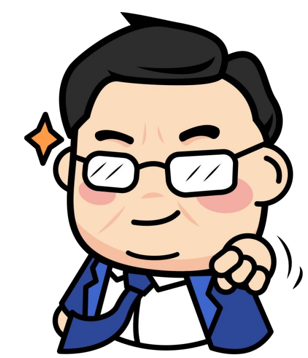
25高数强化（18）

18	二重积分举例（二重积分计算、累次积分、综合题及不等式）	P185-P198

下 P199—211

主讲 武忠祥 教授



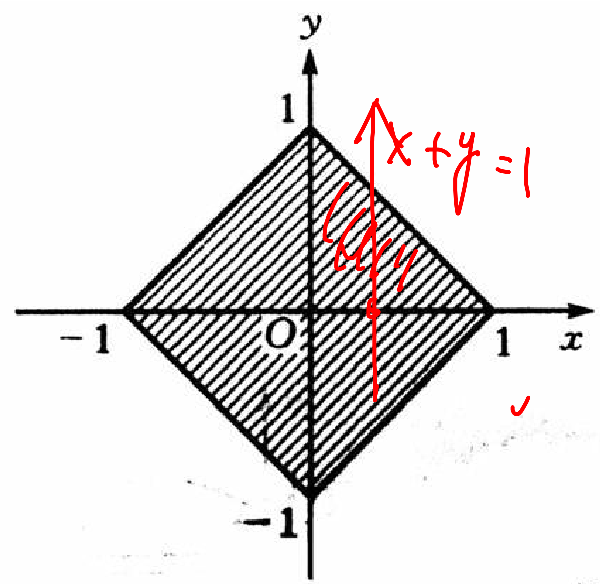
还不关注，你就慢了

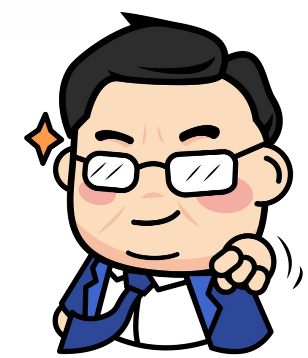
题型一 计算二重积分

【例1】 计算 $\iint\limits_D [|xy| + \sin(\overset{0}{x}y^2)]\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由曲线 $|x|+|y|=1$ 所围成.

【解】 原式 $\overset{*}{=} \iint\limits_D |xy| d\sigma = 4\iint\limits_{D_1} xy d\sigma$

$$= 4\int_0^1 dx\int_0^{1-x} xy dy = \frac{1}{6}.$$

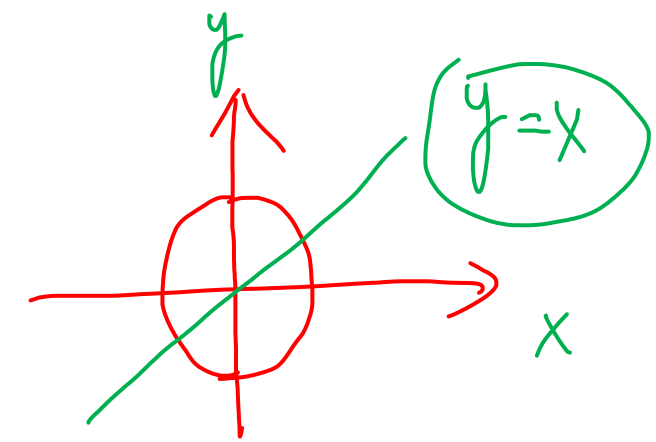




【例2】设区域 D 为 $x^2+y^2 \le R^2$，则 $\iint\limits_D (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})\mathrm{d}\sigma =$ ______.

$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$

【解1】$\iint\limits_D (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R (\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}) r^3 dr = \frac{\pi R^4}{4}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})$



【解2】$\iint\limits_D (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})d\sigma = \iint\limits_D (\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2})d\sigma$

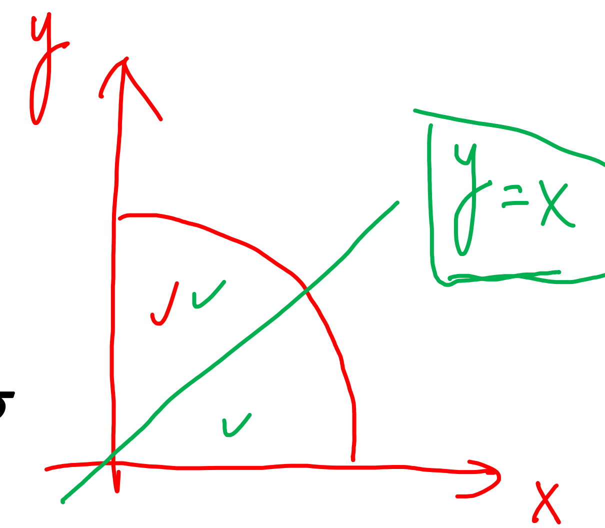
$\iint\limits_D (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})d\sigma = \frac{1}{2}$ [左端 + 右端]

$= \frac{1}{2}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma$

$= \frac{1}{2}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi R^4}{4}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})$

4π

【例3】设区域 $D\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\}$，$f(x)$ 为 D 上正值连续函数，a,b 为常数，则 $\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma =$ _____.



A) $ab\pi$ $=\pi$ $=4\pi$

B) $\frac{ab}{2}\pi$ $=\frac{\pi}{2}$

C) $(a+b)\pi$ $=2\pi$

D) $\frac{a+b}{2}\pi$ π

【解1】直接法 $\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma = \iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}d\sigma$

原式 $=\frac{1}{2}[\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma + \iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}d\sigma]$

$=\frac{1}{2}\iint\limits_D (a+b)d\sigma = \frac{a+b}{2}\pi$

[解3] $a=b=1$ 原式 $=\iint\limits_D 1\,d\sigma=\pi$

$a=b=2$ 原式 $=\iint\limits_D 2\,d\sigma=2\pi$

【解2】排除法 取 $f(x)\equiv 1$

原式 $=\frac{1}{2}\iint\limits_D (a+b)d\sigma = \frac{a+b}{2}\pi$

【例4】 计算 $\iint\limits_D x[|y| + yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $y=x^3, y=1, x=-1$ 围成的区域，$f(u)$ 为连续函数.

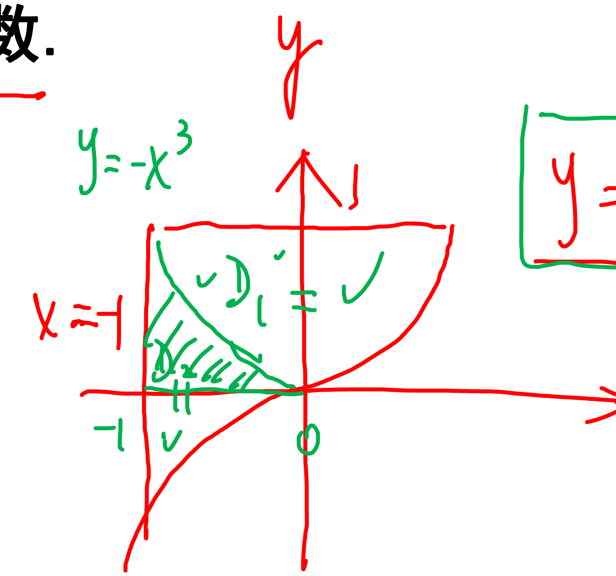
【解】 $\iint\limits_D x[|y| + yf(x^2+y^2)]dxdy$

$$= \iint\limits_D x|y|dxdy + \iint\limits_D xyf(x^2+y^2)dxdy$$

$\iint\limits_D xyf(x^2+y^2)dxdy$

$$= \iint\limits_{D_1} xyf(x^2+y^2)dxdy + \iint\limits_{D_2} xyf(x^2+y^2)dxdy = 0 \qquad \text{（奇偶性）}$$

$$\iint\limits_D x|y|dxdy = 2\int_{-1}^{0}dx\int_0^{-x^3} xydy = -\frac{1}{8}$$



$y = x^3$

$y=x$

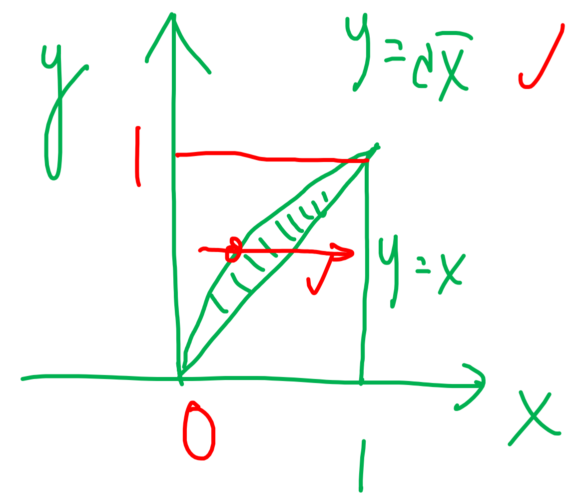
$y=\sin x$

【例5】 计算 $\iint\limits_D \frac{\sin y}{y} \mathrm{d}\sigma$，其中 D 由 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=x$ 围成.

【解】 $\iint\limits_D \frac{\sin y}{y} dxdy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} \frac{\sin y}{y} dx$

$= \int_0^1 [\sin y - y\sin y] dy$

$= 1 - \sin 1$



$r^2 = 2ar\sin\theta$

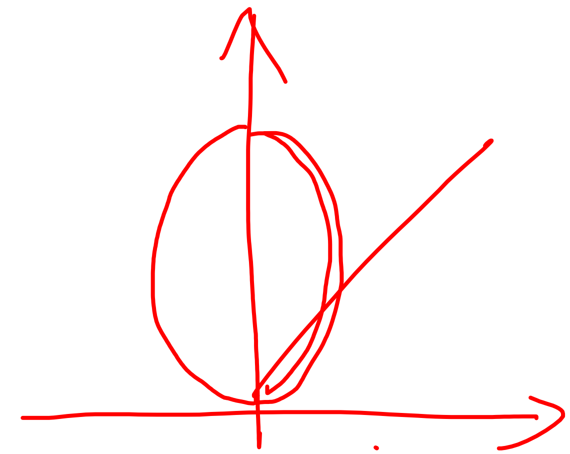
【例6】计算 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，其中 D 由曲线 $x^2+y^2=2ay(a>0)$ 所围成.

【解】 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2a\sin\theta} r^2 dr$

$$= \frac{8a^3}{3}\int_0^{\pi} \sin^3 d\theta$$

$$= \frac{16a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 d\theta$$

$$= \frac{32}{9}a^3$$



$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\, d\theta$

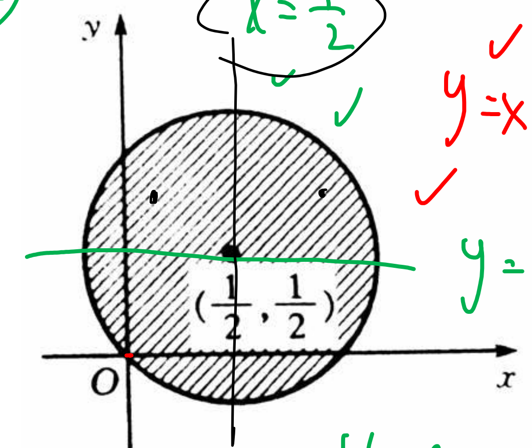
【例7】 计算 $\iint\limits_D [x(1+y^3)+y(1-x^3)]\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由 $x^2+y^2\le x+y$ 所确定.

$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2\le\frac{1}{2}$

【解1】 由于区域 D 关于 $y=x$ 对称，则 $\iint\limits_D xy^3 d\sigma=\iint\limits_D yx^3 d\sigma$

$r^2=r(\cos\theta+\sin\theta)$

原式 $=\iint\limits_D (x+y)d\sigma=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{\cos\theta+\sin\theta}(\cos\theta+\sin\theta)r^2dr$



$x=\frac{1}{2}$　　$y=x$　　$y=\frac{1}{2}$

$\bar{x}=\int_a^b x\rho(x)dx$　　$\int_a^b\rho(x)dx$

【解2】 令 $\begin{cases}x-\dfrac{1}{2}=r\cos\theta,\\ y-\dfrac{1}{2}=r\sin\theta,\end{cases}$　　$d\sigma=rdrd\theta$

$\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta=0$　　$\iint\limits_D (x-\frac{1}{2})d\sigma=0$

形心　$\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_D x\rho(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D\rho(x,y)d\sigma}$　　$\rho(x,y)=\rho$

$\iint\limits_D (x+y)d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(r\cos\theta+r\sin\theta+1)rdr=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}rdr=\dfrac{\pi}{2}$

形心：$\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_D xd\sigma}{S}$　$\Rightarrow\iint\limits_D xd\sigma=\bar{x}S$

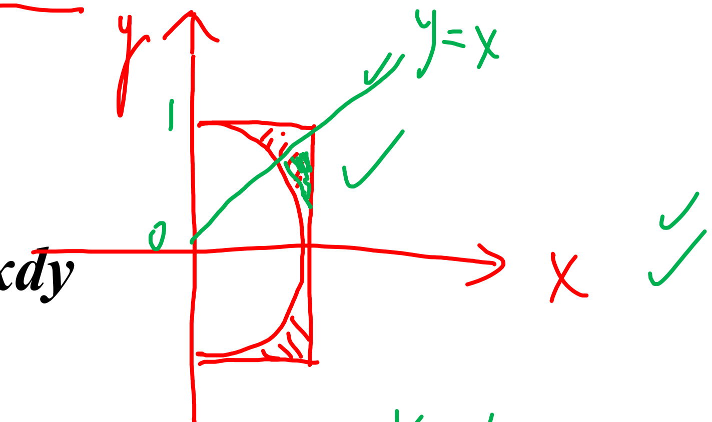
【解3】 $\iint\limits_D (x+y)d\sigma=\iint\limits_D[(x-\frac{1}{2})+(y-\frac{1}{2})+1]d\sigma=\iint\limits_D dxdy=\dfrac{\pi}{2}$

【解4】 $\iint\limits_D (x+y)d\sigma=2\iint\limits_D xd\sigma=2\bar{x}S=\dfrac{\pi}{2}$

【例】(24年1)已知平面区域 $D=\{(x,y)|\sqrt{1-y^2}\le x\le 1,-1\le y\le 1\}$,

计算 $\iint\limits_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$.

$\int\sqrt{1+y^2}\,dy \xlongequal{y=\tan t} \int \sec^3 t\,dt$



$x=1$

$r\cos\theta=1$

【解】$\iint\limits_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = 2\iint\limits_{D_{y\ge 0}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \iint\limits_{D_{y\ge 0}}\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$

$$= 2\iint\limits_{D_1}\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}(\cos\theta+\sin\theta)rdr$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\cos x-\sin x\right]dx = \sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})-2$$

或 $\iint\limits_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = 2\iint\limits_{D_{y\ge 0}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = 2\int_0^1 dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^1\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx$

$$= 2\int_0^1\sqrt{1+y^2}\,dy - 2 = \left[y\sqrt{1+y^2}+\ln(y+\sqrt{1+y^2})\right]_0^1 - 2$$

$$= \sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})-2$$

$\int\sqrt{1+y^2}\,dy = y\sqrt{1+y^2} - \int\frac{y^2+1-1}{\sqrt{1+y^2}}dy$

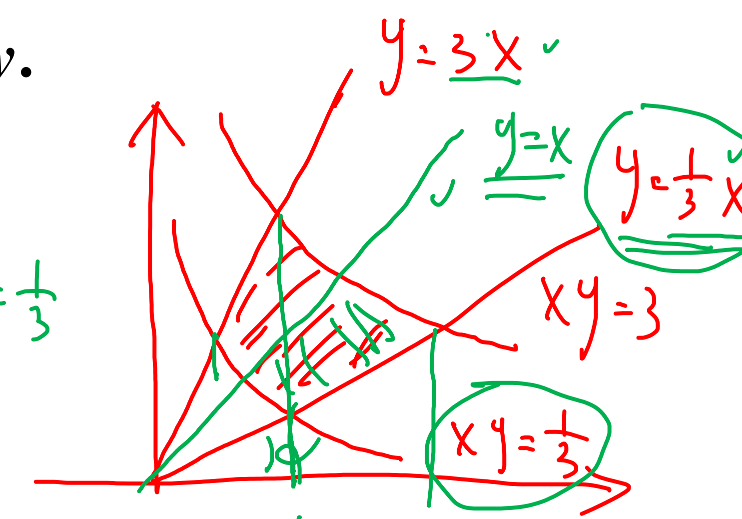
【例】（24年2, 3） 设平面有界区域 D 位于第一象限，由曲线 $xy=\frac{1}{3}, xy=3$ 与直线 $y=\frac{1}{3}x, y=3x$ 围成的平面区域，计算 $\iint\limits_D (1+x-y)dxdy$.

【解】 由于区域 D 关于 $y=x$ 对称, 则

$$\iint\limits_D xdxdy=\iint\limits_D ydxdy$$

$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{1}{3}$

$d\tan\theta$



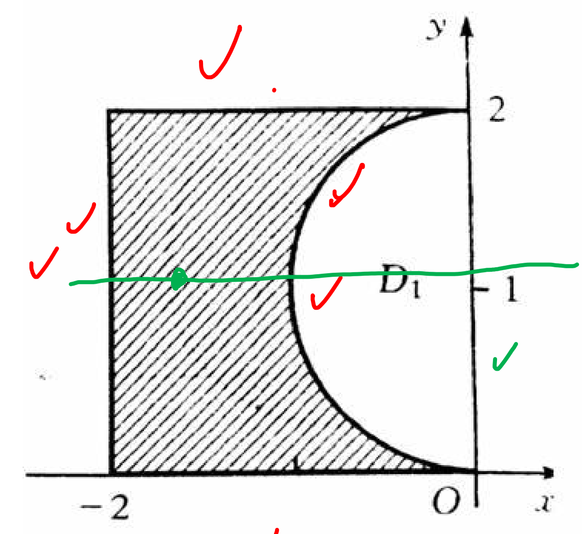
$$原式=\iint\limits_D dxdy=2\int_\alpha^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{3\sin\theta\cos\theta}}}^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}}rdr=\frac{8}{3}\int_\alpha^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}d\theta=\frac{8}{3}\ln\tan\theta\Big|_\alpha^{\frac{\pi}{4}}=\frac{8}{3}\ln 3$$

$\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{3}$

$=-\frac{8}{3}\ln\tan\alpha=-\frac{8}{3}\ln\frac{1}{3}$

或 $$原式=\iint\limits_D dxdy=\int_{\frac{1}{3}}^{1}dx\int_{\frac{1}{3x}}^{3x}dy+\int_1^3 dx\int_{\frac{x}{3}}^{\frac{3}{x}}dy=\int_{\frac{1}{3}}^{1}[3x-\frac{1}{3x}]dx+\int_1^3[\frac{3}{x}-\frac{x}{3}]dx=\frac{8}{3}\ln 3$$

【例8】 计算 $\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $x=-2, y=0, y=2$ 以及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成.



y=1

【解1】 $\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 dy \int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}} y dx$

θ

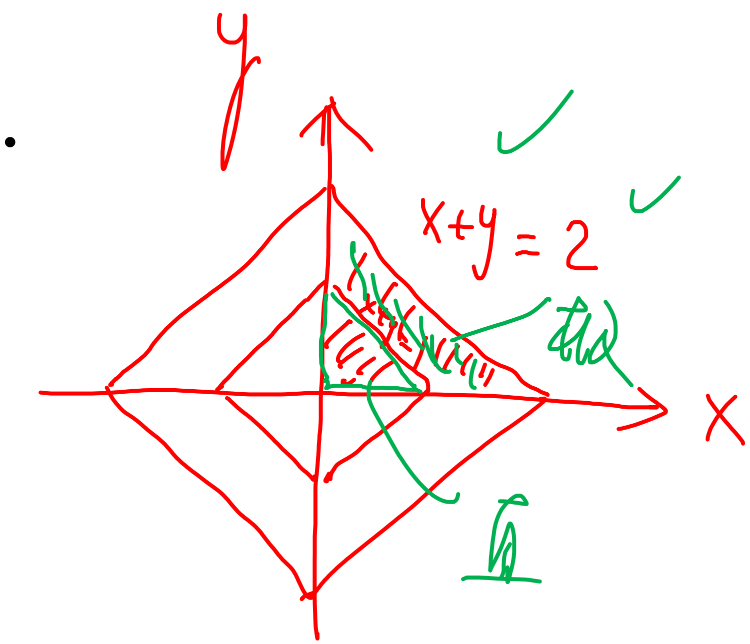
【解2】 $\iint_D y d\sigma = \int_{-2}^{0} dx \int_0^2 y dy - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} r^2 \sin\theta dr$

【解3】 $\iint_D y d\sigma = \iint_D [(y-1)+1] d\sigma = \iint_D d\sigma = 4 - \dfrac{\pi}{2}$

【解4】 $\iint_D y d\sigma = \bar{y} S = 4 - \dfrac{\pi}{2}$

【例9】 设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases} x^2, & |x|+|y|\le 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\le 2, \end{cases}$

计算二重积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)\,\|\,x|+|y|\le 2\}$.



【解】 原式 $=4\int_0^1 dx\int_0^{1-x} x^2dy+4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}} dr$

$$=\frac{1}{3}+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{4}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}=\frac{1}{3}+4\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$$

$x+y=1$

$r(\cos\theta+\sin\theta)=1$

8:07

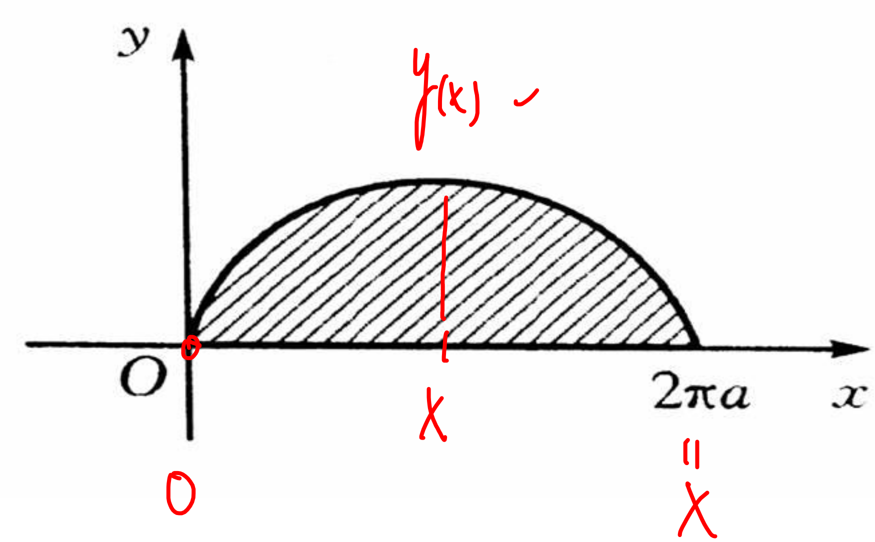
【例10】 计算 $\iint\limits_D y^2 \mathrm{d}\sigma$，其中 D 由 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 与 $y=0$ 围成.

摆线

【解】 $\iint\limits_D y^2 d\sigma = \int_0^{2\pi a} dx \int_0^{y(x)} y^2 dy = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi a} y^3(x)dx$

$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} a^3 (1-\underbrace{\cos t}_{}) ^3 a(1-\cos t)dt$

$2\sin^2\frac{t}{2}$



【例11】 设 D 是全平面，$f(x)=\begin{cases} x, & -1\le x\le 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$，

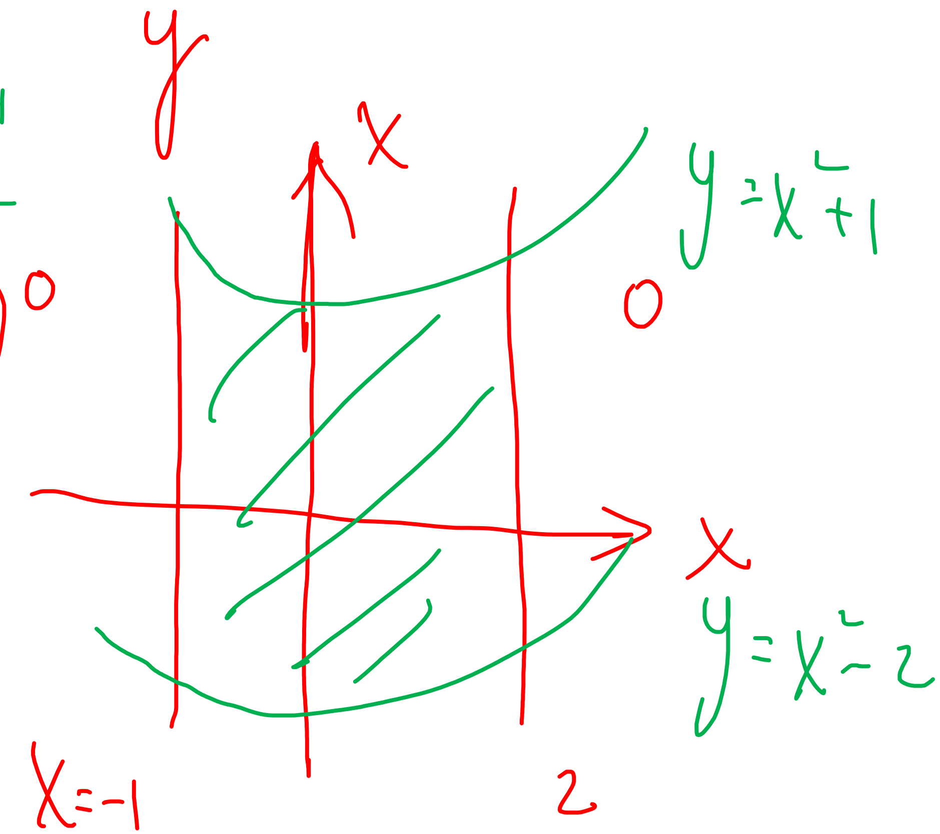
计算 $\iint\limits_{D} f(x)f(x^2-y)\mathrm{d}\sigma$

$-1=x^2-y \Rightarrow y=x^2+1$

$x^2-y=2 \quad y=x^2-2$

【解】 原式 $=\int_{-1}^{2}dx\int_{x^2-2}^{x^2+1}x(x^2-y)dy=\dfrac{9}{4}$

$-1\le x^2-y\le 2$



【例12】 计算 $\iint\limits_D \left|x^2+y^2-2y\right| \mathrm{d}\sigma$，其中 D 由 $x^2+y^2\le 4$ 所确定. (0,1)

=0

−1

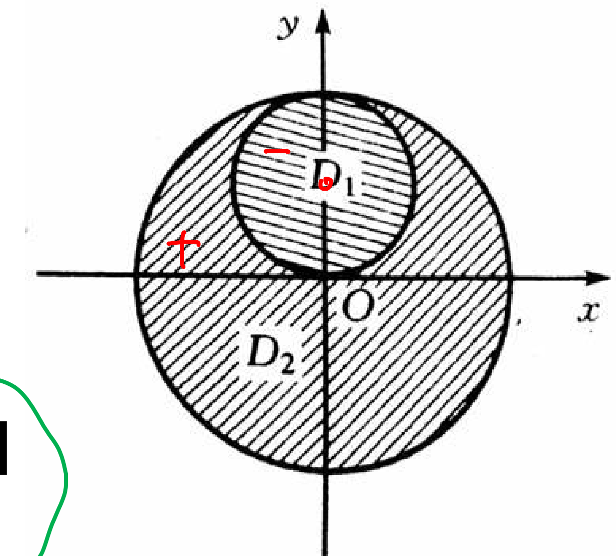
【解】 $\iint\limits_D \left|x^2+y^2-2y\right| d\sigma$

$$=\iint\limits_{D_1}(2y-x^2-y^2)d\sigma+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-2y)d\sigma$$

$$=\iint\limits_{D_1}(2y-x^2-y^2)d\sigma+\left[\iint\limits_{D}(x^2+y^2-2y)d\sigma-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-2y)d\sigma\right]$$

$$=\iint\limits_{D}(x^2+y^2-2y)d\sigma+2\iint\limits_{D_1}(2y-x^2-y^2)d\sigma$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3dr+2\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}(2r\sin\theta-r^2)rdr=9\pi$$



【例13】 计算 $\iint\limits_D \min\{x,y\}e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 为全平面.

【解】 $\iint\limits_D \min\{x,y\}e^{-(x^2+y^2)}d\sigma$

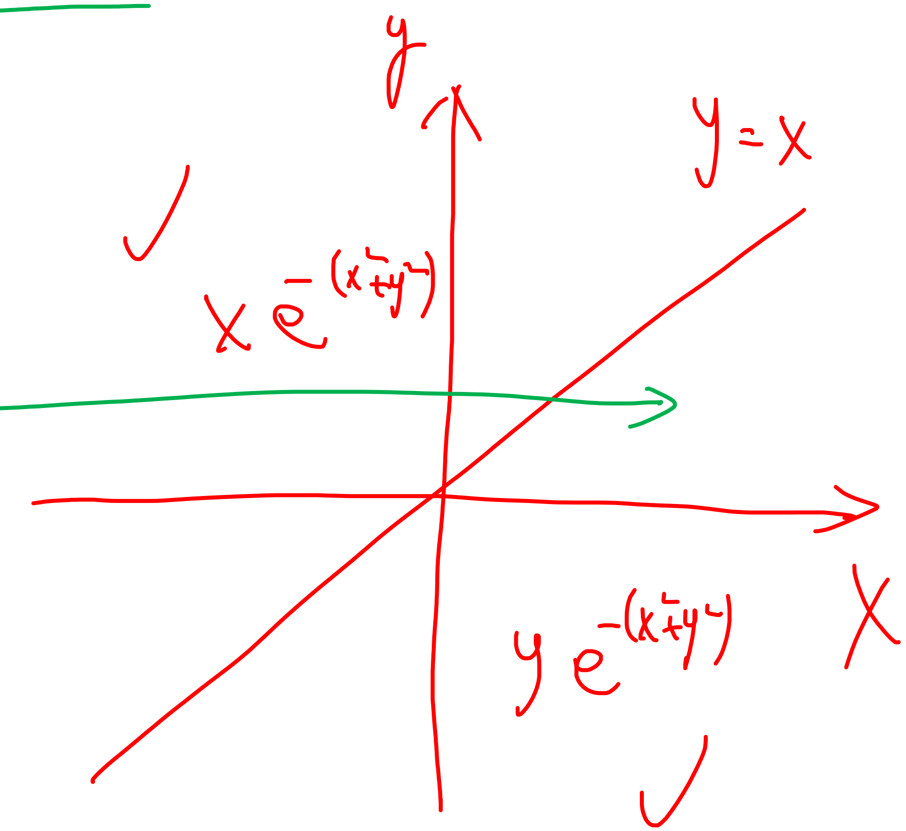
$$=\iint\limits_{D_{x\le y}} xe^{-(x^2+y^2)}d\sigma+\iint\limits_{D_{y\le x}} ye^{-(x^2+y^2)}d\sigma$$

$x\le y$

$$=2\iint\limits_{D_{x\le y}} xe^{-(x^2+y^2)}d\sigma$$

$$=2\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{y}xe^{-x^2}\cdot e^{-y^2}dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2y^2}dy$$

$$\underline{\underline{\sqrt{2}y=t}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

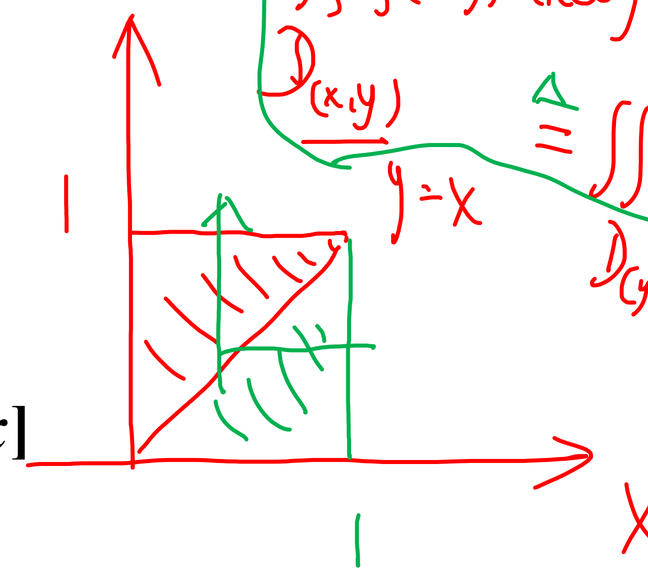


【例14】 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = A$

求 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y$.

$$\iint_{D(x,y)} f(x,y)\,dxdy \triangleq \iint_{D(y,x)} f(y,x)\,dydx$$

【解】 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y \overset{(*)}{=} \int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 f(y)f(x)\mathrm{d}x$



$$=\frac{1}{2}[\underbrace{\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy}_{上}+\underbrace{\int_0^1 dy\int_y^1 f(x)f(y)dx}_{下}]$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1}} f(x)f(y)dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 f(y)dy = \frac{A^2}{2}$$

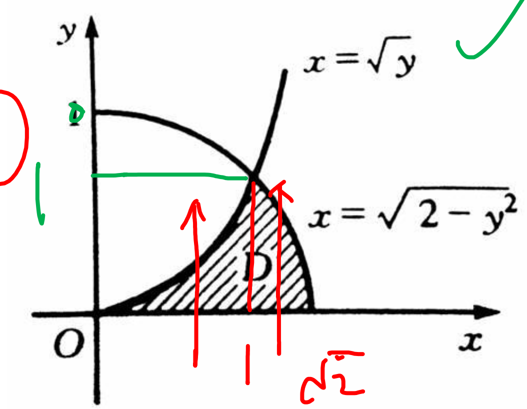
题型二 累次积分交换次序及计算

【例1】交换下列累次积分次序

1) $I=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx;$

$x=\sqrt{2-y^2}$

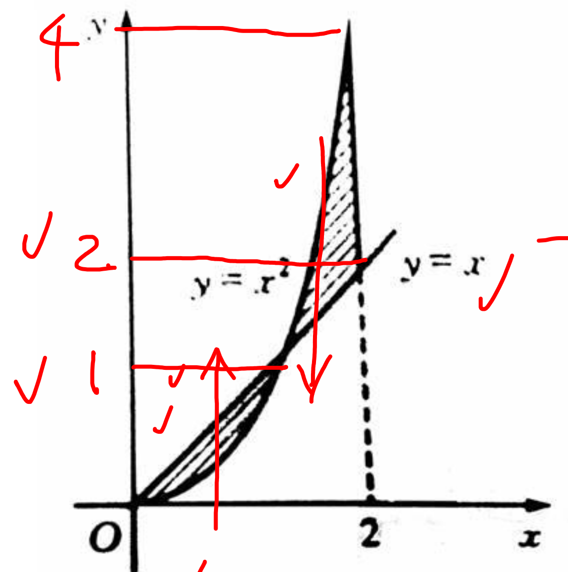
$x=\sqrt{y}$

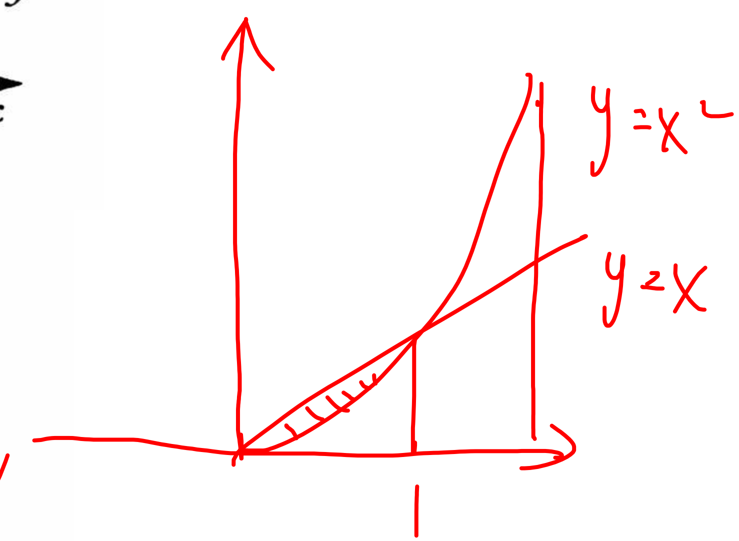


3) $I=\int_0^2 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy;$

$y=x$

$y=x^2$



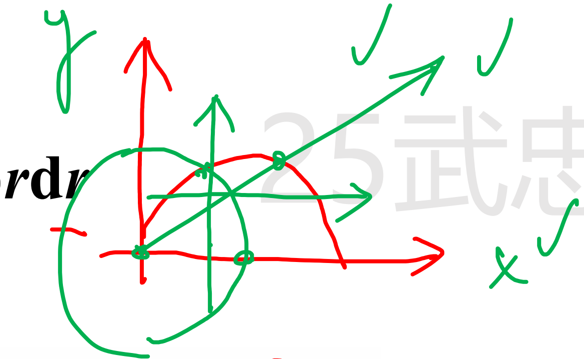


【解】 1) $I=\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy$

$$+\int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$$

3) $I=\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx-\int_1^2 dy\int_{\sqrt{y}}^{y} f(x,y)dx-\int_2^4 dy\int_{\sqrt{y}}^{2} f(x,y)dx$

$r=0.$ $\quad r=2a\cos\theta \quad x^2+y^2=2ax$



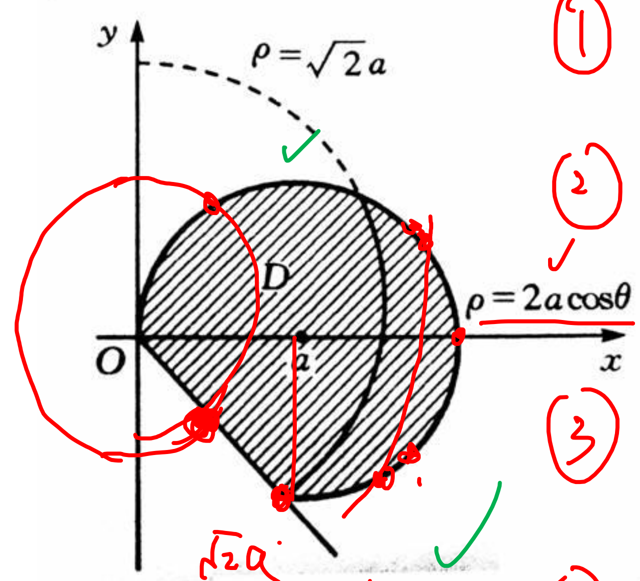
【例2】交换累次积分 $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$ 的次序 $(a>0)$.

【解1】 $r=2a\cos\theta$ 是圆 $x^2+y^2=2ax$

$$I=\int_0^{\sqrt{2}a}dr\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos\frac{r}{2a}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rd\theta$$

$$+\int_{\sqrt{2}a}^{2a}dr\int_{-\arccos\frac{r}{2a}}^{\arccos\frac{r}{2a}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rd\theta$$

【解2】



① $\int dx\int f\,dy$ $\quad x=c$

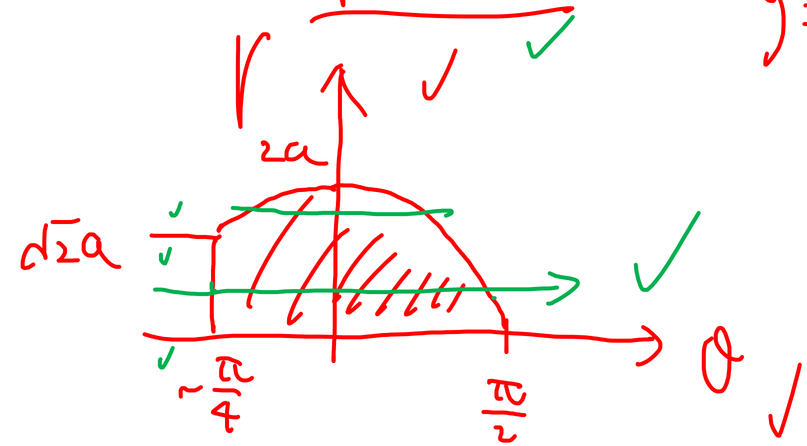
② $\int dy\int f\,dx$ $\quad y=c$

③ $\int d\theta\int f\,r\,dr$ $\quad \theta=c$

④ $\int dr\int f\,r\,d\theta$ $\quad r=c$

$r=2a\cos\theta$

$y=2a\cos x$



【例3】 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r$ 可写成

$r=0$. $r=\cos\theta$

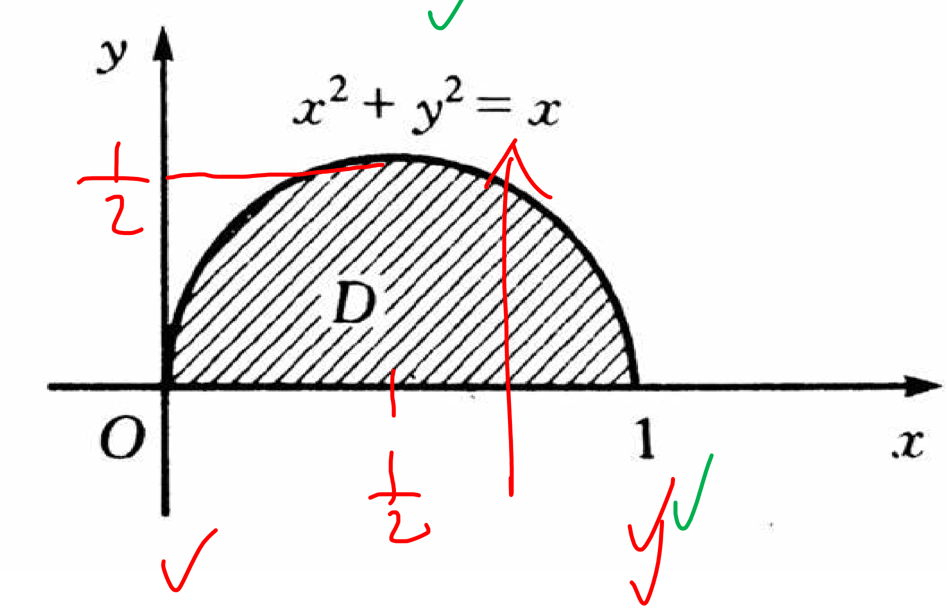
$x^2+y^2=x$

A) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$,

B) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$,

C) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$,

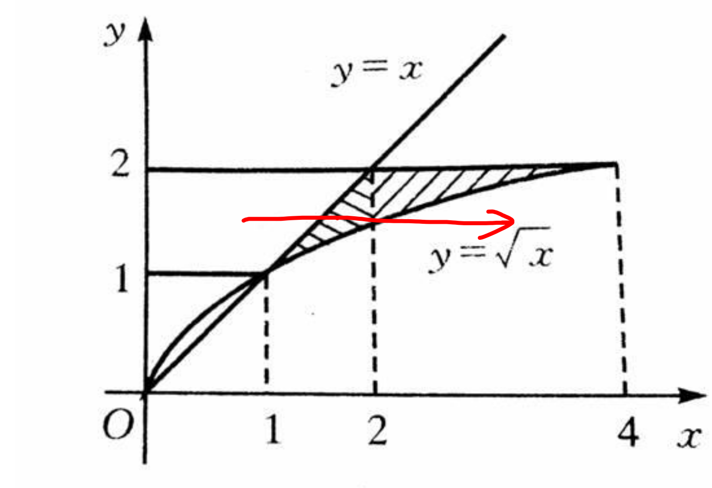
D) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.



【例4】 计算下列累次积分

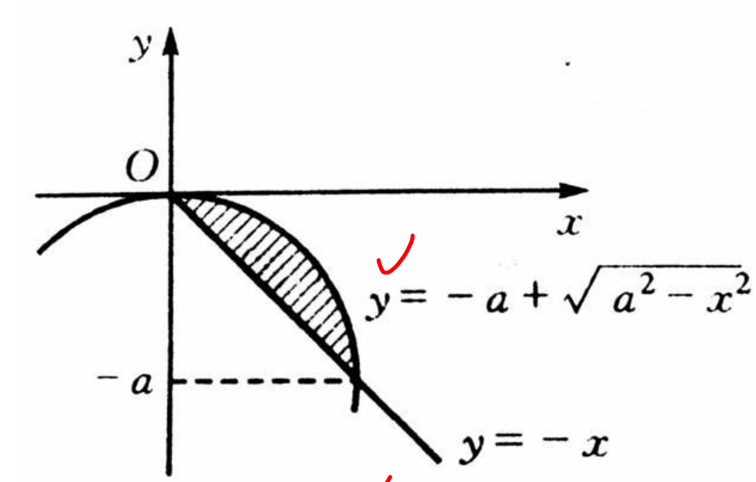
2) $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}dy$;

3) $\int_0^a dx\int_{-x}^{-a+\sqrt{a^2-x^2}}\frac{1}{\sqrt{4a^2-(x^2+y^2)}}dy;(a>0)$



【解】 2）原式 $=\int_1^2 dy\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}dx$

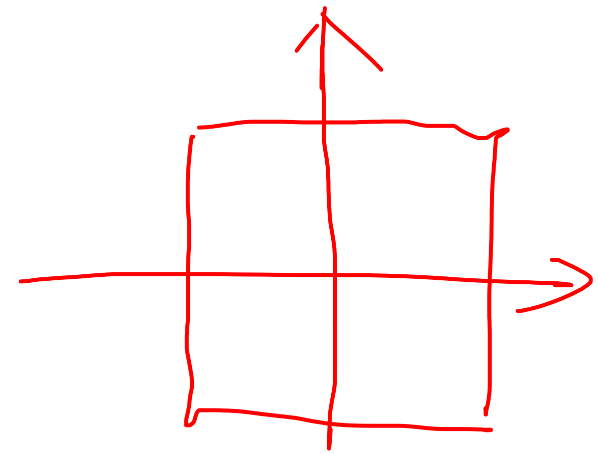
3) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}d\theta\int_0^{-2a\sin\theta}\frac{r}{\sqrt{4a^2-r^2}}dr$



【例5】 设 $f(x)$ 为连续. 证明: $\iint\limits_D f(x-y)dxdy=\int_{-A}^{A}f(t)(A-|t|)dt$

$$D:|x|\le\frac{A}{2},\quad |y|\le\frac{A}{2}$$

【证】 $\iint\limits_D f(x-y)dxdy=\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}dx\boxed{\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}f(x-y)dy}$



$$\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}f(x-y)dy=\int_{x-\frac{A}{2}}^{x+\frac{A}{2}}f(u)du\qquad (x-y=u)$$

$$\iint\limits_D f(x-y)dxdy=\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}dx\int_{x-\frac{A}{2}}^{x+\frac{A}{2}}f(u)du$$

$$=\int_{-A}^{0}du\int_{-\frac{A}{2}}^{u+\frac{A}{2}}f(u)dx+\int_{0}^{A}du\int_{u-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}f(u)dx$$

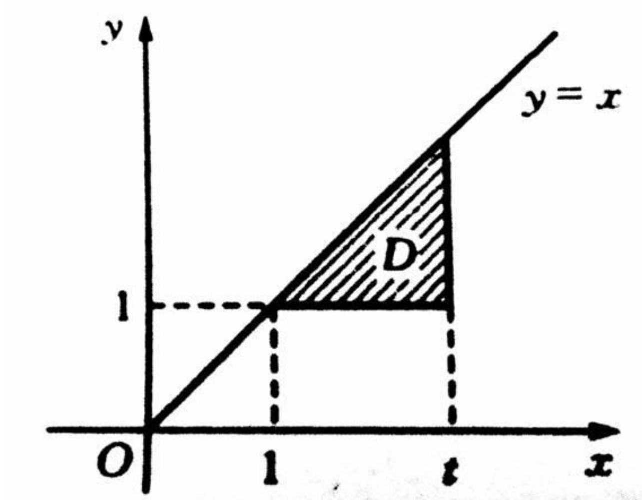
$$=\int_{-A}^{0}f(u)(A+u)du+\int_{0}^{A}f(u)(A-u)du=\int_{-A}^{A}f(u)(A-|u|)du$$

题型三 与二重积分有关的综合题

【例1】设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，则 $F'(2)$ 等于

A）$2f(2)$　　B）$f(2)$　　C）$-f(2)$　　D）0

【解1】 $F(t)\overset{*}{=}\int_1^t dx\int_1^x f(x)dy=\boxed{\int_1^t (x-1)f(x)dx}$



$F'(t)=(t-1)f(t)$

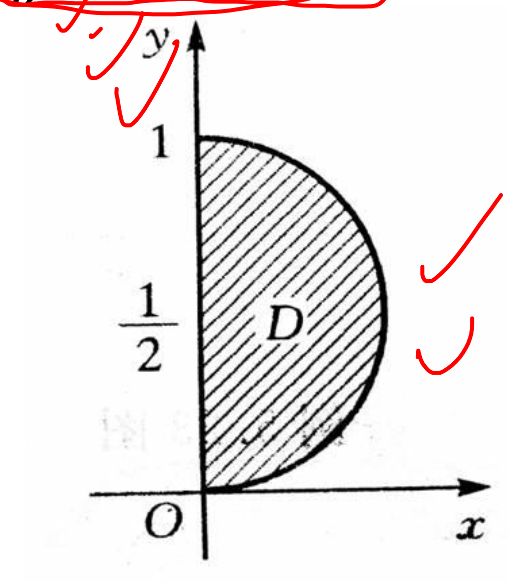
$F'(2)=f(2)$

故应选（B）

【解2】排除法　$f(t)=1$

$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t 1\,dx=\int_1^t (t-y)dy=t(t-1)-\int_1^t y\,dy$

【例2】 设区域 D 由 $x^2+y^2\le y$ 和 $x\ge 0$ 所确定，$f(x,y)$ 为 D 上的连续函数，且 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\dfrac{8}{\pi}\displaystyle\iint_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$ 求 $f(x,y)$.



$\frac{\pi}{8}$

【解1】 令 $\displaystyle\iint_D f(u,v)dudv=A,$

则 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\dfrac{8}{\pi}A$

$$\iint_D[\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}A]dxdy=A$$

$$A=\frac{1}{2}\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sin\theta}\sqrt{1-r^2}rdr=\frac{1}{6}(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})$$

【解2】 $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy-\iint_D f(u,v)dudv$

【例3】设 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且满足

$$f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2} f(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \text{ 求 } f(t).$$

【解】

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2} f(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2})dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2t} f(\frac{1}{2}r)rdr$$

$$=2\pi\int_0^{2t} rf(\frac{1}{2}r)dr$$

$$f(t)=e^{4\pi t^2}+2\pi\int_0^{2t} rf(\frac{1}{2}r)dr$$ $\Rightarrow$ $f(0)=1$

$$f'(t)=8\pi te^{4\pi t^2}+8\pi tf(t)$$

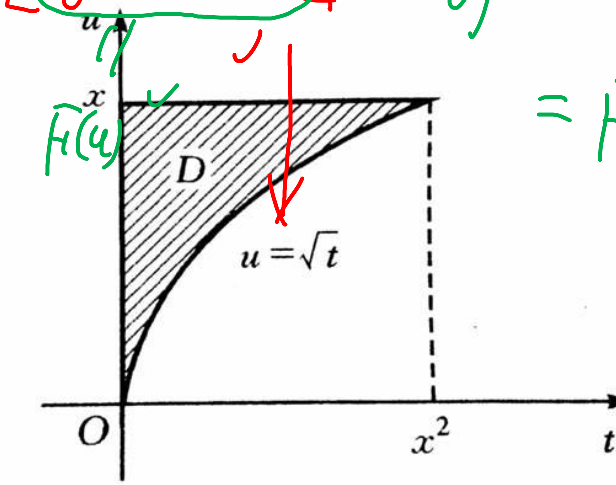
$$f(t)=e^{\int 8\pi tdt}[\int 8\pi te^{4\pi t^2}e^{-\int 8\pi tdt}dt+C]=(4\pi t^2+C)e^{4\pi t^2}$$

由 $f(0)=1$ 得 $C=1$, $f(t)=(4\pi t^2+1)e^{4\pi t^2}$

【例4】 设 $f(x,y)$ 是定义在 $0\le x\le 1,0\le y\le 1$ 上的连续函数，$f(0,0)=-1$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}u}{1-e^{-x^3}}$.

$\frac{0}{0}$

$$\left(\int_0^x\left[\int_0^{u^2}f(t,u)dt\right]du\right) = F(x)$$



【解1】 (*)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}dt\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)du}{1-e^{-x^3}}\overset{*}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{-\int_0^{x}du\int_0^{u^2}f(t,u)dt}{x^3}$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}f(t,x)dt}{3x^2}$$

$\frac{0}{0}$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2 f(c,x)}{3x^2}=-\frac{1}{3}f(0,0)=\frac{1}{3}$$

【解2】

$$\int_0^{x^2}dt\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)du=-\iint_D f(t,u)dtdu=-f(\xi,\eta)S$$

$$S=\int_0^{x^2}dt\int_{\sqrt{t}}^{x}du=\int_0^{x^2}(x-\sqrt{t})dt=\frac{1}{3}x^3$$

【例5】 设 $f(x,y)$ 在单位圆 $x^2+y^2\le 1$ 上有连续一阶偏导数，且在边界上取值为零，证明：$f(0,0)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\dfrac{-1}{2\pi}\iint\limits_D \dfrac{xf_x+yf_y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

其中 D 为圆环域 $\varepsilon^2\le x^2+y^2\le 1$.

【证】 $\iint\limits_D \dfrac{xf_x+yf_y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_\varepsilon^1[\cos\theta f_x(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta f_y(r\cos\theta,r\sin\theta)]dr$$

$$=\int_0^{2\pi}[f(r\cos\theta,r\sin\theta)\Big|_\varepsilon^1]d\theta=-\int_0^{2\pi}f(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)d\theta$$

$$=-2\pi f(\varepsilon\cos\bar\theta,\varepsilon\sin\bar\theta),\quad \bar\theta\in[0,2\pi]$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{-1}{2\pi}\iint\limits_D\frac{xf_x+yf_y}{x^2+y^2}dxdy=\lim_{\varepsilon\to 0^+}f(\varepsilon\cos\bar\theta,\varepsilon\sin\bar\theta)=f(0,0)$$

【例6】 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面域 $D:0\le x\le 1, 0\le y\le 1$ 上有二阶连续偏导数，在 D 的边界上取值为零，且在 D 上有 $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|\le M$，试证 $\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right|\le\dfrac{M}{4}$.

【证1】 由题设知 $f(0,y)=0, f(1,y)=0, f(x,0)=0, f(x,1)=0,$

从而有 $f_y(0,y)=0, f_y(1,y)=0, f_x(x,0)=0, f_x(x,1)=0.$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$$

$$=\int_0^1\left[yf(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1 y\frac{\partial f}{\partial y}dy\right]dx=\int_0^1 ydy\int_0^1\frac{\partial f}{\partial y}d(1-x)$$

$$=\int_0^1 y\left[(1-x)\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_0^1-\int_0^1(1-x)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\right]dy=-\iint\limits_D y(1-x)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy$$

则 $\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right|\le\iint\limits_D\left|y(1-x)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|dxdy\le M\iint\limits_D y(1-x)dxdy=\dfrac{M}{4}$

$f''(x)$

$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le$

① 累次

② 分部

【例6】 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面域 $D:0\le x\le 1,0\le y\le 1$ 上有二阶连续偏导数，在 D 的边界上取值为零，且在 D 上有 $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|\le M$，试证 $\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right|\le \dfrac{M}{4}$.

【证2】 $f(x,y)=f(x,y)-\overset{0}{f(0,y)}$ $\qquad (f(0,y)=0)$

$$=xf_x(\xi,y) \qquad \text{（拉格朗日中值定理）}$$

$$=x[f_x(\xi,y)-f_x(\xi,0)] \qquad (f_x(x,0)=0)$$

$$=xyf_{xy}(\xi,\eta) \qquad \text{（拉格朗日中值定理）}$$

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right|\le\iint\limits_D\left|xyf_{xy}(\xi,\eta)\right|dxdy\le M\iint\limits_D xydxdy=\frac{M}{4}.$$

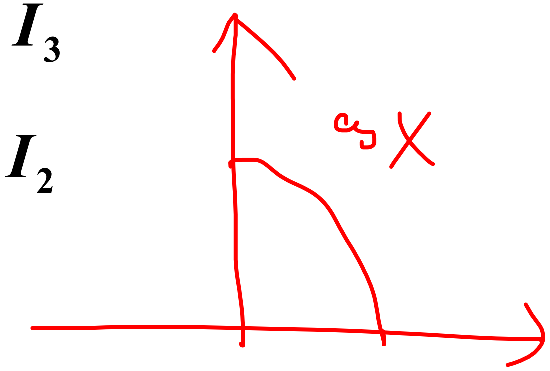
题型四　与二重积分有关的积分不等式问题

【例1】设 $I_1=\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma, I_2=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma, I_3=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)^2\,\mathrm{d}\sigma$

其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$，则

A) $I_3>I_2>I_1$　　　B) $I_1>I_2>I_3$

C) $I_2>I_1>I_3$　　　D) $I_3>I_1>I_2$



【解】$\sqrt{x^2+y^2}\ge x^2+y^2\ge (x^2+y^2)^2$

$\cos\sqrt{x^2+y^2}\le\cos(x^2+y^2)\le\cos(x^2+y^2)^2$

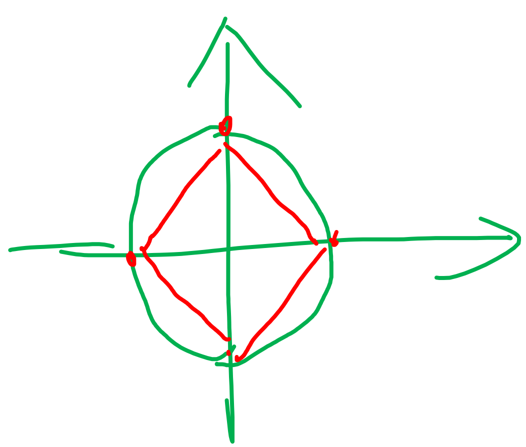
【例2】 设

$2|xy| \le x^2+y^2$

$$I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma, I_2=\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}2|xy|\mathrm{d}\sigma, I_3=\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma,$$ 则

A) $I_2<I_3<I_1$;　　B) $I_1<I_2<I_3$;

C) $I_3<I_1<I_2$;　　D) $I_3<I_2<I_1$;



$I_2<I_3<I_1$

【例3】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(x)>0$, 积,

证明: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \ge (b-a)^2$.

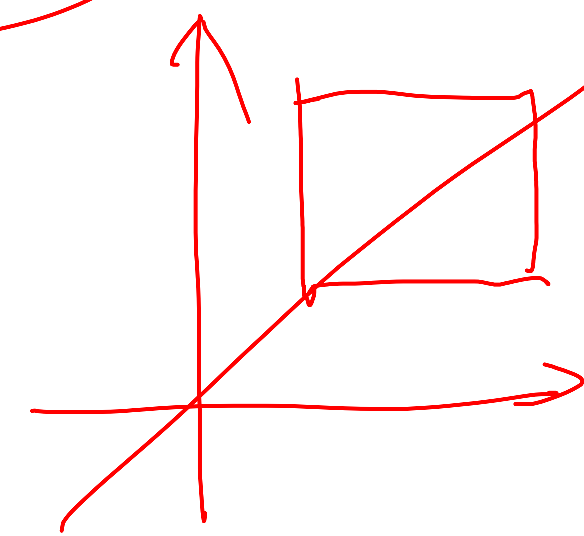
【证1】 $D=\{(x,y)\mid a\le x\le b, a\le y\le b\}$

$$\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx=\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b \frac{1}{f(y)}dy=\boxed{\iint\limits_D \frac{f(x)}{f(y)}dxdy}$$

$$\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx=\frac{1}{2}\left[\iint\limits_D \frac{f(x)}{f(y)}dxdy+\iint\limits_D \frac{f(y)}{f(x)}dxdy\right]$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D \frac{f^2(x)+f^2(y)}{f(x)f(y)}dxdy=\iint\limits_D \frac{f^2(x)+f^2(y)}{2f(x)f(y)}dxdy\ge\iint\limits_D 1dxdy$$

$$=(b-a)^2$$



【例3】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$上连续, 且 $f(x)>0$,

证明: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \ge (b-a)^2$.

【证2】由柯西积分不等式得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x = \int_a^b (\sqrt{f(x)})^2 dx \cdot \int_a^b (\frac{1}{\sqrt{f(x)}})^2 dx$$

$$\ge \left(\int_a^b \sqrt{f(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx\right)^2 = (b-a)^2$$

【例4】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调减的正值函数，证明：$\dfrac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x} \le \dfrac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$

【证1】 $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

① $I = \int_0^1 f^2(x)dx \int_0^1 xf(x)dx - \int_0^1 xf^2(x)dx \int_0^1 f(x)dx \ge 0$

$$= \int_0^1 f^2(x)dx \cdot \int_0^1 yf(y)dy - \int_0^1 xf^2(x)dx \cdot \int_0^1 f(y)dy$$

$$= \iint_D yf^2(x)f(y)dxdy - \iint_D xf^2(x)f(y)dxdy = \iint_D f^2(x)f(y)(y-x)dxdy$$

② $I = \iint_D f^2(x)f(y)(y-x)dxdy = \iint_D f^2(y)f(x)(x-y)dxdy$

$$I = \frac{1}{2}\left[\iint_D f^2(x)f(y)(y-x)dxdy + \iint_D f^2(y)f(x)(x-y)dxdy\right]$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D f(x)f(y)\underbrace{(y-x)[f(x)-f(y)]}_{\ge 0}dxdy \ge 0$$

第一章 函数 极限 连续

第一节 函 数 题型一 复合函数

题型二 函数性态 * 奇 周

第二节 极 限 题型一 极限的概念性质及存在准则

题型二 求极限 *

题型三 确定极限式中参数

题型四 无穷小量阶的比较 *

第三节 连 续 题型一 讨论连续性及间断点的类型 *

题型二 介值定理、最值定理及零点定理的证明题

第二章　一元函数微分学

第一节　导数与微分

题型一　导数的概念 *

题型二　导数的几何意义

题型三　导数与微分的计算 *

第二节　导数应用

题型一　函数的单调性及极值 ✓

题型二　曲线的凹向、拐点、渐近线及曲率 ✓

题型三　方程根的存在性及个数 选

题型四　证明函数不等式 选

题型五　微分中值定理有关的证明题 *

第三章　一元函积分学

第一节　不定积分

题型一　计算不定积分

题型二　不定积分杂例 *

第二节　定积分

题型一　定积分的概念、性质及几何意义

题型二　定积分计算 *

题型三　变上限定积分函数及其应用 *

题型四　积分不等式 选

第三节　反常积分

题型一　反常积分的敛散性 ✓

题型二　反常积分的计算 ✓

第四节　定积分应用

题型一　几何应用 —— 面积、旋转体 *

题型二　物理应用 ✓

第四章　常微分方程

题型一　微分方程求解

题型二　综合题

题型三　应用题

第五章 多元函数微分学

第一节 重极限 连续 偏导数 全微分

题型一 讨论连续性、可导性、可微性 选

第二节 偏导数与全微分的计算

题型一 求一点处的偏导数与全微分

题型二 求已给出具体表达式函数的偏导数与全微分

题型三 含有抽象函数的复合函数的偏导数与全微分 *

题型四 隐函数的偏导数与全微分 *

第三节 极值与最值

题型一 求无条件极值

题型二 求最大最小值

① $f(x,y)$ ①
② 条件最值
③ 应用题

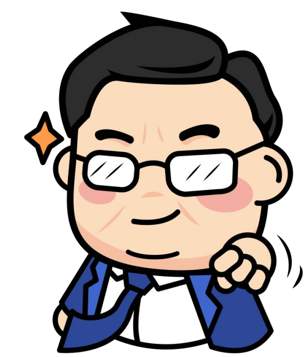
第六章　二重积分

* **题型一　计算二重积分** *

题型二　累次积分交换次序及计算　选、填、

题型三　与二重积分有关的综合题　难

题型四　与二重积分有关的不等式问题　选

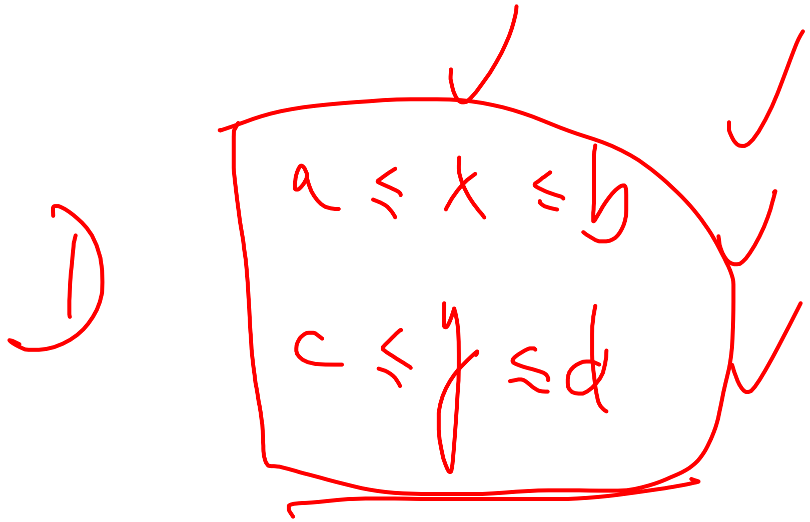


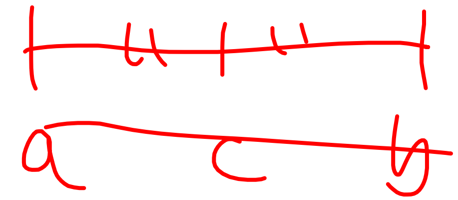
一.复习消化强化课内容（例题，学习包习题）

二.严选题

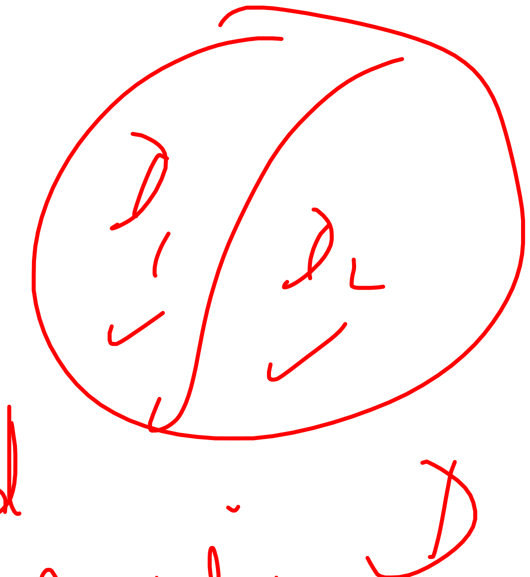
三.660题

四.330题





$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$$



$$\iint_D f(x)g(y)\,dxdy \triangleq \int_a^b f(x)dx \cdot \int_c^d g(y)dy$$

$$\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} = \int_a^b dx \int_c^d f(x)g(y)dy = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_c^d g(y)dy$$

$xy^2 \neq yx^2$

$\iint_D f(x,y)\,d\sigma \neq 2\iint_{D_1} f(x,y)\,d\sigma$

xy

$f(x,y) = f(y,x)$

x^2

$f(x)$