25高数强化（11）

11	常考题型举例(定积分的概念、性质、计算、变上限积分)	P105-P117

下：P118-126

主讲　武忠祥　教授

还不关注，你就慢了

题型一 定积分的概念、性质及几何意义

【例1】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\cdot\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$；

【解】令 $y_n=\left[(1+\frac{1^2}{n^2})(1+\frac{2^2}{n^2})\cdots(1+\frac{n^2}{n^2})\right]^{\frac{1}{n}}$

则 $\ln y_n=\frac{1}{n}\left[\ln(1+\frac{1^2}{n^2})+\ln(1+\frac{2^2}{n^2})+\cdots+\ln(1+\frac{n^2}{n^2})\right]$

$$\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$1$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln y_n=\int_0^1\ln(1+x^2)dx$$

$$=x\ln(1+x^2)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{2x^2}{1+x^2}dx=\ln 2-2(1-\frac{\pi}{4})$$

原式 $=e^{\ln 2-2(1-\frac{\pi}{4})}=2e^{\frac{\pi}{2}-2}$

【例2】设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$，则

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t}f(t)dt=\_\_\_\_\_.$$

2

【解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\dfrac{3}{t}f(t)dt$

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} 2c\sin\dfrac{3}{c}f(c) \qquad (x<c<x+2)$

$c\to+\infty$

积分中

=6

【例3】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{1+x^2}\,dx.$ $=0$?

$\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{1}{e}$

$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to 1$

【解1】 $0\le\int_0^1 x^n\sqrt{1+x^2}\,dx\le\sqrt{2}\int_0^1 x^n\,dx=\frac{\sqrt{2}}{n+1}\to 0$

$\le b_n\to 0$ $\quad 0<\frac{n}{n+1}<1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{n+1}=0$$

① 夹逼

$(c_n)^n\to 0$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{1+x^2}\,dx=0$

$\int_0^1 x^n\sqrt{1+x^2}\,dx=(c_n)^n\sqrt{1+c_n^2}\to 0$

$0<c_n<1$

$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\int_a^b g(x)dx$

【解2】由积分中值定理得 广义

$$\int_0^1 x^n\sqrt{1+x^2}\,dx=\sqrt{1+c_n^2}\int_0^1 x^n\,dx$$

$\int_0^1 x^n\,dx \to 0$ ② 积中

$\frac{1}{n+1}\to 0$

【例4】如图，连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2]$，$[2,3]$ 上的图形上的图形分别是直径为1的上、下半圆周，在区间 $[-2,0],[0,2]$ 上的图形分别是直径为2的下、上半圆周（图），设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

则下列结论正确的是.

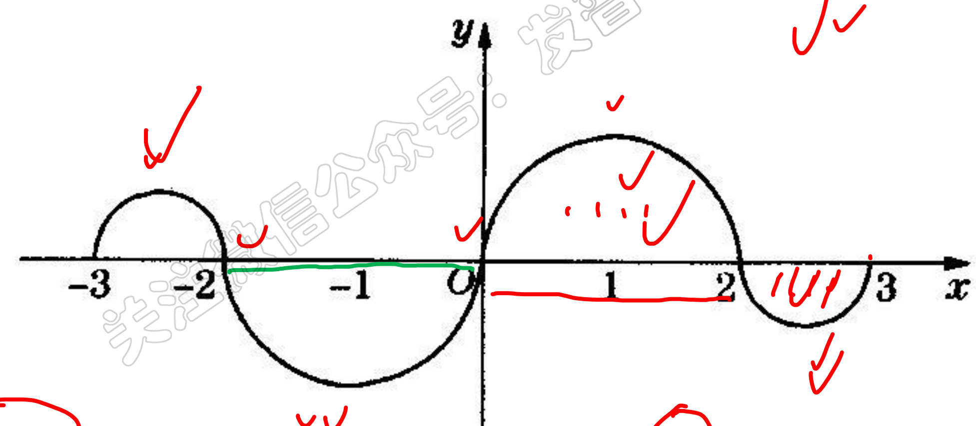
(A) $F(3)=-\frac{3}{4}F(-2)$

(B) $F(3)=\frac{5}{4}F(2)$

(C) $F(-3)=\frac{3}{4}F(2)$

(D) $F(-3)=-\frac{5}{4}F(-2)$

$F(-2)=F(2)>0$



【解】由图可知 $f(x)$ 是奇函数，则

$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶函数，则

$F(-3)=F(3)>0$

$\boxed{F(2)>F(3)}$

$\int_a^b f(x)\,dx$

$a<b$

[解] $F(2)=\int_0^2 f(t)dt=\frac{\pi}{2}$

$F(3)=\int_0^3 f(t)dt=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$F(-2)=\int_0^{-2} f(t)dt\ \cancel{-\frac{\pi}{2}}$

$=-\int_{-2}^0 f(t)dt=\frac{\pi}{2}$

题型二　定积分计算

偶　奇

【例1】 $I=\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+\sin x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$;

【解】 $I \overset{*}{=} 4\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$

$=4\int_0^1[1-\sqrt{1-x^2}]dx$

$=4-4\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$

$=4-\pi$

几何

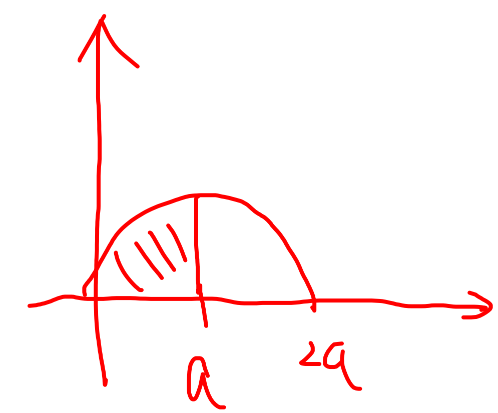
$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{4}$

$x^2+y^2=1$

$a>0$

$x^2+y^2=2ax$

$x^2+y^2=a^2$



【注】 $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{\pi}{4}a^2$;　$\int_0^a\sqrt{2ax-x^2}dx=\frac{\pi}{4}a^2$;

$\int_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}dx=\frac{\pi}{2}a^2$;

π

【例2】 $I=\int_0^{n\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\,dx;$

【解1】 原式 $\overset{*}{=} n\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin 2x}dx$?

$$= n\int_0^{\pi}\sqrt{(\cos x-\sin x)^2}dx$$

$$\overset{*}{=} n\int_0^{\pi}|\cos x-\sin x|dx$$

=0

$$\overset{*}{=} n\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)=2\sqrt{2}n$$

【解2】 原式 $= n\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\sqrt{1-\sin 2x}dx$

$$= n\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\sqrt{(\cos x-\sin x)^2}dx \overset{*}{=} n\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x-\cos x)dx=2\sqrt{2}n$$

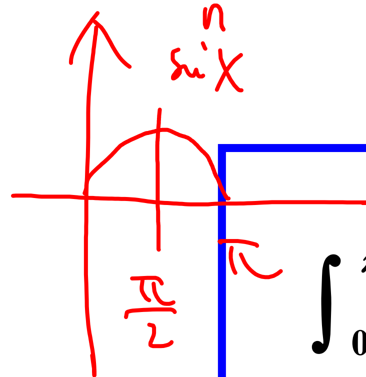
【例3】 $I=\int_0^{\pi} x\sin^n x dx$.

【解】 $I=\int_0^{\pi} x\sin^n x\, dx$

$$\overset{*}{=}\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^n x\, dx$$

$$\overset{*}{=}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\, dx$$

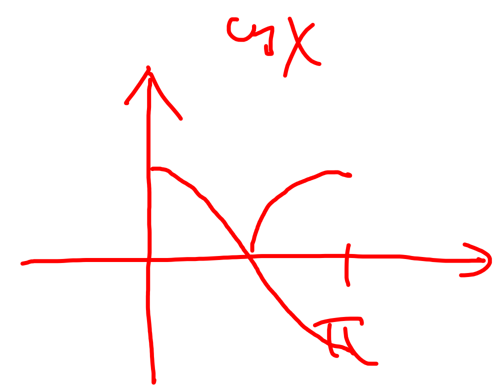
$$\overset{*}{=}\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}\cdot\pi, & n\text{为偶数}\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3}\cdot\pi, & n\text{为奇数}\end{cases}$$



$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

$$\int_0^{\pi}\sin^n x\, dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\, dx$$

$$\int_0^{\pi}\cos^n x dx=\begin{cases}0, & n\text{为奇数},\\ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx, & n\text{为偶数}.\end{cases}$$



【例4】设 n 为正整数，证明：

$$\int_0^{2\pi}\cos^n x dx=\int_0^{2\pi}\sin^n x dx=\begin{cases}0, & n\text{为奇数}, \\ 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx, & n\text{为偶数}.\end{cases}$$

【证】$\int_0^{2\pi}\cos^n x dx=\int_0^{2\pi}\sin^n(x+\frac{\pi}{2})dx \overset{x+\frac{\pi}{2}=t}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi+\frac{\pi}{2}}\sin^n t dt=\int_0^{2\pi}\sin^n x dx$

当 n 为奇数时，$\int_0^{2\pi}\sin^n x dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^n x dx=0$

当 n 为偶数时，$\int_0^{2\pi}\sin^n x dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^n x dx=2\int_0^{\pi}\sin^n x dx$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$$

$f(0)=0$

【例6】 设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}dt$，计算 $\int_0^\pi f(x)dx$.

【解1】 $\int_0^\pi f(x)dx = xf(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{x\sin x}{\pi-x}dx$

$d(x-\pi)$

$$= \pi\int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi-t}dt - \int_0^\pi \frac{x\sin x}{\pi-x}dx$$

$$= \int_0^\pi \sin x dx = 2$$

分部 ①

【解2】 $\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi f(x)d(x-\pi)$

$$=(x-\pi)f(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{(x-\pi)\sin x}{\pi-x}dx = \int_0^\pi \sin x dx = 2$$

【解3】 $\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi dx\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}dt$

$$= \int_0^\pi dt\int_t^\pi \frac{\sin t}{\pi-t}dx = \int_0^\pi \sin x dx = 2.$$

累次交换 ②

$f(x)-f(x-\pi)=\sin x$

【例7】设连续函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足 $f(x)=f(x-\pi)+\sin x$，且 $\int_0^{\pi} f(x)dx=\frac{\pi^2}{2}$，则 $\int_{\pi}^{3\pi} f(x)dx=$ ________.

【解】令 $F(x)\overset{*}{=}\int_{x-\pi}^{x} f(t)dt$，则 $F'(x)=f(x)-f(x-\pi)=\sin x$

$$F(x)=-\cos x+C$$

$$F(\pi)=\int_0^{\pi} f(x)dx=\frac{\pi^2}{2}$$

$$F(x)=-\cos x+\frac{\pi^2}{2}-1$$

$$\int_{\pi}^{3\pi} f(x)dx=\int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx+\int_{2\pi}^{3\pi} f(x)dx=F(2\pi)+F(3\pi)=\pi^2-2$$

$$\boxed{\int \frac{a\sin x + b\cos x}{c\sin x + d\cos x}dx = \int \frac{A(c\cos x - d\sin x) + B(c\sin x + d\cos x)}{c\sin x + d\cos x}dx}$$

【例8】 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx$

【解1】 令 $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx = \int \frac{A(\cos x - \sin x) + B(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x}dx$

$$\int \frac{\sin x - 2\cos x}{3\sin x + 7\cos x}dx$$

则 $\begin{cases} 1 = -A + B \\ 0 = A + B \end{cases}$，解得 $A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x - \cos x) + (\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x}dx = \frac{1}{2}[-\ln(\sin x + \cos x) + x]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

【解2】 令 $x = \frac{\pi}{2} - t$，则

$$\int \frac{\sin x}{2\sin x - 5\cos x}dx$$

* $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}dt$ *

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx\right] = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{4}$$

$A=B = \dfrac{A+B}{2}$

区间不变

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \xlongequal{x=a+b-t} \int_a^b f(a+b-t)dt}$$

$dx=-dt$

【例9】 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^x}{1+e^x}\sin^4 x\,dx$；

$B=A=\dfrac{A+B}{2}$

【解】 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^x}{1+e^x}\sin^4 x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{-t}}{1+e^{-t}}\sin^4 t\,dt \quad (x=-t)$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+e^{\cancel{t}}}\sin^4 \cancel{t}\,d\cancel{t}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+e^x}\sin^4 x\,dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+e^x}\sin^4 x\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16}$$

10:06

【例10】 已知 $f(x)$ 连续，$\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t = 1-\cos x$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ 的值.

f(x)

【解】 令 $x-t=u$，得

$$\int_0^x tf(x-t)dt = \int_0^x (x-u)f(u)du$$

$$= x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x-t)dt = \int_0^x f(u)du + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(u)du$$

从而有 $\boxed{\int_0^x f(u)du = \sin x}$

令 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 得 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$

【例11】设 $f'(x)=\arcsin(x-1)^2$，$f(0)=0$，求 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

【解1】$\int_0^1 f(x)dx = xf(x)\big|_0^1 - \int_0^1 x\arcsin(x-1)^2 dx$

$= f(1) - \int_0^1 x\arcsin(x-1)^2 dx$

$= \int_0^1 f'(x)dx - \int_0^1 x\arcsin(x-1)^2 dx$

$= \int_0^1 (1-x)\arcsin(x-1)^2 dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 \arcsin u\,du \qquad ((x-1)^2 = u)$

$= \frac{1}{2}u\arcsin u\big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}du = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

$\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0)$

【解2】$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)d(x-1)$

$= (x-1)f(x)\big|_0^1 - \int_0^1 (x-1)\arcsin(x-1)^2 dx$

$= \int_0^1 (1-x)\arcsin(x-1)^2 dx$

【例12】 若 $f(x)=\dfrac{x}{1+\cos^2 x}-\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,dx$，求 $f(x)$.

$f'(x)$

$\int_{-\pi}^{\pi} C\sin x\,dx=0$

【解】 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$$=2\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\pi\arctan\cos x\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{\pi^2}{2}$$

$\int_a^b f(x)dx$

题型三 变上限积分函数及其应用

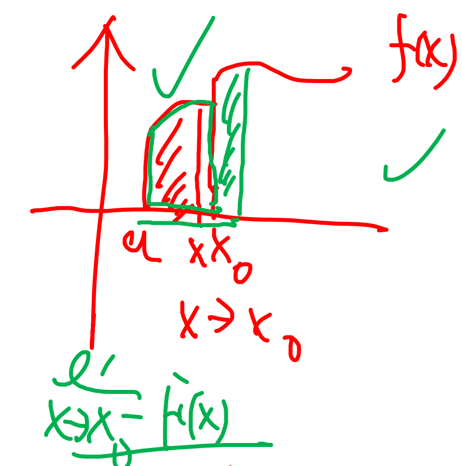
1) 连续性 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\int_a^x f(t)\,dt$ 在 $[a,b]$ 上连续.

2) 可导性 $\int_a^x f(t)\,dt$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的原函数

定理 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\int_a^x f(t)\,dt$ 在 $[a,b]$ 上可导且 $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$.

有关 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在一点处的可导性的结论

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除点 $x=x_0\in(a,b)$ 外均连续，则在点 $x=x_0$ 处

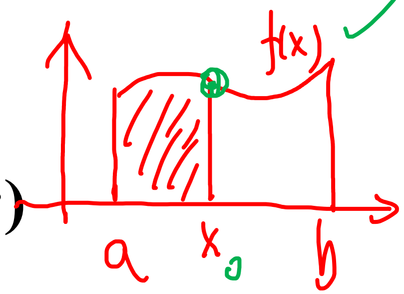


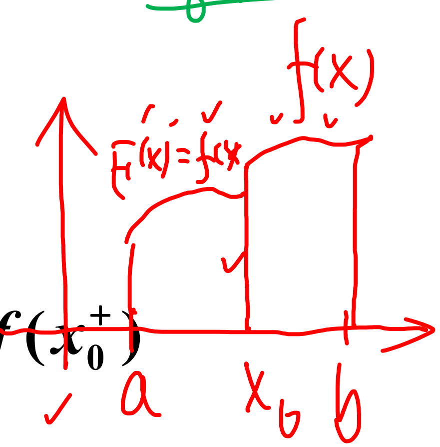
$f(x)$ $\qquad$ $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ —— f(x)原函数

1) 连续 $\longrightarrow$ 可导，且 $F'(x_0)=f(x_0)$

2) 可去 $\longrightarrow$ 可导，且 $F'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

3) 跳跃 $\longrightarrow$ 连续但不可导，且 $F'_-(x_0)=f(x_0^-)$ $F'_+(x_0)=f(x_0^+)$





3) 奇偶性 设 $f(x)$ 连续，则

1）若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数.

a

2）若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 为奇函数.

【例1】设 $f(x)$ 是奇函数，除 $x=0$ 外处处连续，

$f(x)$ 可积！

$x=0$ 是第一类间断点，则 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是：__________.

(A) 连续的奇函数；

(B) 在 $x=0$ 间断的奇函数；

(C) 连续的偶函数；

(D) 在 $x=0$ 间断的偶函数.

【例2】设 $g(x)=\int_{0}^{x} f(u)\mathrm{d}u$，其中

可积，$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x^{2}+1), & 若0\le x<1,\\ \frac{1}{3}(x-1), & 若1\le x\le 2,\end{cases}$ 必连续

则 $g(x)$ 在区间（0, 2）内

（A）无界　　（B）递减　　（C）不连续　　（D）连续

【例3】 设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则

√（A）$f(x)$ 是奇函数 $\Rightarrow F(x)$ 必是偶函数；

X（B）$f(x)$ 是偶函数 $\Rightarrow F(x)$ 必是奇函数；

X（C）$f(x)$ 是周期函数 $\Rightarrow F(x)$ 必是周期函数；

X（D）$f(x)$ 是单调函数 $\Rightarrow F(x)$ 必是单调函数；

$\frac{1}{3}x^3+C$

$F'(x)=f(x)$

$x^2=f(x)$

$\sin x+x$

$\cos x+1$

$\frac{1}{2}x^2+C$

$\int_0^x f(t)dt+C$

$f(0)$

【例4】 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，“$M \Leftrightarrow N$”表示“M 的充分必要条件是 N”，则必有

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数

【例5】 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x<\pi,\\ 2, & \pi\le x\le 2\pi,\end{cases}$ $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则

（A） $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点；

（B） $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点；

（C） $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导；

（D） $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导；

【解1】 $F(x)=\int_0^x f(t)dt=\begin{cases}\int_0^x \sin t dt, & 0\le x<\pi,\\ \int_0^{\pi}\sin t dt+\int_{\pi}^x 2dt, & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$

$$=\begin{cases}1-\cos x, & 0\le x<\pi,\\ 2+2x-2\pi, & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$$

【解2】 $x=\pi$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点，$F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导；

【例6】 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$. $\dfrac{0}{0}$

【解1】 $\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x f(u)du \qquad (x-t=u)$

洛

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(t)dt}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(t)dt+xf(x)}$$

积中

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x f(t)dt+xf(x)}\overset{*}{=}\lim_{x\to 0}\frac{xf(c)}{xf(c)+xf(x)}=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2}$$

【例6】 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$.

【解2】 $\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x f(u)du \qquad (x-t=u)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)}{xf(0)}=\dfrac{f(0)}{f(0)}=1$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(t)dt}$$

$$=1-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(t)dt}$$

等价

$$=1-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(0)dt}{x\int_0^x f(0)dt}=1-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}f(0)}{x^2 f(0)}=\frac{1}{2}$$

【例6】 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$.

$f(0)\neq 0$

【解3】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\xi)\int_0^x (x-t)dt}{x^2 f(x-c)}$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}$

$=\dfrac{1}{2}$

③ 积中

② 等价

① 洛

$\dfrac{\xi}{x}\to ?$

【例7】 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\cdot\sin t\,dt$，则 $F(x)$

A) 为正常数　　B) 为负常数　　C) 为0　　D) 不是常数

$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx=C$

【解1】 由于 $F'(x)=e^{\sin(x+2\pi)}\sin(x+2\pi)-e^{\sin x}\sin x=0$ 知 $F(x)\equiv C$

$F'(x)\equiv 0$

$$F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt=\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt=C$$

$$F(0)=\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt$$

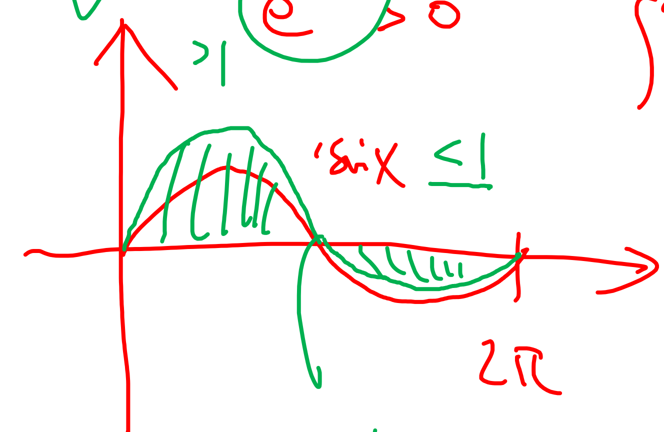
$$=-\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\,d\cos t$$

$$=-e^{\sin t}\cos t\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\cos^2 t\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\cos^2 t\,dt>0$$

$e^{\sin x}>0$

$\int_0^{2\pi}\sin x\,dx=0$



$e^{\sin x}\sin x$

【例9】 设 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，且其反函数为 $g(x)$. 若 $\int_0^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t = x^2e^x$，求 $f(x)$.

【解】 等式 $\int_0^{f(x)} g(t)dt = x^2e^x$ 两端对 x 求导得

$$g[f(x)]f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$$

而 $g[f(x)] = x$

则 $xf'(x) = 2xe^x + x^2e^x$

即 $f'(x) = 2e^x + xe^x \qquad (x \neq 0)$

$$f(x) = \int (2e^x + xe^x)dx = (x+1)e^x + C \qquad (x \neq 0)$$

$$0 = f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}[(x+1)e^x + C] = 1 + C$$

$$C = 0 - 1 = -1$$

偶 ✓

【例11】设 $f(t)$ 连续，$f(t)>0$, $f(-t)=f(t)$. 令

$$F(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|f(t)dt. \qquad -a\le x\le a$$

1）试证曲线 $y=F(x)$ 在 $[-a,a]$ 上是凹的.

$F''(x)\ge 0$

2）当 x 为何值时，$F(x)$ 取得最小值.

3）若 $F(x)$ 的最小值可表示为 $f(a)-a^2-1$. 试求 $f(t)$.

【解】1）

$$F(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|f(t)dt=\int_{-a}^{x}(x-t)f(t)dt+\int_{x}^{a}(t-x)f(t)dt$$

$$=x\int_{-a}^{x}f(t)dt-\int_{-a}^{x}tf(t)dt+\int_{x}^{a}tf(t)dt-x\int_{x}^{a}f(t)dt$$

$$F'(x)=\int_{-a}^{x}f(t)dt+xf(x)-xf(x)-xf(x)+xf(x)-\int_{x}^{a}f(t)dt$$

$$=\int_{-a}^{x}f(t)dt-\int_{x}^{a}f(t)dt=0$$

$-a$ x a

$$F''(x) = f(x) + f(x) = 2f(x) > 0$$

2）令 $F'(x) = \int_{-a}^{x} f(t)dt - \int_{x}^{a} f(t)dt = 0$

f(x)偶，

得 $F'(0) = 0$，又 $F''(x) > 0$，

$F''(0) > 0$

$F(x)$ 在 $x = 0$ 取最小值.

极小 + 唯一

最小

3）$F(0) = \int_{-a}^{a} |t| f(t)dt = 2\int_{0}^{a} tf(t)dt$

$$2\int_{0}^{a} tf(t)dt = f(a) - a^2 - 1$$

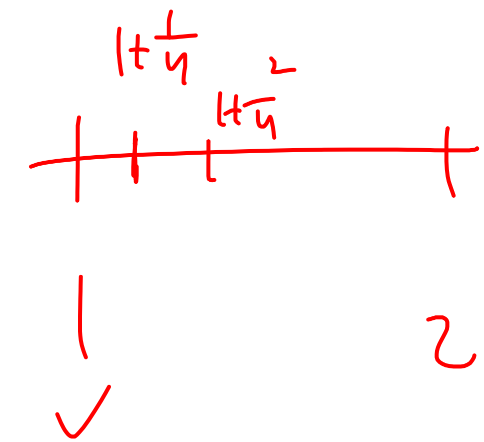
$$2af(a) = f'(a) - 2a$$

$$f(a) = Ce^{a^2} - 1$$

又 $f(0) = 1$，则 $C = 2$

从而 $f(t) = 2e^{t^2} - 1$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$



$$\int_1^2 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(1+\frac{i}{n}\right)$$