x) = f'(x) + f(x) - x$

$$\begin{aligned} F(1) &= f'(1) + f(1) - 1 = f'(1) \\ F(-1) &= f'(-1) + f(-1) + 1 = f'(-1) \end{aligned}$$

$$F'(\eta) = 0$$

$$f''(\eta) + f'(\eta) - 1 = 0$$

$$f'(x) \Big|_0^1$$

25武忠祥考研

【例6】设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $g''(x) \neq 0$

$f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$. 试证



1) 在 (a, b) 内 $g(x) \neq 0$;

2) 在 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

【证】1) 由于在 $[a, b]$ 上 $g''(x) \neq 0$, 则方程 $g(x) = 0$ 在 $[a, b]$ 内最多两个根, 又 $g(a) = g(b) = 0$, 则当 $x \in (a, b)$ 时, $g(x) \neq 0$

2) 只要证 $g(\xi)f''(\xi) - f(\xi)g''(\xi) = 0$

$$\frac{g(x)f'(x)}{f(x)g'(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)f'(x)}$$

令 $F(x) = g(x)f'(x) - f(x)g'(x)$

则 $F(a) = F(b) = 0$, 由罗尔定理知, $\exists \xi \in (a, b)$ 使 $F'(\xi) = 0$

即 $g(\xi)f''(\xi) - f(\xi)g''(\xi) = 0$

柯西定理 ✓

若 1) $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续;

2) $f(x), g(x)$ 在 (a, b) 内可导, 且 $g'(x) \neq 0$;

则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

$$\delta : 0 \delta$$

证, 要证: $\frac{[g(b) - g(a)] f'(\xi) - [f(b) - f(a)] g'(\xi)}{0} = 0$

[证1] 令 $F(x) = [g(b) - g(a)] f(x) - [f(b) - f(a)] g(x)$

$$F(a) = F(b) \quad \checkmark$$

* [证2] 令 $\bar{F}(x) = [g(b) - g(a)] [f(x) - f(a)] - [f(b) - f(a)] [g(x) - g(a)]$, $\bar{F}(a) = 0 = \bar{F}(b) \quad \checkmark$

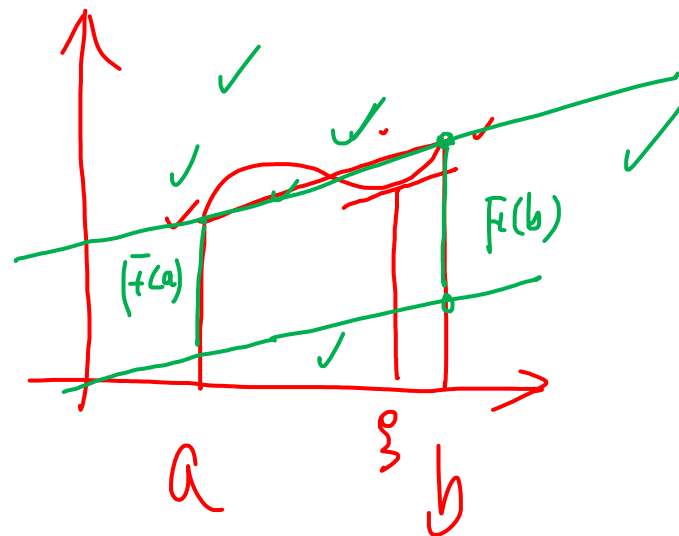
拉格朗日定理

若 1) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续; ✓

2) $f(x)$ 在 (a, b) 内可导; ✓

则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$



即, 要证 $f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$

[证1] 令 $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x$ $F(b) = F(a)$ ✓

[证2] 令 $F(x) = [f(x) - f(a)] - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} [x - a]$ $F(b) = 0 = F(a)$ ✓

【例7】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且

$$\int_0^1 f(x) dx = 0. \quad \text{求证: } \exists \xi \in (0,1) \text{ 使 } \xi f'(\xi) + 2f(\xi) = 0.$$

【证】令 $F(x) = x^2 f(x)$ ^(0,1)

$$F(0) = 0$$

$$F(1) = f(1) ?$$

则 $F(0) = 0$, 又 $\int_0^1 f(x) dx = 0$, 由积分中值定理知 $\exists c \in (0,1)$

$$\text{使 } \int_0^1 f(x) dx = f(c) = 0$$

$$\text{从而 } F(c) = 0$$

由罗尔定理知 $\exists \xi \in (0,c)$, 使 $F'(\xi) = 0$

$$\text{从而有 } \xi f'(\xi) + 2f(\xi) = 0$$

【例8】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x)dx = 0$. 求证:

$\exists \xi \in (0,1)$, 使 $\int_0^\xi f(x)dx = -\xi f(\xi)$.

【证】只要证明 $\int_0^\xi f(x)dx + \xi f(\xi) = 0$

令 $F(x) = x \int_0^x f(t)dt$

则 $F(0) = F(1) = 0$

由罗尔定理知 $\exists \xi \in (0,1)$, 使 $F'(\xi) = 0$

即 $\int_0^\xi f(x)dx + \xi f(\xi) = 0$

$x \int_0^x f(t)dt$

$\{ f'(\xi) + f(\xi) = 0$

$x f(x)$

【例9】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $f(0)=0$, $\int_0^1 f(x)dx=0$,

求证: $\exists \xi \in (0,1)$, 使 $\int_0^\xi f(x)dx = \xi f(\xi)$.

【证】只要证 $\int_0^\xi f(x)dx - \xi f(\xi) = 0$

令 $F(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x} & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{1} = 0$

$F(0) = F(1) = 0$, 则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理条件,

故 $\exists \xi \in (0,1)$, 使 $F'(\xi) = 0$

从而有 $\int_0^\xi f(x)dx - \xi f(\xi) = 0$

25武忠祥考研

$0 \leq x \leq 1$

$\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}$

$x=0$?

$x=0$, $x=1=0$

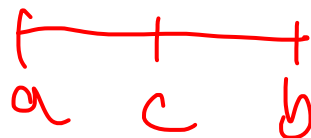
二. 证明存在两个点 $\xi, \eta \in (a, b)$. 使

$$F[\xi, \eta, f(\xi), f(\eta), f'(\xi), f'(\eta)] = 0$$

方法：(1) 不要求 $\xi \neq \eta$

在同一区间 $[a, b]$ 上用两次中值定理（拉格朗日、柯西中值定理）

(2) 要求 $\xi \neq \eta$



将区间 $[a, b]$ 分为两个子区间，在两个子区间上分别用拉格朗日中值定理

【例1】设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 内可导, 且 a, b 同号, 试

证存在 $\xi, \eta \in (a, b)$. 使 $f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta} f'(\eta)$.

【证】由拉格朗日中值定理知 $\exists \xi \in (a, b)$, 使

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

由柯希中值定理知, $\exists \eta \in (a, b)$,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(\eta)}{2\eta}$$

从而有 $f'(\xi) = \frac{(b-a)(b+a)}{2\eta} f'(\eta)$.

$$\frac{f'(\eta)}{2\eta}$$

$$f'(\eta)$$

$$f(x)$$

25武忠祥考研

【例2】设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，且 $f'(x) \neq 0$.

证明存在 $\xi, \eta \in (a, b)$ ，使得 $\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b - a} e^{-\eta}$. ✓

【证】只要证明 $f'(\xi) = \frac{e^b - e^a}{b - a} f'(\eta) e^{-\eta}$ ✓

由拉格朗日定理知 $\exists \xi \in (a, b)$ ，使 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$ ✓

由柯希定理知 $\exists \eta \in (a, b)$ ，使

$$\frac{f(b) - f(a)}{e^b - e^a} = \frac{f'(\eta)}{e^\eta}$$

从而有 $f'(\xi)(b - a) = \frac{f'(\eta)}{e^\eta} (e^b - e^a)$

$$\text{故 } \frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b - a} e^{-\eta}$$

25武忠祥考研

【例3】设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且

$f(a) = f(b) = 1$, 试证存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使 $e^{\eta-\xi}[f(\eta) + f'(\eta)] = 1$.

【证】只要证明 $e^{\eta}[f(\eta) + f'(\eta)] = e^{\xi}$

由拉格朗日中值定理得 $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $\frac{e^b - e^a}{b - a} = e^{\xi}$

令 $F(x) = e^x f(x)$, 由拉格朗日中值定理得, $\exists \eta \in (a, b)$

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(\eta)$$

即

$$\frac{e^b - e^a}{b - a} = e^{\eta}[f(\eta) + f'(\eta)]$$

从而有 $e^{\eta}[f(\eta) + f'(\eta)] = e^{\xi}$

$$\underline{[e^x f(x)]'}$$

25武忠祥考研

【例4】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$.

证明：1) 存在 $\xi \in (0,1)$ ，使得 $f(\xi)=1-\xi$;
2) 存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0,1)$ ，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

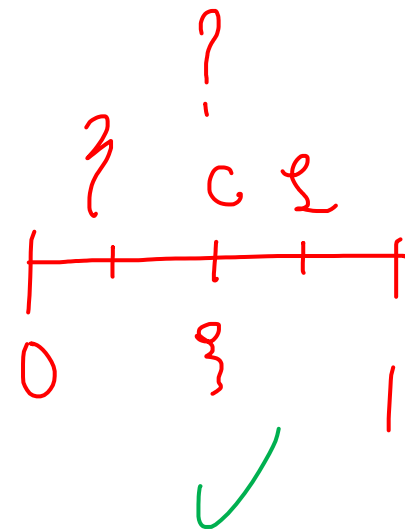
【证】1) 令 $F(x)=f(x)-1+x$ ，则 $F(0)=-1<0, F(1)=1>0$

$\exists \xi \in (0,1)$ ，使 $F(\xi)=0$ 即 $f(\xi)=1-\xi$

$$2) \frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0} = f'(\eta) \quad \eta \in (0, \xi)$$

$$\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi} = f'(\zeta) \quad \zeta \in (\xi, 1)$$

$$f'(\eta)f'(\zeta) = \frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0} \cdot \frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi} = 1$$



25武忠祥考研

【例5】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$ ，试证对任意给定的正数 a, b ，在 $(0,1)$ 内一定存在互不相同的 ξ, η ，使 $\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a + b$ 。

【分析】 $\frac{f(c)-f(0)}{c-0} = f'(\xi)$ $\xi \in (0, c)$

$\frac{f(1)-f(c)}{1-c} = f'(\eta)$ $\eta \in (c, 1)$

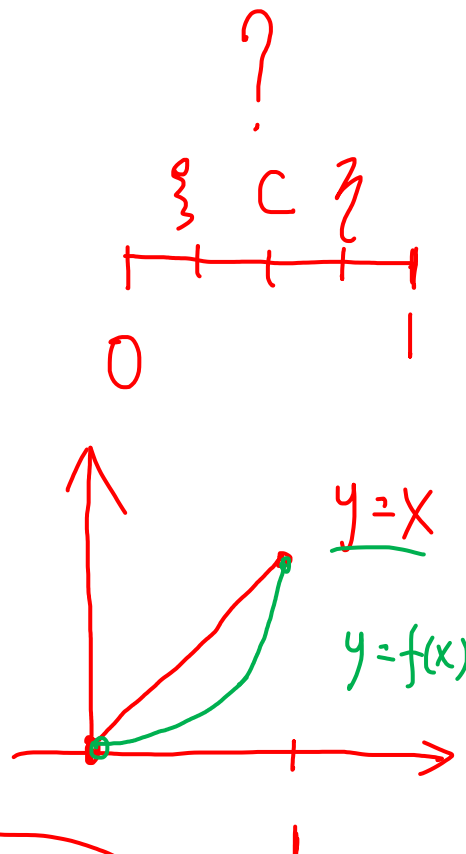
$$* \quad a \cdot \frac{c}{f(c)} + b \cdot \frac{1-c}{1-f(c)} = a + b$$

即要证

$$\frac{a}{a+b} \cdot \frac{c}{f(c)} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{1-c}{1-f(c)} = 1$$

$$\exists c, f(c) = \frac{a}{a+b}$$

$$f(0) < \frac{a}{a+b} < f(1) = 1$$



$$f(c) = c$$

$$y = f(x) \checkmark$$

$$y = x \checkmark \checkmark$$

25武忠祥考研

【例4】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$.

证明：(1) 存在 $\xi \in (0,1)$ ，使得 $f(\xi)=1-\xi$;

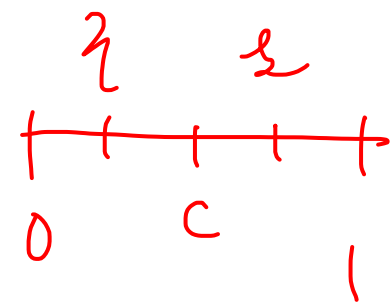
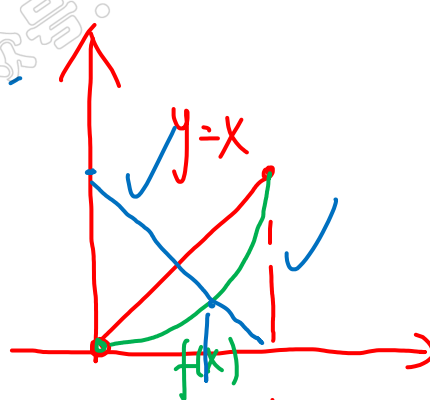
2) 存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0,1)$ ，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

$$\frac{f(c)-f(0)}{c-0} = f'(\eta)$$

$$\frac{f(1)-f(c)}{1-c} = f'(\zeta)$$

$$1 = f'(\eta)f'(\zeta) = \frac{f(c)}{c} \cdot \frac{1-f(c)}{1-c} = 1$$

$$f(c) = 1-c$$



$$y=1-x \Leftrightarrow x+y=1$$

$$y=f(x)$$

$$y=x$$

$$y=f(x)$$

$$y=1-x$$

(三) 证明存在一个中值点 $\xi \in (a, b)$,使

$$F[\xi, \underline{f^{(n)}(\xi)}] \geq 0 \quad (n \geq 2)$$

$x_0 = ?$

方法：用带拉格朗日余项的泰勒公式，其中 x_0 点选题目中
提供函数值和导数值信息多的点.

25武忠祥考研

【例1】设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, $f'(a) = f'(b) = 0$, 求证:

$$\exists \xi \in (a, b), \text{ 使 } |f''(\xi)| \geq 4 \frac{|f(b) - f(a)|}{(b-a)^2}.$$

$\frac{4}{(b-a)^2} = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{-2}$

【证】由泰勒公式知

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi_1)}{2!} (x-a)^2 \quad (1)$$

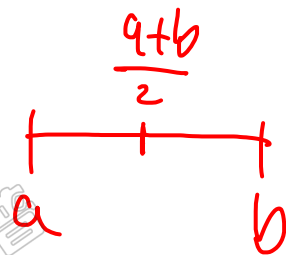
$$f(x) = f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{f''(\xi_2)}{2!} (x-b)^2 \quad (2)$$

令 $x = \frac{a+b}{2}$ 得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + \frac{f''(\xi_1)}{8} (b-a)^2$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{f''(\xi_2)}{8} (b-a)^2$$

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{8} [|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|]$$



25武忠祥考研

【例2】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上三阶可导, $f(0)=0, f(1)=1, f'(\frac{1}{2})=0$

求证: $\exists \xi \in (0,1)$, 使 $|f'''(\xi)| \geq 24$.

【证】由泰勒公式得

$$f(x) = f(\frac{1}{2}) + f'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) + \frac{f''(\frac{1}{2})}{2!}(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - \frac{1}{2})^3$$

在上式中令 $x=0$, 和 $x=1$ 得

$$0 = f(\frac{1}{2}) + \frac{f''(\frac{1}{2})}{2!} \frac{1}{4} - \frac{f'''(\xi_1)}{48}$$

$$1 = f(\frac{1}{2}) + \frac{f''(\frac{1}{2})}{2!} \frac{1}{4} + \frac{f'''(\xi_2)}{48}$$

$$48 = f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)$$

$$48 \leq |f'''(\xi_1)| + |f'''(\xi_2)| \leq 2 \max(|f'''(\xi_1)|, |f'''(\xi_2)|)$$

$x_0 = ?$

25武忠祥考研

【例3】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数, 且 $f(0)=f(1)=0$

$\min_{0 \leq x \leq 1} f(x) = -1$, 证明: $\max_{0 \leq x \leq 1} f''(x) \geq 8$. $\Leftrightarrow$

$f''(\xi) \geq 8$

【证】 设 $f(c) = \min_{0 \leq x \leq 1} f(x) = -1$, 则 $0 < c < 1$, 且 $f'(c) = 0$,

由泰勒公式知

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$$

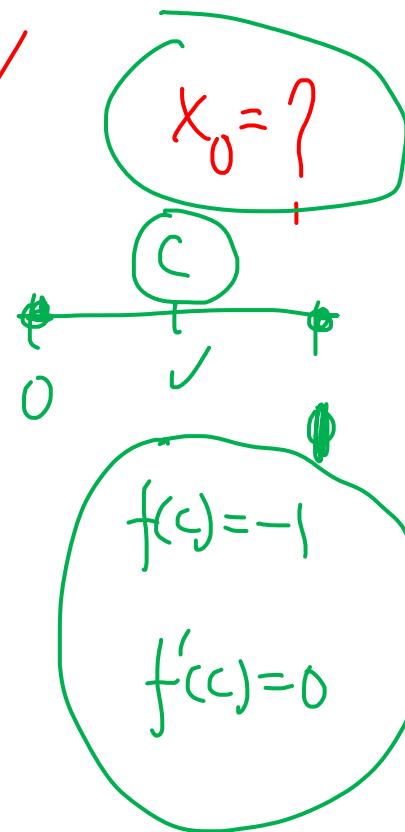
在上式中分别令 $x=0$ 和 $x=1$ 得

若 $c \leq \frac{1}{2}$, $f''(\xi_1) = \frac{2}{c^2} \geq \frac{2}{(\frac{1}{2})^2} = 8$

$\xi_1 \in (0, c)$

若 $c > \frac{1}{2}$, $f''(\xi_2) = \frac{2}{(1-c)^2} \geq \frac{2}{(1-\frac{1}{2})^2} = 8$

$\xi_2 \in (c, 1)$



25武忠祥考研

【例】(24年1, 2, 3) 设函数 $f(x)$ 具有2阶导数，且 $f'(0) = f'(1)$, $|f''(x)| \leq 1$,

证明：(I) 当 $x \in (0, 1)$ 时， $|f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x| \leq \frac{x(1-x)}{2}$;

$$(II) \left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0) + f(1)}{2} \right| \leq \frac{1}{12}.$$

$1 \leq \int_0^1 \frac{x(1-x)}{2} dx$

【证】(I) $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi_1)}{2}x^2(1-x)$ (1)

$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(x-1)^2x$ (2)

(1) $\times (1-x)$ + (2) $\times x$ 得

$$f(x) = f(0)(1-x) + f(1)x + \frac{f''(\xi_1)}{2}x^2(1-x) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(x-1)^2x$$

$$|f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x| \leq \left| \frac{f''(\xi_1)}{2}x^2(1-x) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(x-1)^2x \right|$$

$$\leq \frac{1}{2}[x^2(1-x) + (1-x)^2x] = \frac{x(1-x)}{2}$$

25武忠祥考研

$$(一) F[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$$

辅助函数 1. 分析法(还原法)

2. 微分方程法

3. 常用辅助函数 *

$$(二) F[\xi, \eta, f(\xi), f(\eta), f'(\xi), f'(\eta)] = 0$$

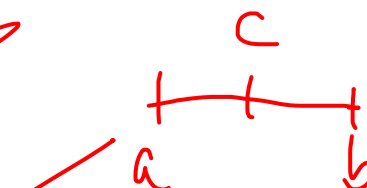
(1) 不要求 $\xi \neq \eta$

同

(2) 要求 $\xi \neq \eta$

分

拉. 柯
逆推法



$$(三) F[\xi, \underline{f^{(n)}(\xi)}] \geq 0 \quad (n \geq 2)$$

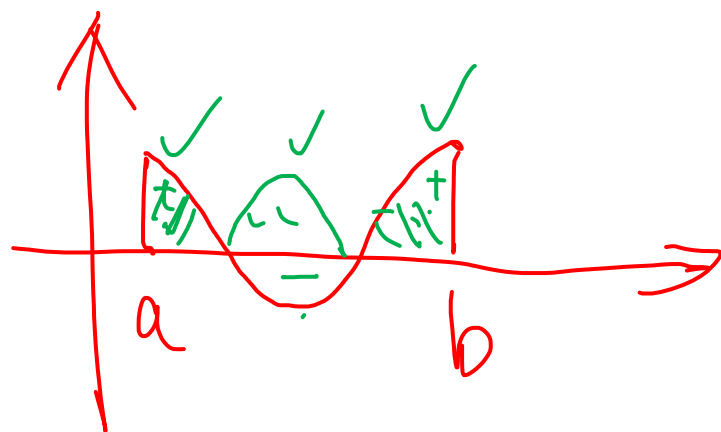
① 泰

② 拉.

③ $x_0 = ?$

25武忠祥考研

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$



$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

25武忠祥考研

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\left[\ln |F(x)| \right]' = \frac{F'(x)}{F(x)}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$x > 0$$

$$\begin{aligned} (\ln(-x))' &= \frac{1}{-x} (-1) \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$x < 0$$



还不关注，
你就慢了



25武忠祥考研