

25高数强化 (19)

19	常数项级数（定义、性质、敛散性的判别法及举例）	P199-P211
----	-------------------------	-----------

p212-223

主讲 武忠祥 教授



还不关注，
你就慢了



第七章 无穷级数

第一节 常数项级数

第二节 幂级数

第三节 傅里叶级数



还不关注，
你就慢了



第一节 常数项级数

25武忠祥考研

本节内容要点

一. 考试内容要点精讲

(一) 级数的概念与性质

(二) 级数的审敛准则

二. 常考题型方法与技巧

题型一 正项级数敛散性的判定

题型二 交错级数敛散性的判定

题型三 任意项级数敛散性的判定



还不关注，
你就慢了



一. 考试内容要点精讲

25武忠祥考研

(一) 级数的概念与性质

1. 级数的概念 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ 无穷级数

$$s_n = \sum_{i=1}^n u_i$$

部分和

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \quad \checkmark, \text{收敛}$$

$$s \approx s_n$$

① 存在性 — 收敛性 *
② 值 — 和

2. 级数的性质

1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 s , 则 $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n$ 也收敛, 且其和为 ks .

2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 s, σ . 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$

收敛于 $s \pm \sigma$.

【注】 收敛 $\pm$ 发散 = 发散; 发散 $\pm$ 发散 = 不确定

3) 在级数中去掉、加上或改变有限项不影响级数的敛散性.

25武忠祥考研

4) 收敛级数加括号仍收敛且和不变.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\xleftrightarrow{\text{必要}} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散

收敛 $\xleftrightarrow{\text{充分}} \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛
 $(-1) + (-1) + (-1) + \dots$
 $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

(二) 级数的审敛准则

(1) 正项级数 $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n \geq 0)$

基本定理: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow S_n$ 上有界.

1) 比较判别法: 设 $u_n \leq v_n$, 则

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛
 $+\infty \leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 收敛
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 发散

2) 比较法极限形式: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ ($0 \leq l \leq +\infty$)

① 若 $0 < l < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散.

✓ ② 若 $l = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

✓ ③ 若 $l = +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$$

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

$p > 1$ 收敛
 $p \leq 1$ 发散

2) $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$

($a > 0, q > 0$)

$q < 1$ 收敛
 $q \geq 1$ 发散

3) 比值法: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ $\begin{cases} \text{收敛,} & \rho < 1, \\ \text{发散,} & \rho > 1, \\ \text{不一定,} & \rho = 1, \end{cases}$

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{a} \quad a \rightarrow l$$

4) 根值法: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ $\begin{cases} \text{收敛,} & \rho < 1, \\ \text{发散,} & \rho > 1, \\ \text{不一定,} & \rho = 1, \end{cases}$

5) 积分判别法: 设 $f(x)$ 是 $[1, +\infty)$ 上单调减, 非负的连续函数, 且 $a_n = f(n)$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 同敛散.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$$

依

此

1) 2)

适用

不方便

$$n > \frac{1}{n^p}$$

$$\frac{1}{n^p}$$

适用范围

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

发

方便

$$a^n, n!, n^n$$

$$3) 4)$$

$$1) 2)$$

(2) 交错级数 $(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, u_n > 0)$

莱不尼兹准则: 若 (1) u_n 单调减;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛.

(3) 任意项级数

1) 绝对收敛与条件收敛概念

2) 绝对收敛和条件收敛的基本结论

① 绝对收敛的级数一定收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

② 条件收敛收敛的级数的所有正项 (或负项) 构成的级

数一定发散. 即:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 条件收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n + |u_n|}{2} \text{ 和 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n - |u_n|}{2} \text{ 发散.}$$

$$\sum |u_n| \text{ 正}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ 正}$$

题型一 正项级数敛散性的判定

【例1】判定下列级数的敛散性.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{na}{n+1} \right)^n$ ($a > 0$); 根

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ ($a > 0$); 比

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{\sqrt{\pi}}{n})$; 比较

4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ ($p > 0$); 积分

【解】1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na}{n+1} = a$, 则

(1) 当 $0 < a < 1$ 时, 原级数收敛;

(2) 当 $a > 1$ 时, 原级数收敛;

(3) 当 $a = 1$ 时,

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e} \neq 0$, 原级数发散。

$\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$

【例1】 判定下列级数的敛散性.

$(-\infty x \sim \frac{1}{2}x^2$

25武忠祥考研

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{na}{n+1} \right)^n \quad (a > 0);$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n} \quad (a > 0)$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{\sqrt{\pi}}{n});$

4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n} \quad (p > 0)$

$\sum \frac{1}{n^p}$ ✓

【解】 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{a^n n!} = a \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{a}{e} \equiv 1$

(1) 当 $0 < a < e$ 时, 原级数收敛;

(2) 当 $a > e$ 时, 原级数发散;

(3) 当 $a = e$ 时, ✓

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{(1 + \frac{1}{n})^n} = 1,$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{(1 + \frac{1}{n})^n} > 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$

La

【例1】 判定下列级数的敛散性.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{na}{n+1} \right)^n \quad (a > 0);$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n} \quad (a > 0)$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\sqrt{\pi}}{n} \right);$$

$$4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n} \quad (p > 0)$$

【解】 3) $1 - \cos \frac{\sqrt{\pi}}{n} \sim \frac{1}{2} \frac{\pi}{n^2} \quad (n \rightarrow \infty)$

4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ 与 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x}$ 同敛散

$$p = 2 > 1 \quad \text{收敛}$$

$$\ln x = u$$

$$\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u^p}$$

$$p > 1 \quad \text{收敛}$$

$$p \leq 1 \quad \text{发散}$$

【例2】判定下列级数敛散性.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 \right)$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)$$

【解】 2) $\underline{n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1} = \underline{e^{\frac{\ln n}{n^2+1}} - 1} \sim \underline{\frac{\ln n}{n^2+1}} < \underline{\frac{\ln n}{n^2}} < \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

$\ln n < \sqrt{n}$
 $e^x - 1 \sim x$
 $p = \frac{3}{2} > 1$
 $\sum \frac{1}{n^p}$

【例3】设 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{2n \sin \frac{1}{n}} \cdot u_n = 1$, 试讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性.

【解】由 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{2n \sin \frac{1}{n}} \cdot u_n = 1 > 0$ 知, n 充分大时 $u_n > 0$, 且

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n^{2n \sin \frac{1}{n}}}} = 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2n \sin \frac{1}{n}}}$ 同敛散.

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n \sin \frac{1}{n}) = 2$, 则当 n 充分大时有 $2n \sin \frac{1}{n} > \frac{3}{2}$

从而有 $\frac{1}{n^{2n \sin \frac{1}{n}}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = p$

Handwritten notes and calculations:

- $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$
- $u^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$
- $2 - 2u \leq \frac{1}{u}$
- $\sum \left(\frac{1}{u^2} \right)^{\infty} \rightarrow 0$
- $() - 2$
- $\frac{1}{u^2}$
- $\frac{1}{2n \sin \frac{1}{n}} \rightarrow 2$

【例4】设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 下列结论正确的是

$$\frac{u_n'}{\frac{1}{n}} \rightarrow 0$$

25武忠祥考研

$$u_n < \frac{1}{n} \quad \text{否}$$

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

$$\frac{u_n}{\frac{1}{n}}$$

(B) 若存在非零常数 λ , 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = \lambda$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 u_n = 0$;

$$u_n = \frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{否}$$

(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = \lambda$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$$

$p > 1$ 否

$p \leq 1$ 否

【解1】直接法. $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = \lambda \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = \lambda \neq 0 \quad \text{故应选 (B)}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \quad \text{否}$$

$$u_n = \frac{1}{n \ln n}$$

$$u u_n = \frac{u}{n \ln n} \rightarrow 0$$

【解2】排除法.

题型二 交错级数敛散性判定

25武忠祥考研

【例1】 判定下列级数的敛散性

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + a^2})$$

【解】 (1) $u_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$, 考虑函数 $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

①

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$$

$$= \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} < 0, \quad (x > e^2) \quad \checkmark$$

②

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\sin(4\pi + \varphi) = (-1)^4 \sin \varphi$$

2) 由于

$$\sin(\pi\sqrt{n^2 + a^2}) = \sin[n\pi + (\pi\sqrt{n^2 + a^2} - n\pi)]$$

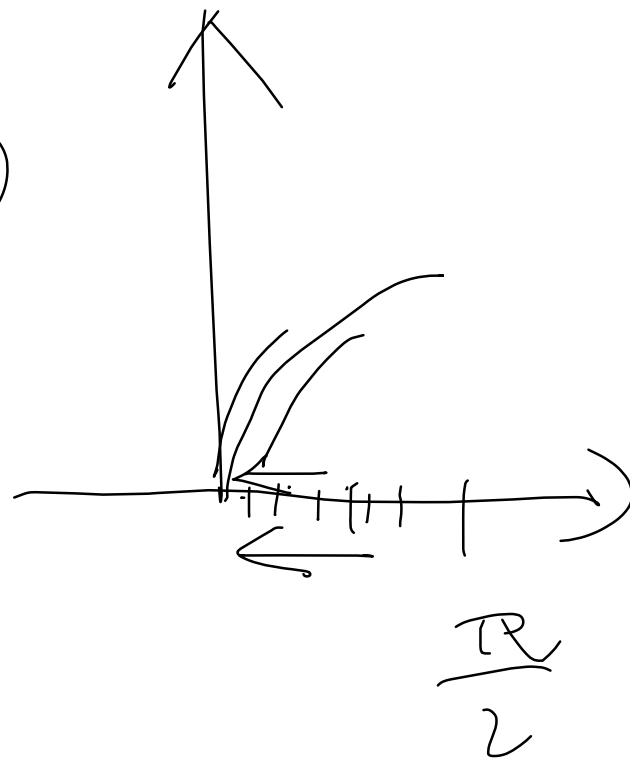
$$= (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2 + a^2} - n\pi)$$

$$= (-1)^n \sin \frac{a^2 \pi}{n^2 + a^2 + n}$$

① $\sin \frac{a^2 \pi}{\sqrt{n^2 + a^2} + n}$ 单调减且

② $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{a^2 \pi}{\sqrt{n^2 + a^2} + n} = 0$

25武忠祥考研



【例2】 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散, 试问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n + 1} \right)^n$ 是否收敛? 为什么?

【解】 由于 a_n 单调减, 且 $a_n > 0$, 即下有界, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $a \geq 0$, 若 $a = 0$, 由莱不尼兹准则知级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛, 这与题设矛盾, 因此 $a > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n + 1} = \frac{1}{a + 1} < 1$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a_n + 1)^n}$ 收敛.

25武忠祥考研

$$\frac{1}{u} > 0$$

$$\frac{1}{u} > 0$$

$$a_n \searrow$$

$$a_n > 0$$

下证

$$a_n \rightarrow a \geq 0$$

$$a \neq 0 \quad \times$$

$$a > 0$$

10:05

题型三 任意项级数敛散性判定

【例1】判定 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \tan \frac{\pi}{2^n} \sin(n!)$ 的敛散性.

【解】 $|n^2 \tan \frac{\pi}{2^n} \sin(n!)| \leq n^2 \tan \frac{\pi}{2^n}$

$$\tan \frac{\pi}{2^n} \sim \frac{\pi}{2^n}$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \tan \frac{\pi}{2^n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi}{2^n}$ 同敛散.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ 收敛, 则原级数绝对收敛, 故原级数收敛.

【例2】讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n n^p}$ 是绝对收敛, 条件收敛还是发散?

【解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{a^{n+1} (n+1)^p} \right| \left| a^n n^p \right| = \frac{1}{|a|}$, < 1 , > 1

1) 当 $|a| > 1$ 时, 原级数绝对收敛.

2) 当 $0 < |a| < 1$ 时, 原级数发散.

当 $\frac{1}{|a|} > 1$ 由于 n 充分大时,

$$\left| \frac{1}{a^{n+1} (n+1)^p} \right| > \left| \frac{1}{a^n n^p} \right|$$

则 $\left| \frac{1}{a^n n^p} \right| \nrightarrow 0$, 从而 $\frac{1}{a^n n^p} \nrightarrow 0$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n n^p}$ 发散.

3) 当 $|a| = 1$ 时,

$$a=1 \quad \sum \frac{1}{n^p}$$

$p > 1$ 收敛
 $p \leq 1$ 发散

$p \leq 0$ 发散

$$a=-1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$$

$p > 1$ 绝对收敛; $0 < p \leq 1$ 条件收敛

比值法
根值法

$$\frac{|a|^n}{(n+1)^p} \rightarrow 1$$

【例3】设常数 $k > 0$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k+n}{n^2}$

(A) 发散；

(B) 绝对收敛；

(C) 条件收敛；

(D) 收敛与发散与 k 取值有关.

【解】 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k+n}{n^2} = k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

$b_n = c_n - a_n$
 $|b_n| \leq |c_n| + |a_n|$

$a_n + b_n = c_n$

$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n|$
 $\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n} = \frac{2(-1)^n}{n}$
 $\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0$

① 绝 ± 发 = 发 *

② 绝 ± 绝 = 绝

③ 发 ± 发 = 发或绝

【例4】 设常数 $\lambda > 0$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}}$$

(A) 发散;

(B) 条件收敛;

(C) 绝对收敛;

(D) 敛散性与 λ 有关.

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

【解】

$$\left| (-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}} \right| = \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}} \leq \frac{1}{2} \left(a_n^2 + \frac{1}{n^2 + \lambda} \right)$$

$$\frac{1}{n^2 + \lambda} < \frac{1}{n^2} \quad \text{且}$$

【例5】 设 $0 \leq \overset{\checkmark}{a_n} < \frac{1}{n}, (n=1,2,\dots)$ ^{$a_n \rightarrow 0$} 则下列级数中肯定收敛的是

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} \underline{a_n}$ ^{$a_n \checkmark$} (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ~~$\times$~~ ?
- (C) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n^2$ ~~$\times$~~ $\checkmark$

【解1】 直接法. 由 $0 \leq a_n < \frac{1}{n}$ 知, $|(-1)^n a_n^2| \leq a_n^2 < \frac{1}{n^2}$

$$|(-1)^n a_n^2| = a_n^2 < \frac{1}{n^2} \checkmark$$

【解2】 排除法.

【例6】设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则必收敛的级数为

$\times$ (A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$

$\times$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$

$\times$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 = \sum \frac{1}{n}$

$\checkmark$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$ $\checkmark$

$$\sum u_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) -$$

$\rightarrow$ 发散

收敛

$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛

$\sum \frac{1}{n \ln n}$ 收敛

收敛

【例7】设 $u_n \neq 0, (n = 1, 2, \dots)$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$$

(A) 发散;

(B) 绝对收敛;

(C) 条件收敛;

(D) 敛散性不定.

【解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{u_n} + \frac{n}{u_{n+1}} \right) = 2 \neq 0$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right) \right|$ 发散,

手书推导：

$$(-1)^{n-1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right) \sim \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2}{n}$$

由 $u_n \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$ 知, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} \cdot \frac{1}{n} = 0$

$$\text{令 } S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{u_k} + \frac{1}{u_{k+1}} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} \right) - \left(\frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} \right) + \left(\frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} \right) - \cdots + (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{u_1} + \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}} \rightarrow \frac{1}{u_1}$$

故原级数条件收敛.

题型四 证明题与综合题

定义

【例1】设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 证明级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.

【证】由于 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ 收敛知

定义 $S_n = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1$

有极限, 从而数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则存在 $M > 0$, 使

$$|a_n| \leq M \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

从而有 $|a_n b_n| \leq M |b_n|$

 a_n

【例3】设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $|f'(x)| \leq h < 1$, 对一切 $x \in [a, b]$, 有 $a \leq f(x) \leq b$, 令 $u_n = f(u_{n-1})$, ($n = 1, 2, \dots$), 其中 $u_0 \in [a, b]$, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$ 绝对收敛.

【证】 由于

$$|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})| = |f'(\xi_1)| |u_n - u_{n-1}|$$

$$\leq h |u_n - u_{n-1}|$$

$$\leq h^2 |u_{n-1} - u_{n-2}|$$

$$\leq \cdots h^n |u_1 - u_0|$$

【例4】 设 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$, ($n = 1, 2, \dots$)

证明 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$ 收敛.

【证】 (1) 因为 $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{1}{a_n}} = 1$, 则 a_n 下有界.

$$\text{又 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{a_n^2}) \leq \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{1}) = 1$$

$$(2) 0 \leq \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} \leq a_n - a_{n+1}$$

$$\text{记 } S_n = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

【例6】设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0, \text{ 证明级数 } \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ 绝对收敛.}$$

【证1】由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ 知, $f(0) = 0$, 且 $f'(0) = 0$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\theta x)}{2!} x^2 \quad (0 < \theta < 1)$$

$$|f''(\theta x)| \leq M \quad (x \in [-\delta, \delta])$$

$$\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2} \frac{1}{n^2}$$

【证2】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|}{\frac{1}{n^2}} = \frac{|f''(0)|}{2} \geq 0$$

$$\begin{aligned} & \geq 0 \leq \frac{|f''(0)|}{2} \frac{1}{n^2} \\ & \geq 0 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ & = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) &= f'(x_0) \Delta x \\ &= f'(x_0 + \theta \Delta x) \Delta x \end{aligned}$$

25武忠祥考研



还不关注，
你就慢了



25武忠祥考研



还不关注，
你就慢了

