

25高数强化 (17)

17	多元函数的极值、最大最小值及举例，二重积分概念、计算	P172-P184
----	----------------------------	-----------

下 p185-198

主讲 武忠祥 教授



还不关注，
你就慢了



第三节 极值与最值

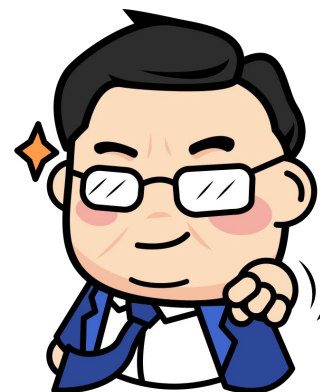
本节内容要点

一. 考试内容要点精讲

(一) 无条件极值

(二) 条件极值与拉格朗日乘数法

(三) 最大最小值



还不关注，
你就慢了



二. 常考题型方法与技巧

题型一 求无条件极值

题型二 求最大最小值

一. 考试内容要点精讲

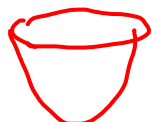
25武忠祥考研

(一) 无条件极值

1) 定义: ✓ 极大: $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$;

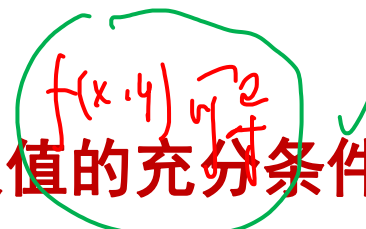
✓ 极小: $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$;

✓ 2) 极值的必要条件 $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$ (可导)

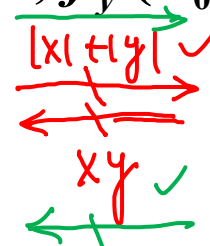


0

3) 极值的充分条件

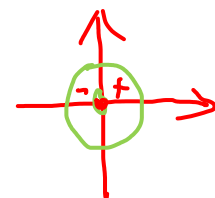


极值点



驻点

(0,0)



$$A = f_{xx}$$

$$C = f_{yy}$$

设 $f_x(x_0, y_0) = 0$, 且 $f_y(x_0, y_0) = 0$

(1) 当 $AC - B^2 > 0$ 时, 有极值

$$\begin{cases} A > 0 & \text{极小值} \\ A < 0 & \text{极大值} \end{cases}$$

(2) 当 $AC - B^2 < 0$ 时, 无极值.

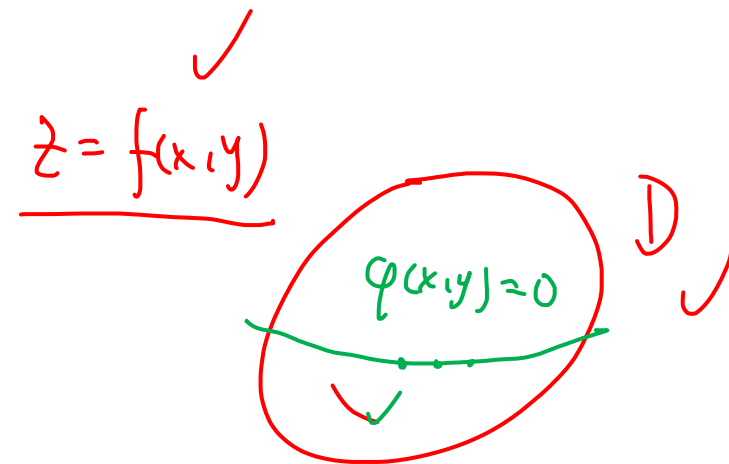
(3) 当 $AC - B^2 = 0$ 时, 不一定(一般用定义判定).

(二) 条件极值与拉格朗日乘数法

1) 函数 $f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 条件下的极值.

令 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$

$$\begin{cases} F_x = f'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) = 0, \\ F_y = f'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) = 0, \\ F_\lambda = \varphi(x, y) = 0, \end{cases}$$



2) 函数 $f(x, y, z)$ 在条件 $\varphi(x, y, z) = 0, \psi(x, y, z) = 0$ 条件下的条件极值.

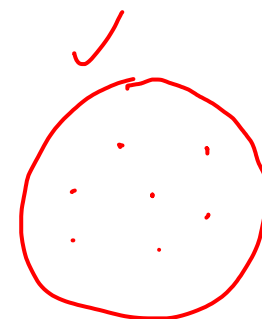
令 $F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z) + \mu \psi(x, y, z)$

(三) 最大最小值



25武忠祥考研

✓ 1. 求连续函数 $f(x, y)$ 在有界闭域 D 上的最大最小值



1) 求 $f(x, y)$ 在 D 内部可能的极值点.

* 2) 求 $f(x, y)$ 在 D 的边界上的最大最小值. 求

3) 比较 ✓

✓ 2. 应用题

1) $z = z(x, y)$

②

题型一 求无条件极值

【例1】求函数 $z = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2$ 的极值.

【例2】求函数 $f(x, y) = xy(a - x - y)$ 的极值.

① 充
✓

② 充
✓

充

【例3】求由方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$

所确定函数 $z = z(x, y)$ 的极值.

【解1】

$$\begin{cases} 2x + 2zz_x - 2 - 4z_x = 0, \\ 2y + 2zz_y + 2 - 4z_y = 0. \end{cases}$$

令 $z_x = 0, z_y = 0$ 得 $x = 1, y = -1$ 驻点为 $(1, -1, 6)$ 和 $(1, -1, -2)$.

② $2 + 2(z_x)^2 + 2zz_{xx} - 4z_{xx} = 0$

$$2z_y z_x + 2zz_{xy} - 4z_{xy} = 0$$

$$A = z_{xx} = \frac{1 + (z_x)^2}{2 - z}, \quad z_{xy} = \frac{z_x \cdot z_y}{2 - z} = B$$

$$2 + 2(z_y)^2 + 2zz_{yy} - 4z_{yy} = 0 \quad C = z_{yy} = \frac{1 + (z_y)^2}{2 - z}$$

【例3】求由方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$

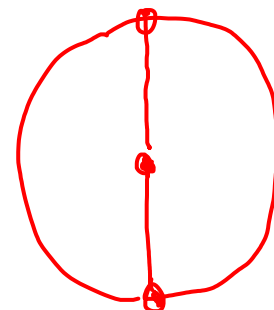
所确定函数 $z = z(x, y)$ 的极值.

【解2】 $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 16$

$$z = 2 \pm \sqrt{16 - (x-1)^2 - (y+1)^2}$$

$(1, -1, 2)$

✓ 极大.



$(1, -1, 2)$

极小
✓

【例4】设 $f(x, y)$ 有二阶连续导数， $g(x, y) = f(e^{xy}, x^2 + y^2)$

25武忠祥考研

且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) + x + y - 1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = 0$ ，证明 $g(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点取得极值，判断此极值是极大值还是极小值，并求出此极值。

【解】由题设 $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) + x + y - 1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = 0$ 知

$$* \begin{cases} f(x, y) = \frac{A}{\rho}(x-1) + \frac{B}{\rho}y + o(\rho) \end{cases} \quad \text{其中 } \rho = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

$$A = -2 < 0 \text{ 且 } \rho$$

$$AC - B^2 = 4 - 1 = 3 > 0$$

则 $f(1, 0) = 0$ $f'_x(1, 0) = f'_y(1, 0) = -1$

$$g'_x = f'_1 \cdot e^{xy} y + f'_2 \cdot 2x \quad g'_y = f'_1 \cdot e^{xy} x + f'_2 \cdot 2y, \quad g'_x(0, 0) = 0, g'_y(0, 0) = 0.$$

$$g''_{x^2} = (f''_{11} \cdot e^{xy} y + f''_{12} \cdot 2x)e^{xy} y + f'_1 \cdot e^{xy} y^2 + (f''_{21} \cdot e^{xy} y + f''_{22} \cdot 2x)2x + 2f'_2,$$

$$g''_{xy} = (f''_{11} \cdot e^{xy} x + f''_{12} \cdot 2y)e^{xy} y + f'_1 \cdot (e^{xy} xy + e^{xy}) + (f''_{21} \cdot e^{xy} x + f''_{22} \cdot 2y)2x,$$

$$g''_{y^2} = (f''_{11} \cdot e^{xy} x + f''_{12} \cdot 2y)e^{xy} x + f'_1 \cdot e^{xy} x^2 + (f''_{21} \cdot e^{xy} x + f''_{22} \cdot 2y)2y + 2f'_2,$$

$$A = 2f'_2(1, 0) = -2, B = f'_1(1, 0) = -1, C = 2f'_2(1, 0) = -2,$$

$$g(0, 0) = f(1, 0) = 0$$

$$f(x,y) - f(1,0) = \tilde{A}(x-1) + \tilde{B}(y-0) + o(\rho) \quad A = f_x(1,0) \quad B = f_y(1,0)$$

【例4】设 $f(x,y)$ 有二阶连续导数， $g(x,y) = f(e^{xy}, x^2 + y^2)$

且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y) + x + y - 1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = 0$ ，证明 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点取得

极值，判断此极值是极大值还是极小值，并求出此极值。

【解】由题设 $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y) + x + y - 1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = 0$ 知

$$f(x,y) = o(x-1) + o(y) + o(\rho)$$

$$\text{其中 } \rho = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

先求偏导

$$\text{则 } f(1,0) = 0 \quad f'_x(1,0) = f'_y(1,0) = -1$$

$$g'_x = f'_1 \cdot e^{xy} y + f'_2 \cdot 2x \quad g'_y = f'_1 \cdot e^{xy} x + f'_2 \cdot 2y, \quad g'_x(0,0) = 0, g'_y(0,0) = 0.$$

$$g'_x(x,0) = 2x f'_2(1, x^2)$$

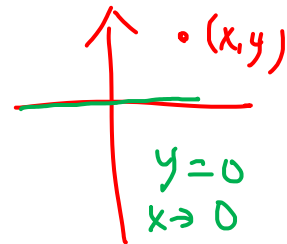
$$g''_{xx}(x,0) = 0 + 2 f'_2(1, x^2) \quad x=0$$

$$A = 2 f'_2(1,0) = -2$$

B

C

【例5】设 $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续, 且 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y)}{\sin(x^2 + y^2)} = -1$ 则



- A) $f_x(0, 0)$ 不存在;
 B) $f_x(0, 0)$ 存在但不为零;
 C) $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取极小值;
 D) $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取极大值;

【解1】直接法. 由 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y)}{\sin(x^2 + y^2)} = -1 < 0$ 知, $f(0, 0) = 0$

① 且存在 $(0, 0)$ 点的去心邻域, 使

$$\frac{f(x, y)}{\sin(x^2 + y^2)} < 0, \text{ 从而 } f(x, y) < 0 = f(0, 0)$$

【解2】排除法 取 $f(x, y) = -(x^2 + y^2) < 0$
 $f_x(0, 0) = 0$

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x^2} = -1$$

【例6】已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某个邻域内连续, 且 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$, 则

A) 点 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点;

B) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极大值点;

C) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值点;

D) 根据所给条件无法判断点 $(0, 0)$ 是否是 $f(x, y)$ 的极值点;

【解】由 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$ 知 $f(0,0) = 0$ 且

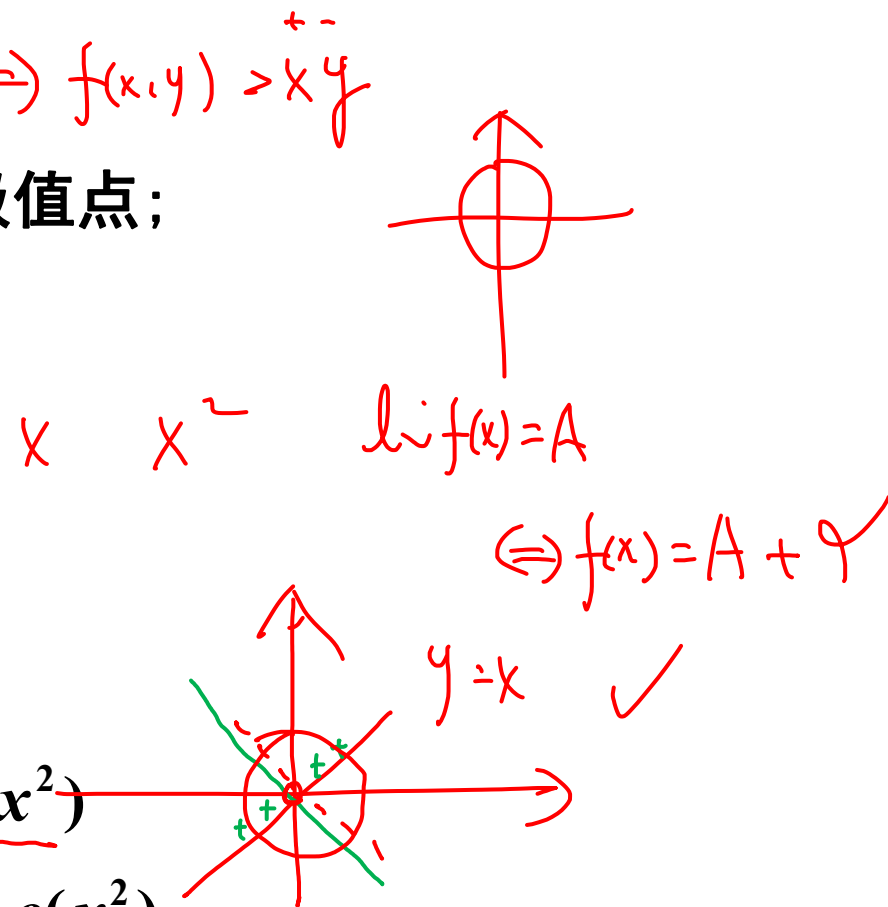
$$\frac{f(x,y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1 + \alpha$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \alpha = 0$$

则 $f(x,y) = xy + (1 + \alpha)(x^2 + y^2)^2$

* 令 $y = x$ 得: $f(x, x) = x^2 + 4x^4 + 4\alpha x^4 = x^2 + o(x^2)$

* 令 $y = -x$ 得: $f(x, -x) = -x^2 + 4x^4 + 4\alpha x^4 = -x^2 + o(x^2)$

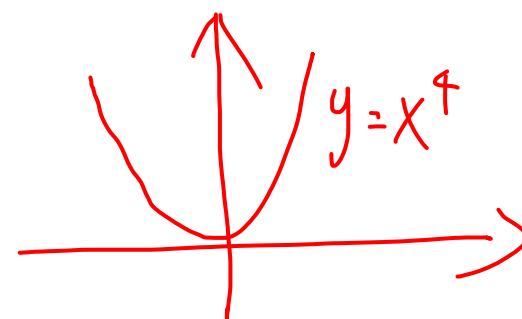


25武忠祥考研

【例6】已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某个邻域内连续, 且 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$ 则

- ✓ A) 点 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点;
 B) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极大值点;
 C) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值点;
 D) 根据所给条件无法判断点 $(0, 0)$ 是否是 $f(x, y)$ 的极值点;

Handwritten notes:
 $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} = 0$
 $y = x^m = x^4$



- (C) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值点
 (D) 根据所给条件无法判断 $(0, 0)$ 是否为 $f(x, y)$ 的极值点

* 解 令 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则由题设可知
 $f(x, y) = xy + \rho^4 + o(\rho^4)$,
 当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, $\rho \rightarrow 0$.
 由于 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 附近的值主要由 xy 决定 而 xy 在 $(0, 0)$ 附近符号不定, 故
 点 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点, 即应选 (A).

Handwritten calculations:
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + x^8)^2}{x^5} = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 2x^{10} + x^{16}}{x^5} = 0$

题型二 求最大最小值

25武忠祥考研

【例1】求函数 $z = x^2 y(4 - x - y)$ 在直线 $x + y = 6$, x 轴和 y 轴所围成的区域 D 上的最大值和最小值.

【解】 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy(4 - x - y) - x^2 y = xy(8 - 3x - 2y) = 0$
 $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2(4 - x - y) - x^2 y = x^2(4 - x - 2y) = 0$

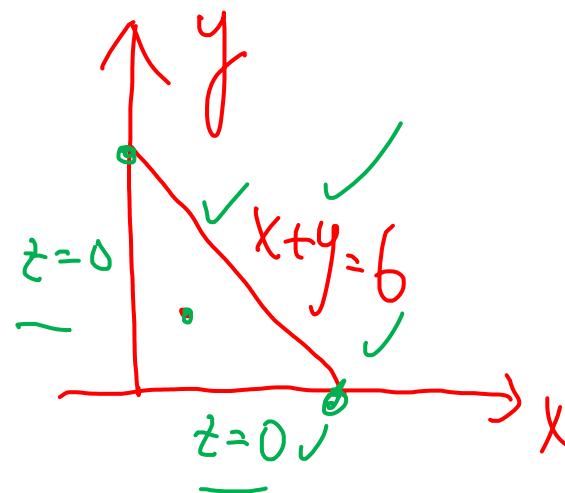
由 $\begin{cases} 3x + 2y = 8, \\ x + 2y = 4, \end{cases}$ 可得 $(2, 1)$ 且 $z(2, 1) = 4$

在边界 $x + y = 6 (0 \leq x \leq 6)$ 上, $z(x, y) = 2(x^3 - 6x^2) (0 \leq x \leq 6)$

令 $\varphi(x) = 2(x^3 - 6x^2)$,

由 $\varphi'(x) = 0$, 得 $x = 4$

$\varphi(0) = 0, \varphi(4) = -64, \varphi(6) = 0$



【例2】求函数 $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ 在 $x^2 + y^2 \leq 25$ 上的最大值与最小值.

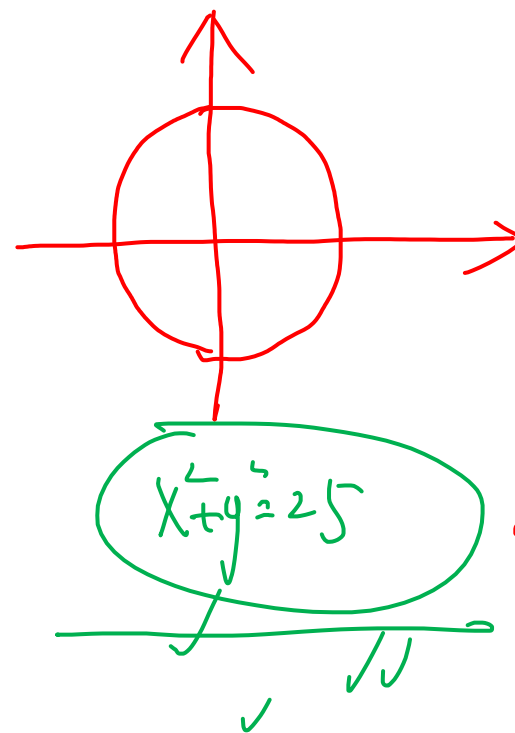
【解1】① 由
$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 12 = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 16 = 0, \end{cases}$$
 得 $x = 6, y = -8.$

② $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 12x + 16y + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$

$$= 25 - 12x + 16y + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$$

由
$$\begin{cases} F_x = -12 + 2\lambda x = 0, \\ F_y = 16 + 2\lambda y = 0, \\ F_\lambda = x^2 + y^2 - 25 = 0, \end{cases}$$
 解得
$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = -4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -3, \\ y_2 = 4. \end{cases}$$

$z(3, -4) = -75, z(-3, 4) = 125$



【例2】求函数 $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ 在 $x^2 + y^2 \leq 25$ 上的最大值与最小值. ✓

【解2】 $x^2 + y^2 = 25,$ $\begin{cases} x = \underline{5\cos\theta}, \\ y = \underline{5\sin\theta}, \end{cases} \quad \underline{0 \leq \theta \leq 2\pi}$

$$z = 25 - \underline{60\cos\theta} + \underline{80\sin\theta}$$

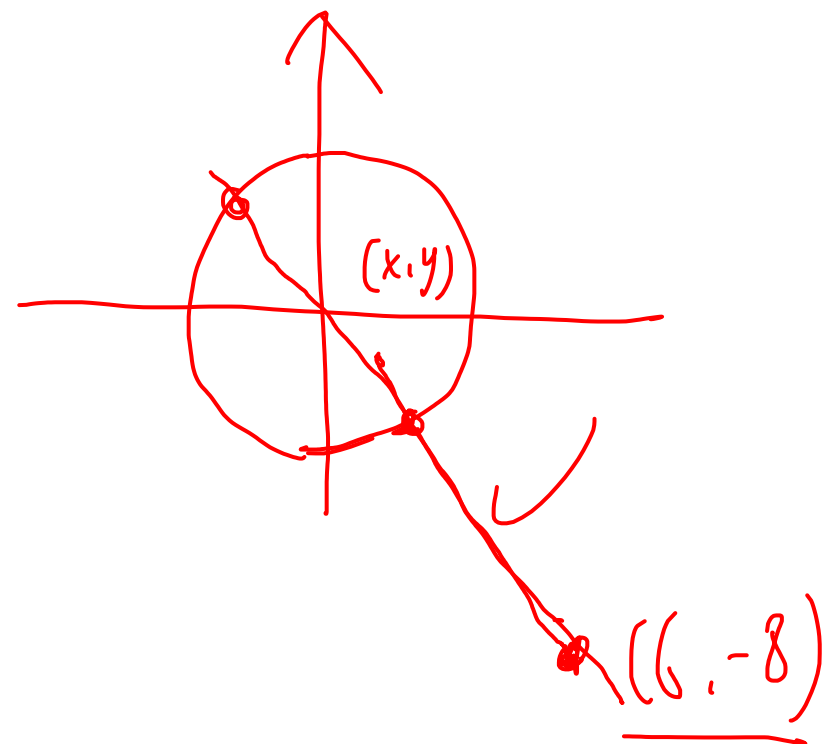
【例2】求函数 $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ 在 $x^2 + y^2 \leq 25$ 上的最大值与最小值.

【解3】 $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y = (x-6)^2 + (y+8)^2 - 100$

过原点和点 $(6, -8)$ 的直线为 $y = -\frac{4}{3}x$.

由 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = -\frac{4}{3}x, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = -4, \end{cases} \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = 4 \end{cases}$

$z(3, -4) = -75, z(-3, 4) = 125$



【例3】求函数 $u = xy + 2yz$ 在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 下的最大值与最小值.

【解】令 $F(x, y, z, \lambda) = xy + 2yz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 10)$

$$\textcircled{1} \begin{cases} F'_x = y + 2\lambda x = 0 & \textcircled{1} \\ F'_y = x + 2z + 2\lambda y = 0 & \textcircled{2} \\ F'_z = 2y + 2\lambda z = 0 & \textcircled{3} \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0 & \textcircled{4} \end{cases}$$

$$2\lambda x = \lambda z \Leftrightarrow \lambda(2x - z) = 0$$

$$\textcircled{1} \lambda \neq 0 \rightarrow z = 2x$$

$$y = 5x$$

$$\textcircled{2} \lambda = 0, \quad y = 0, \quad x + 2z = 0$$

1) 当 $\lambda \neq 0$ 时, $2x = z, 5x^2 = y^2$,

$$P_1(1, \sqrt{5}, 2); P_2(-1, \sqrt{5}, -2); P_3(1, -\sqrt{5}, 2); P_4(-1, -\sqrt{5}, -2);$$

2) 当 $\lambda = 0$ 时, $y = 0, x + 2z = 0$,

$$P_5(2\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}); P_6(-2\sqrt{2}, 0, \sqrt{2});$$

$$\textcircled{2} u(P_1) = u(P_4) = 5\sqrt{5}; \quad u(P_2) = u(P_3) = -5\sqrt{5}; \quad u(P_5) = u(P_6) = 0;$$

【例4】在椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 上求一点, 使其到直线

$2x + 3y - 6 = 0$ 的距离最短.

【解1】 $d = \frac{|2x + 3y - 6|}{\sqrt{13}}$, $*d^2 = \frac{(2x + 3y - 6)^2}{13}$

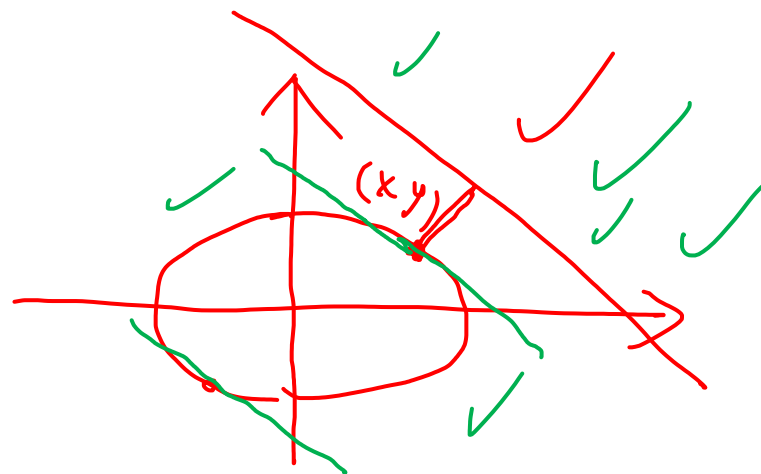
$*F(x, y, \lambda) = (2x + 3y - 6)^2 + \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)$

$$\begin{cases} F_x = 4(2x + 3y - 6) + 2\lambda x = 0, \\ F_y = 6(2x + 3y - 6) + 8\lambda y = 0, \\ F_\lambda = x^2 + 4y^2 - 4 = 0, \end{cases}$$

从而得 $\begin{cases} x_1 = \frac{8}{5}, \\ y_1 = \frac{3}{5}, \end{cases} \begin{cases} x_2 = -\frac{8}{5}, \\ y_2 = -\frac{3}{5}, \end{cases}$

$d|_{(x_1, y_1)} = \frac{1}{\sqrt{13}}, d|_{(x_2, y_2)} = \frac{11}{\sqrt{13}}$

由本题实际意义知最短距离存在, 则点 $(\frac{8}{5}, \frac{3}{5})$ 为所求的点.



【解2】 直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 的斜率为 $k = -\frac{2}{3}$ ✓

* 由 $x^2 + 4y^2 = 4$ 知 $2x + 8yy' = 0$, $y' = -\frac{x}{4y}$ ✓ ✓

$$-\frac{2}{3} = -\frac{x}{4y} \quad \text{即} \quad \underline{8y = 3x}$$

将 $8y = 3x$ 与 $x^2 + 4y^2 = 4$ 联立得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8}{5}, \\ y_1 = \frac{3}{5}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{8}{5}, \\ y_2 = -\frac{3}{5}. \end{cases}$$

由几何意义知, 点 $(\frac{8}{5}, \frac{3}{5})$ 应为所求的点.

【例5】 已知三角形周长为 $2p$ ，求使它绕自己的一边旋转时所构成旋转体体积最大的三角形.

【解】 $V = \frac{\pi}{3} h^2 y$

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)} = \frac{1}{2} y h$$

$$V = \frac{4}{3} \pi p \frac{(p-x)(p-y)(p-z)}{y}$$

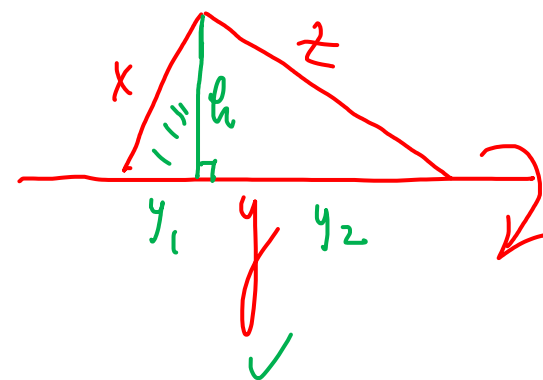
$$F(x, y, z, \lambda) = \ln(p-x) + \ln(p-y) + \ln(p-z) - \ln y + \lambda(x+y+z-2p)$$

$$x = z = \frac{3p}{4}, y = \frac{p}{2}$$

$$V_{\max} = \frac{\pi}{12} p^3$$

$$x + y + z = 2p$$

$$(x + y + z = 2p)$$



$$V_1 = \frac{\pi}{3} h^2 y_1, V_2 = \frac{\pi}{3} h^2 y_2$$

(22) 设某产品的产量 Q 由资本投入量 x 和劳动投入量 y 决定, 生产函数为

$Q = 12x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}$, 该产品的销售单价 p 与 Q 的关系为 $p = 1160 - 1.5Q$, 若单位资本投入和单位劳动投入的价格分别为 6 和 8, 求利润最大时的产量.

【解】 $L = pQ - (6x + 8y) = (1160 - 1.5Q)Q - (6x + 8y)$ $C = 6x + 8y$

$$= 13920x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}} - 216xy^{\frac{1}{3}} - 6x - 8y$$

$$= 13920uv - 216u^2v^2 - 6u^2 - 8v^6 \quad (x^{\frac{1}{2}} = u, y^{\frac{1}{6}} = v)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial v} = 0, \end{cases} \quad u = 16, v = 2 \quad Q_{\max} = 12 \times 16 \times 2 = 384$$

【例7】利用条件极值的方法证明：对任意正数 a, b, c ，有 $abc^3 \leq \frac{27}{5^5} (a+b+c)^5 = k$

【证1】只要证明对任意正数 k ，函数 xyz^3 在条件 $x+y+z=k$ 下的最大值不超过 $\frac{27}{5^5} k^5$ 即可

令 $F(x, y, z, \lambda) = xyz^3 + \lambda(x + y + z - k)$

由
$$\begin{cases} F_x = yz^3 + \lambda = 0, \\ F_y = xz^3 + \lambda = 0, \\ F_z = 3xyz^2 + \lambda = 0, \\ F_\lambda = x + y + z - k = 0, \end{cases}$$
 得 $x = y = \frac{k}{5}, z = \frac{3k}{5}.$

由于可能的极值点唯一，所求最大值存在，则最大值在

$x = y = \frac{k}{5}, z = \frac{3k}{5}$ 时取到， $xyz^3 \leq \frac{k}{5} \cdot \frac{k}{5} \cdot \left(\frac{3k}{5}\right)^3 = \frac{27}{5^5} k^5 = \frac{27}{5^5} (x+y+z)^5$

【证2】 只要证明对任意正数 k , 函数 xyz^3 在条件 $x + y + z = k$

下的最大值不超过 $\frac{27}{5^5} k^5$ 即可

$$xyz^3 = 3^3 x \cdot y \cdot \frac{z}{3} \cdot \frac{z}{3} \cdot \frac{z}{3},$$

$$x + y + \frac{z}{3} + \frac{z}{3} + \frac{z}{3}$$

$$= x + y + z = k,$$

$$x = y = \frac{z}{3}$$

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$$

① 无妨

② 取值:

1) $f(x, y)$

2) 条件最值

3) 应用题. $z = z(x, y)$

25 武忠祥考研

第六章 二重积分

25武忠祥考研

本章内容要点

一. 考试内容要点精讲

(一) 二重积分的概念

(二) 二重积分的几何意义

(三) 二重积分的性质

* (四) 二重积分计算

二. 常考题型方法与技巧

重⑥< 题型一 计算二重积分

题型二 累次积分交换次序及计算

难主 { 题型三 与二重积分有关的综合题

题型四 与二重积分有关的不等式问题

一. 考试内容要点精讲

25武忠祥考研

(一) 二重积分的概念

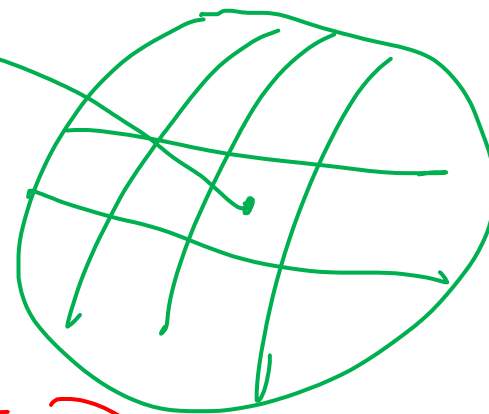
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k$$

(二) 二重积分的几何意义

(三) 二重积分的性质

1. 不等式性质

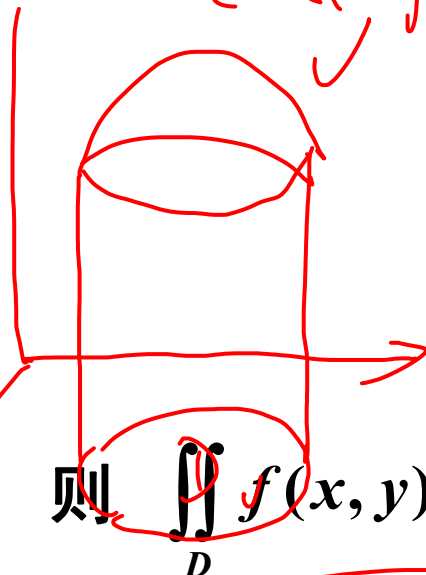
(1) 若 $f(x, y) \leq g(x, y)$, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$



$$\int_a^b f(x) dx$$

$$y = f(x)$$

$$z = z(x, y)$$



$$z = z(x, y) > 0$$

(2) 若 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则

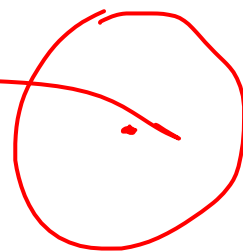
$$\underline{mS} \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq \underline{MS}.$$

$$(3) \left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma.$$

2. 积分中值定理

若 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \underline{f(\xi, \eta)} S$$



(四) 二重积分的计算

1. 利用直角坐标计算

1) 先 y 后 x

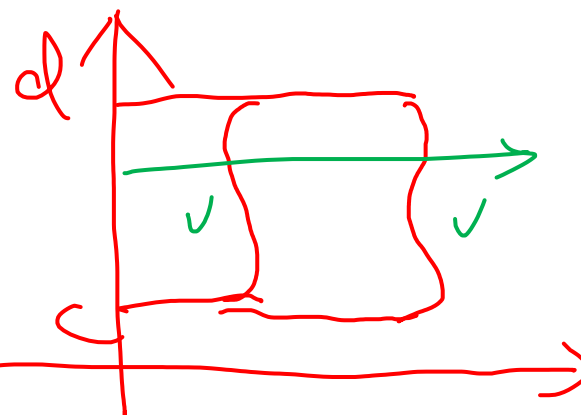
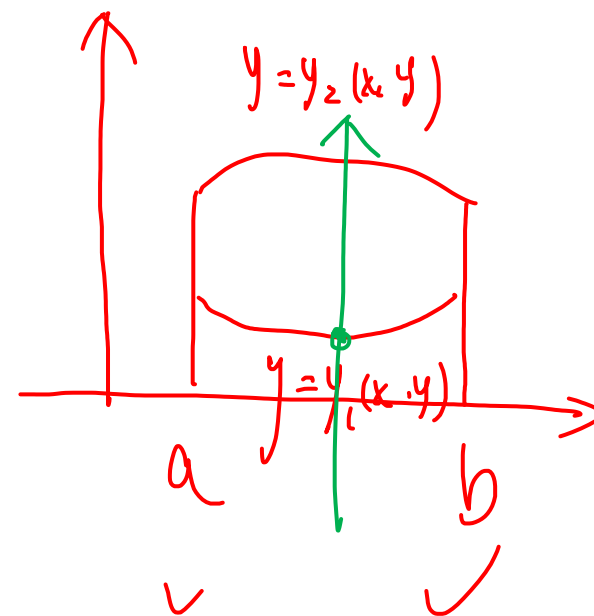
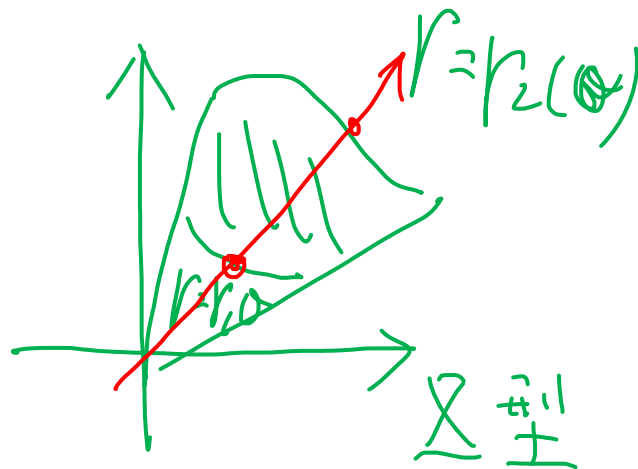
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

2) 先 x 后 y

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$$

2. 利用极坐标计算

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$$



【注】 i) 适合用极坐标计算的被积函数:

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}), f\left(\frac{y}{x}\right), f\left(\frac{x}{y}\right);$$

ii) 适合用极坐标的积分域:

$$x^2 + y^2 \leq R^2; r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2; x^2 + y^2 \leq 2ax; x^2 + y^2 \leq 2by;$$

3. 利用对称性和奇偶性计算

① 若积分域 D 关于 y 轴对称, 则:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 2 \iint_{D_{x \geq 0}} f(x, y) d\sigma; \\ 0; \end{cases}$$

$$f(-x, y) = f(x, y)$$

$$f(-x, y) = -f(x, y)$$

② 若积分域关于 x 轴对称, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 2 \iint_{D_{y \geq 0}} f(x, y) d\sigma \\ 0 \end{cases}$$

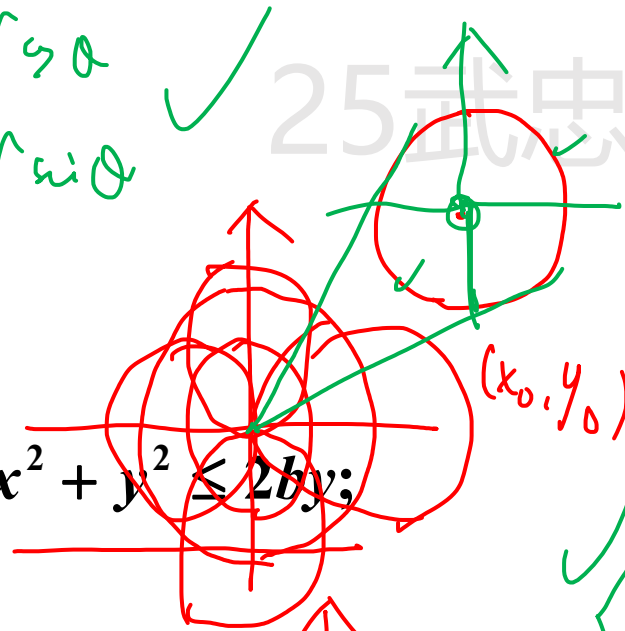
$$f(x, -y) = f(x, y)$$

$$f(x, -y) = -f(x, y)$$

$$x - x_0 = \sqrt{r} \cos \theta$$

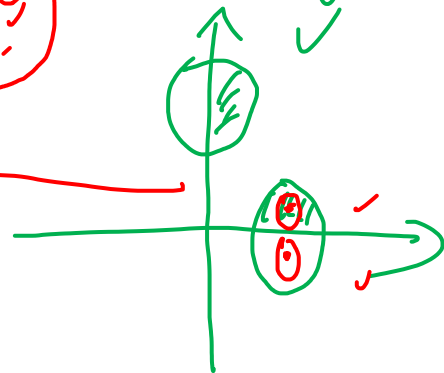
$$y - y_0 = \sqrt{r} \sin \theta$$

$$= f(\theta)$$



25武忠祥考研

$$\int_{-a}^a f(x) dx$$

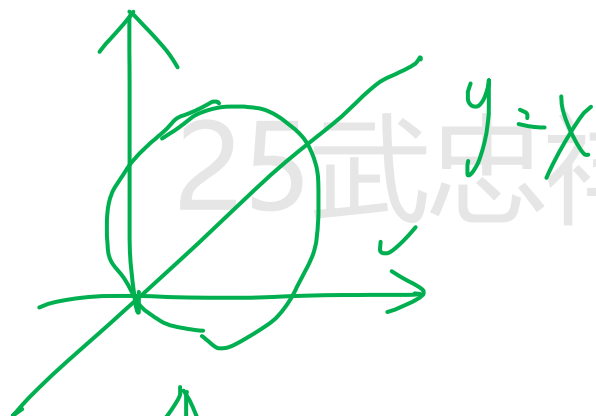


4. 利用变量对称性计算

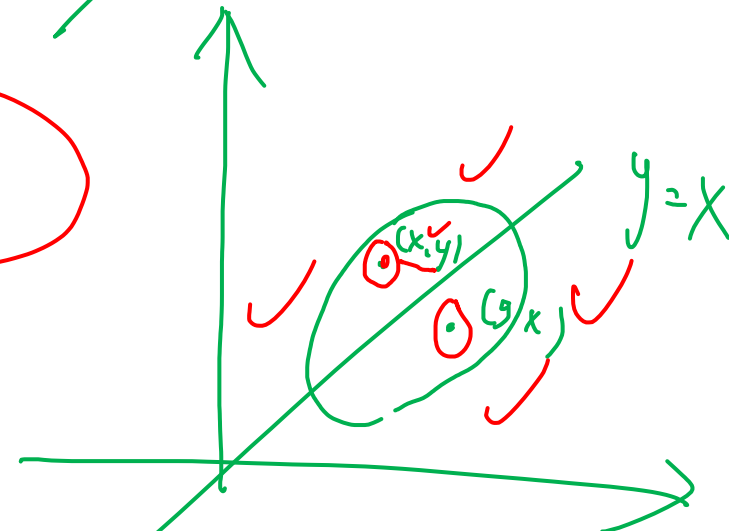
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$$

(x, y)



$$\iint_{D(x,y)} f(x, y) dx dy = \iint_{D(u,v)} f(u, v) du dv = \iint_{D(y,x)} f(y, x) dy dx$$



若 D 关于 $y=x$ 对称, 则 $D_{(x,y)} = D_{(y,x)} = D$

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(y, x) d\sigma$$

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \frac{1}{2} \left[\iint_D f(x, y) d\sigma + \iint_D f(y, x) d\sigma \right]$$

特别的: $\iint_D f(x) d\sigma = \iint_D f(y) d\sigma$

25武忠祥考研



还不关注，
你就慢了



25武忠祥考研



还不关注，
你就慢了

