25高数精讲（23）

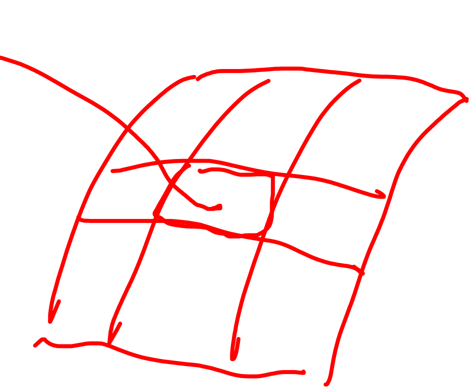
23	三重积分、线积分的计算方法及举例	P251-P259

下 P260-273

主讲 武忠祥 教授

(四) 对面积的面积分（第一类面积分）

1. 定义 $\displaystyle\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$



2. 性质 $\displaystyle\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{-\Sigma} f(x,y,z)dS$

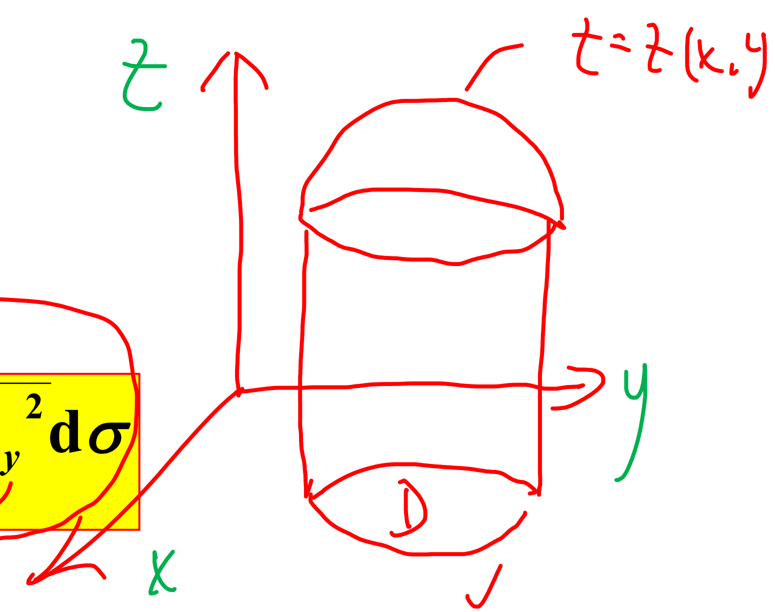
$x^2+y^2=1$

（与积分曲面的方向无关）

3.计算方法

1．直接法: $\Sigma: z = z(x,y), \quad (x,y)\in D$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{D} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^{2}+z_y^{2}}\,\mathrm{d}\sigma$$



$y=y(x,z)$

$x=x(y,z)$

$\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\;dydz$

2. 利用奇偶性

$$\iint_\Sigma x^2 dS = \iint_\Sigma y^2 dS = \iint_\Sigma z^2 dS$$

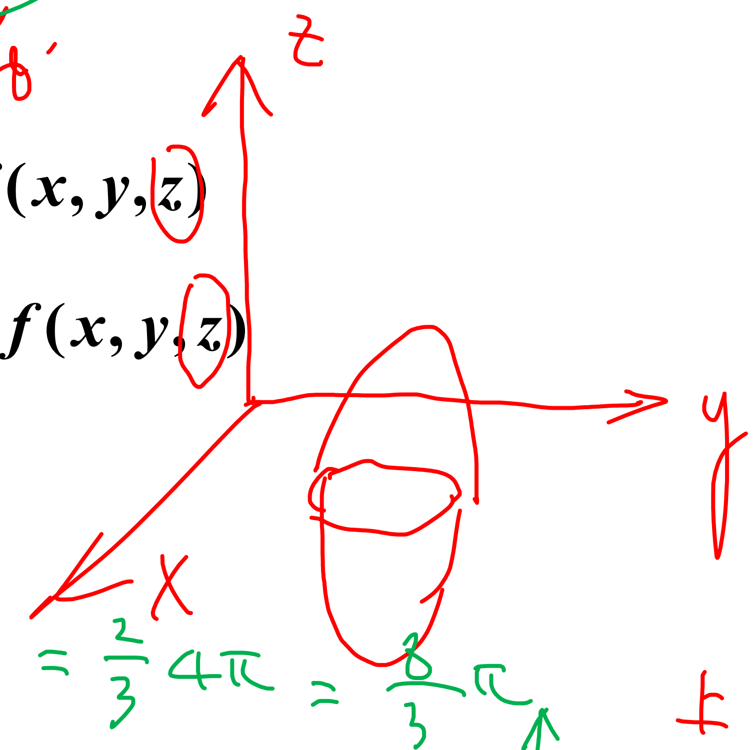
若曲面 Σ 关于 xoy 面对称, 则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S = \begin{cases} 2\iint_{\Sigma_{z\ge 0}} f(x,y,z)\mathrm{d}S, & f(x,y,-z) = f(x,y,z) \\ 0, & f(x,y,-z) = -f(x,y,z) \end{cases}$$

3.利用对称性

$$\oiint (x^2+y^2)dS = \frac{2}{3}\iint (x^2+y^2+z^2)dS = \frac{2}{3}\iint_\Sigma 1\,dS = \frac{2}{3}4\pi = \frac{8}{3}\pi$$

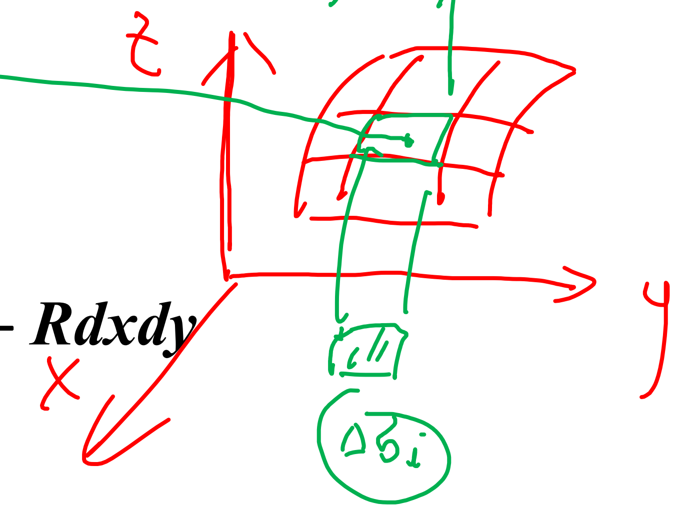
$x^2+y^2+z^2=1$



(五) 对坐标的面积分（第二类面积分）

1. 定义

$$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

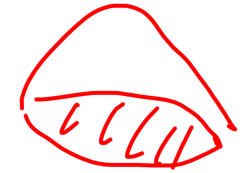


2. 性质

$$\iint_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint_{-\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

（与积分曲面的方向有关）

3. 计算方法



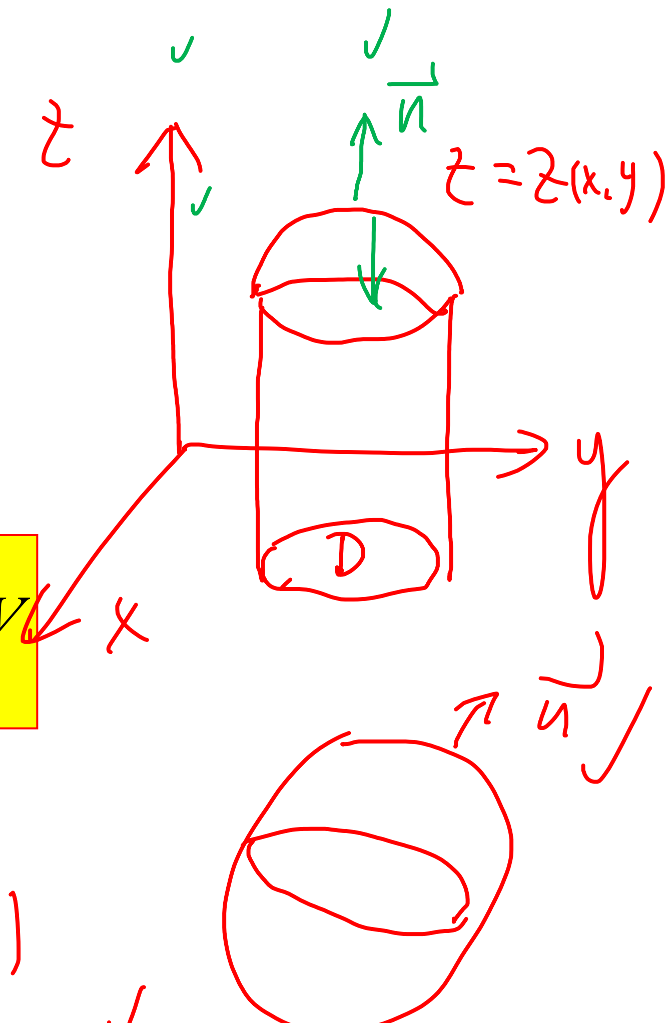
1) 直接法:

设曲面： $z=z(x,y)$, $(x,y)\in D$

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint\limits_{D} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}\sigma$$

上 +

下 −



2) 高斯公式:

$$\oiint\limits_{\Sigma_{外}} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$

∗ 3) 补面用高斯公式.

4.两类面积分的联系

$\vec{n}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

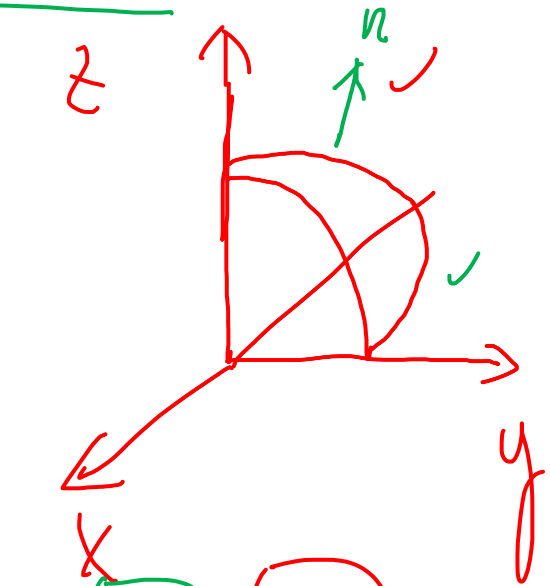
$$\iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}(P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$

$\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\cos\alpha\,\mathrm{d}S$, $\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\cos\beta\,\mathrm{d}S$, $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\cos\gamma\,\mathrm{d}S$

$x^2+y^2+z^2=1$ $2x,2y,2z$

【例】（24年1） 设 $P=P(x,y,z),Q=Q(x,y,z)$ 均为连续函数，Σ 为曲面 $\vec{n}^0=(x,y,z)$

$z=\sqrt{1-x^2-y^2}\,(x\le 0,y\ge 0)$ 的上侧，则 $\iint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx=$（ ）



(A) $\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x}{z}P+\frac{y}{z}Q\right)dxdy$.　　(B) $\iint\limits_{\Sigma}\left(-\frac{x}{z}P+\frac{y}{z}Q\right)dxdy$.

(C) $\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x}{z}P-\frac{y}{z}Q\right)dxdy$.　　(D) $\iint\limits_{\Sigma}\left(-\frac{x}{z}P-\frac{y}{z}Q\right)dxdy$.

【解1】直接法 $\iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}(P\mathrm{dydz}+Q\mathrm{dzdx}+R\mathrm{dxdy})$ $(*)$

$\cos\alpha dS=dydz,\cos\beta dS=dzdx,\cos\gamma dS=dxdy$　$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(x,y,z)$

$dydz=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dxdy=\frac{x}{z}dxdy$　　$dzdx=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}dxdy=\frac{y}{z}dxdy$

【解2】排除法

题型一 计算三重积分

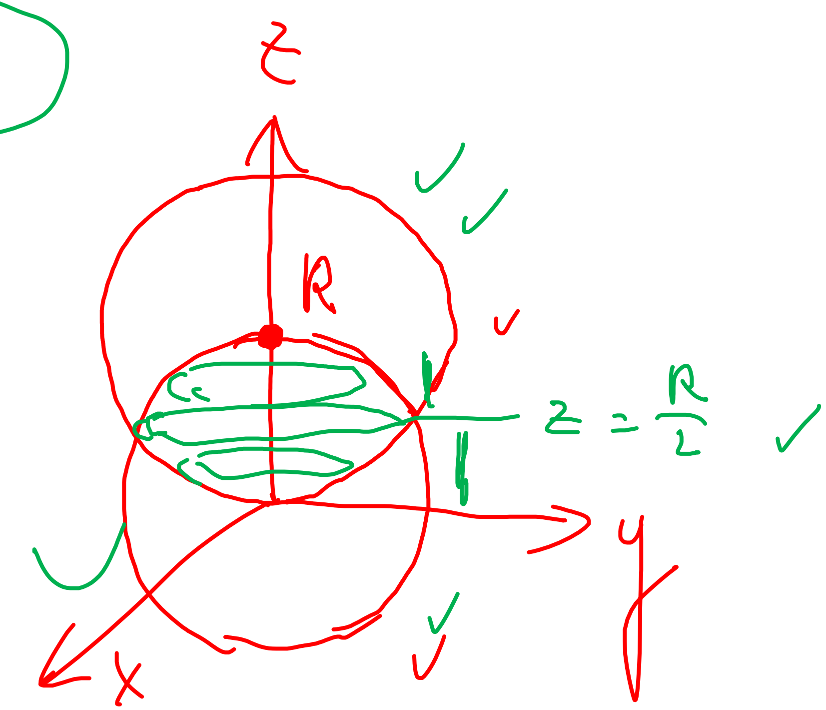
先二后一

【例1】计算 $\iiint\limits_{\Omega} z^2 \mathrm{d}V$，其中 Ω 由 $x^2+y^2+z^2 \le R^2$，$x^2+y^2+z^2 \le 2Rz \ (R>0)$ 所确定.

【解】 原式 $= \int_0^{\frac{R}{2}} dz \iint\limits_{x^2+y^2 \le 2Rz - z^2} z^2 \, dxdy + \int_{\frac{R}{2}}^{R} dz \iint\limits_{x^2+y^2 \le R^2 - z^2} z^2 \, dxdy$

$$= \int_0^{\frac{R}{2}} \pi z^2 (2Rz - z^2) \mathrm{d}z + \int_{\frac{R}{2}}^{R} \pi z^2 (R^2 - z^2) \mathrm{d}z$$

$$= \frac{59}{480} \pi R^5$$



$r^2 = r\cos\varphi$ $\qquad$ $r^2 = 2r\cos\varphi$

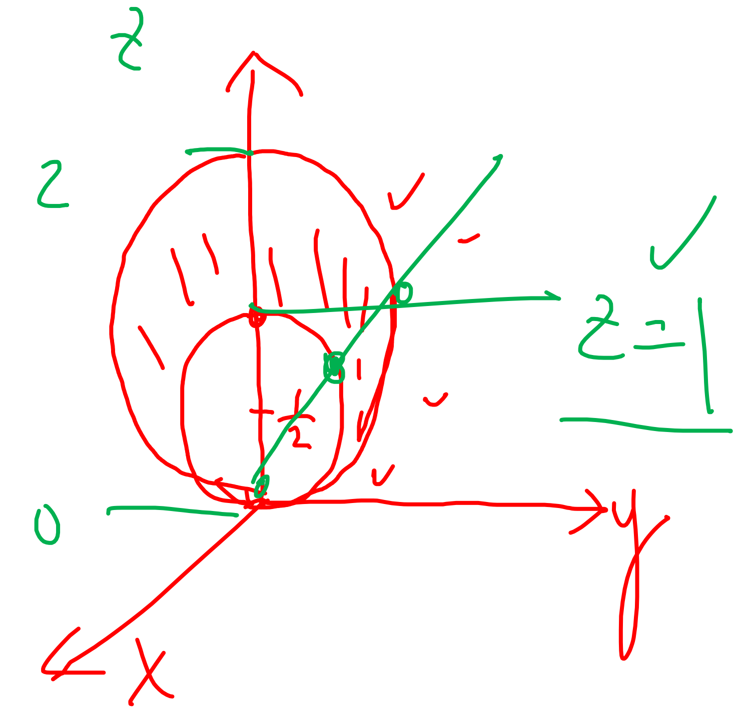
【例2】 计算 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V$, 其中 Ω 由 $x^2+y^2+z^2 \geq z$ 和 $x^2+y^2+z^2 \leq 2z$ 所确定.

【解1】 原式 $=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} r\cos\varphi r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\dfrac{5}{4}\pi.$ 球

【解2】 设 $\Omega_1: x^2+y^2+z^2 \leq z, \Omega_2: x^2+y^2+z^2 \leq 2z$

$\pi(2z-z^2)$

$$\iiint\limits_{\Omega} zdV = \iiint\limits_{\Omega_2} zdV - \iiint\limits_{\Omega_1} zdV$$



方法1 （先二后一）

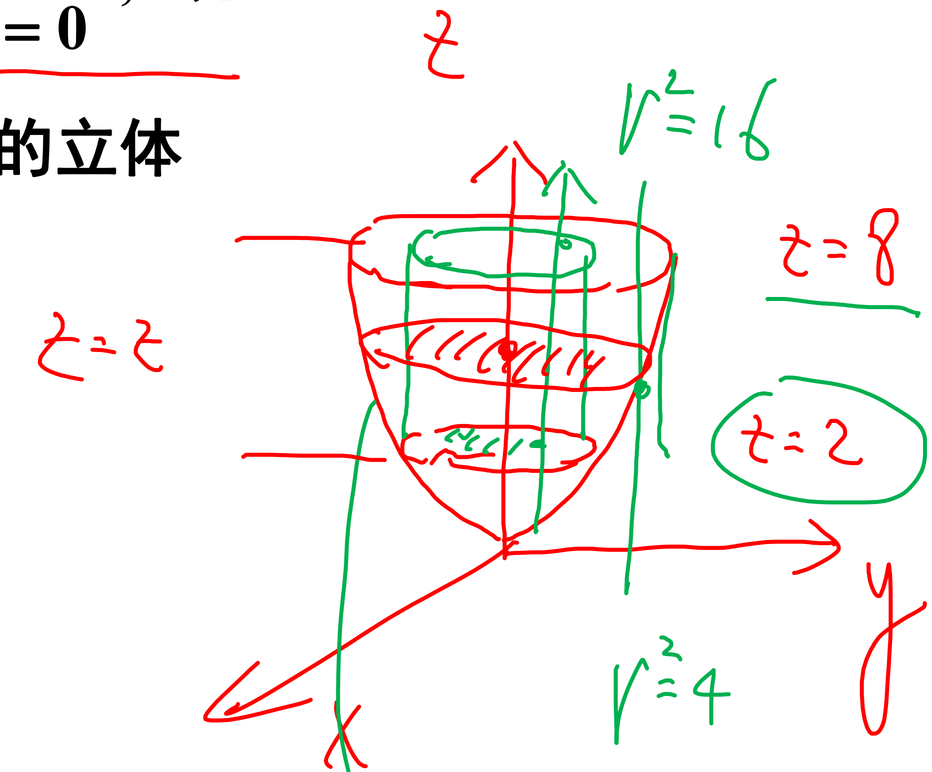
$$\iiint\limits_{\Omega_2} zdV = \int_0^2 dz \iint\limits_{D_z} zdxdy = \int_0^2 \pi z(2z-z^2)dz = \frac{4}{3}\pi$$

方法2 （形心公式） $\iiint\limits_{\Omega_2} zdV = \bar{z}\cdot V = 1\cdot\dfrac{4}{3}\pi = \dfrac{4}{3}\pi$

方法3 （奇偶性） $\iiint\limits_{\Omega_2} zdV = \iiint\limits_{\Omega_2}[(z-1)+1]dV = \iiint\limits_{\Omega_2} = \dfrac{4}{3}\pi$

$f(\sqrt{x^2+y^2})\ \varphi(z)$ 柱

【例3】计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$, 其中 Ω 由曲线 $\begin{cases} y^2=2z, \\ x=0 \end{cases}$ 绕 oz 轴旋转一周而成的曲面和平面 $z=2,\ z=8$ 所围的立体



【解1】 $I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2}\mathrm{d}r\int_2^{8}r^3\mathrm{d}z+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_2^{4}\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{2}}^{8}r^3\mathrm{d}z$

$=336\pi$

【解2】 $I=\int_2^{8}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}r^3\mathrm{d}r=336\pi.$

$x^2+y^2=2z$

$r^2=2z$

8:06

【例4】计算 $\iiint\limits_{\Omega}(mx+ly+nz)^2\,\mathrm{d}V,\Omega: x^2+y^2+z^2\le a^2.$

【解】 $\iiint\limits_{\Omega}(mx+ly+nz)^2\,\mathrm{d}V \qquad \Omega: x^2+y^2+z^2\le a^2.$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(m^2x^2+l^2y^2+n^2z^2)dV$$

$$=\frac{l^2+m^2+n^2}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dV$$

a^2

$$=\frac{4\pi a^5}{15}(m^2+l^2+n^2)$$

【例5】 设 $f(t)$ 连续，$F(t)=\iiint\limits_{\Omega}[z^2+f(x^2+y^2)]dv$，其中 Ω 由 $x^2+y^2\le t^2, 0\le z\le h,$ 所确定．求 $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}, \lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{F(t)}{t^2}$． $\frac{0}{0}$

【解】 $F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t dr\int_0^h[z^2+f(r^2)]rdz$

$$=2\pi\int_0^t[\frac{1}{3}h^3+hf(r^2)]rdr$$

$$F'(t)=\frac{2\pi h^3}{3}t+2\pi htf(t^2)$$

$2t$

$$\lim_{t\to0^+}\frac{F(t)}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{F'(t)}{2t}=\frac{\pi}{3}h^3+\pi hf(0)$$

降维

【例6】计算 $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}y\int_0^y \frac{\sin z}{(1-z)^2}\mathrm{d}z$

$z=y$

$z=0$

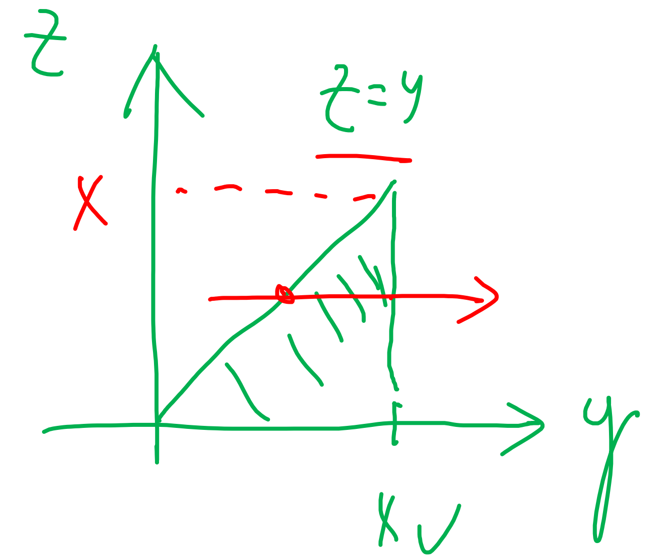
【解】 $I=\int_0^1 dx\int_0^x dz\int_z^x \frac{\sin z}{(1-z)^2}dy$

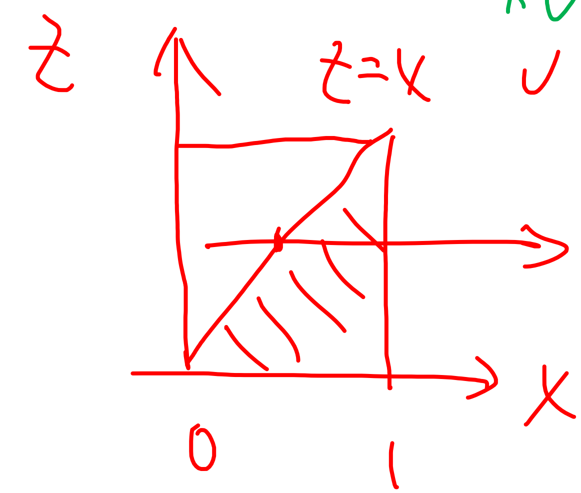
$$=\int_0^1 dx\int_0^x \frac{(x-z)\sin z}{(1-z)^2}dz$$

$$=\int_0^1 dz\int_z^1 \frac{(x-z)\sin z}{(1-z)^2}dx$$

$\frac{1}{2}(x-z)^2$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \sin z dz=\frac{1}{2}(1-\cos 1)$$

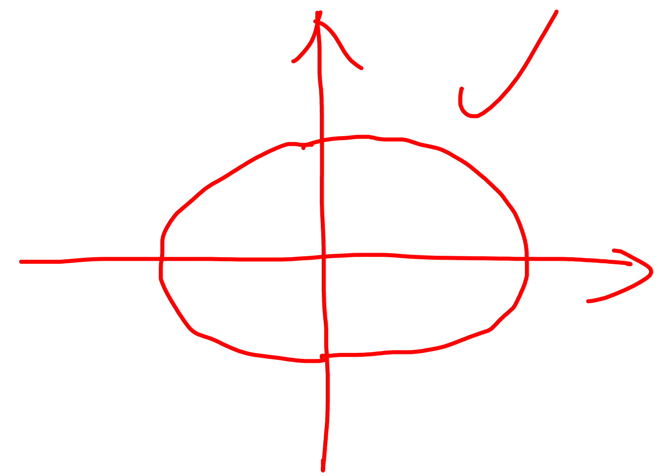




题型二 计算对弧长的线积分

【例1】设 L 是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，其周长为 a，则

$$\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s = \_\_\_\_\_\_.$$



【解】

$$\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s \overset{*}{=} \oint_L (3x^2+4y^2)\mathrm{d}s$$

$$\overset{*}{=} 12\oint_L \left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\right)\mathrm{d}s$$

$$= 12a$$

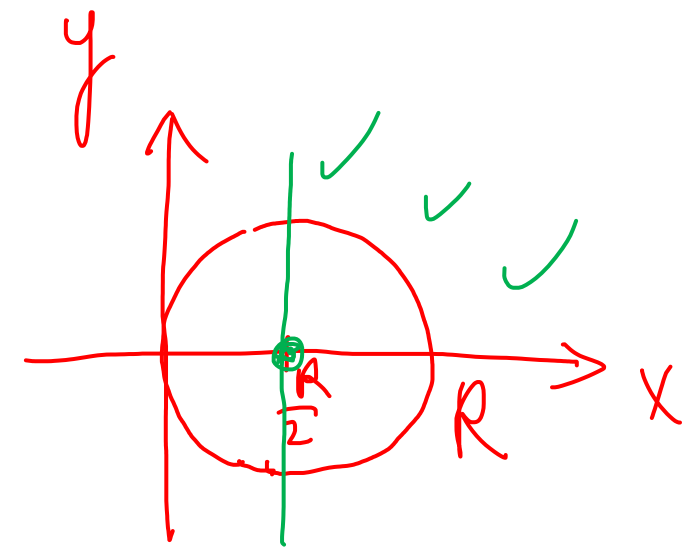
y^2+2y+1

【例2】 计算 $I=\oint_L[x^2+(y+1)^2]\mathrm{d}s$，其中 L 为 $x^2+y^2=Rx(R>0)$.

【解】 $I=\oint_L(x^2+y^2+2y+1)\mathrm{d}s$

$$=R\oint_L x\,ds+\pi R$$

$$=\frac{\pi R^3}{2}+\pi R$$



方法1 $\oint_L x\,ds=\oint_L\left[\left(x-\frac{R}{2}\right)+\frac{R}{2}\right]ds=\frac{R}{2}\oint_L ds=\frac{\pi R^2}{2}$

$x=\frac{R}{2}$

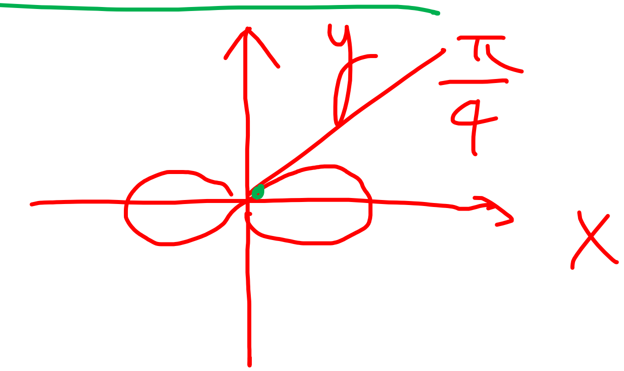
方法2 $\oint_L x\,ds=\bar{x}\cdot l=\frac{\pi R^2}{2}$

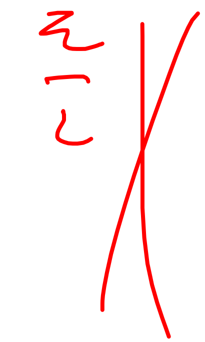
【例3】计算 $I=\oint_C |y|\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)(a>0)$.

$r^4=a^2r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

【解】$r^2=a^2\cos 2\theta$.

$\theta=\frac{\pi}{4}$





$$I=4\int_0^{\frac{\pi}{4}} r\sin\theta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$$

$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta=4a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

y^2 z^2

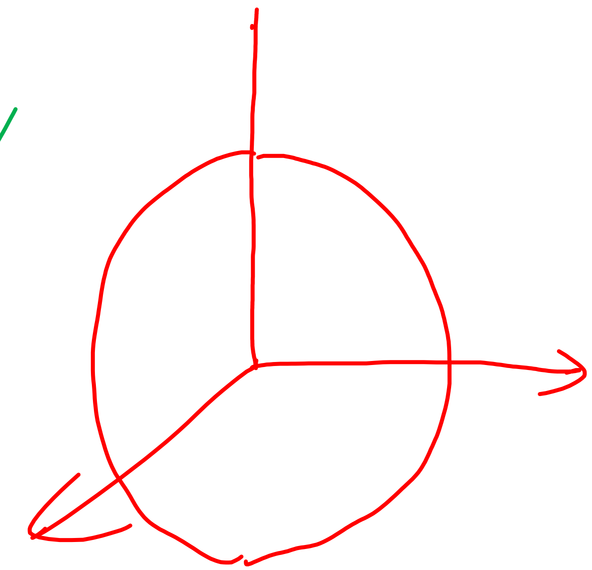
【例4】计算 $I=\oint_L x^2\mathrm{d}s$，其中 L 为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

$z=-(x+y)$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

xy

【解1】直接法 $x^2+xy+y^2=\frac{R^2}{2}$ $\quad \frac{3}{4}x^2+\left(y+\frac{x}{2}\right)^2=\frac{R^2}{2}$



参数方程为： $x=\sqrt{\frac{2}{3}}R\cos t$，$y=\frac{R}{\sqrt{2}}\sin t-\frac{R}{\sqrt{6}}\cos t$，

$$z=-\frac{R}{\sqrt{2}}\sin t-\frac{R}{\sqrt{6}}\cos t,$$

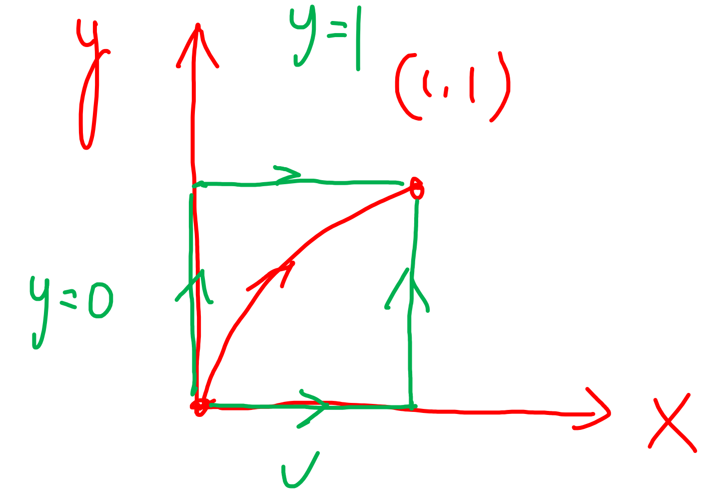
$$I=\oint_L x^2\mathrm{d}s=\frac{2R^3}{3}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=\frac{2\pi}{3}R^3$$

【解2】对称性.

$$I=\oint_L x^2\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_L (x^2+y^2+z^2)ds=\frac{1}{3}\oint_L R^2 ds=\frac{2\pi}{3}R^3$$

题型三 计算对坐标的线积分

【例1】计算 $I=\int_L ye^{y^2}dx+(xe^{y^2}+2xy^2e^{y^2})dy$ 其中 L 为 $y=\sqrt[3]{x}$ 从 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$ 的曲线段.



分析 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=e^{y^2}+2y^2e^{y^2}$

【解1】 改换路径

原式 $=0+\int_0^1(\cancel{e^{y^2}+2y^2e^{y^2}})dy=e$

原式 $=0+\int_0^1 edx=e$

$(ye^{y^2})dx+x(e^{y^2}+2y^2e^{y^2})dy$

【解2】 利用原函数 $ye^{y^2}dx+(xe^{y^2}+2xy^2e^{y^2})dy=$

$xd(ye^{y^2})$

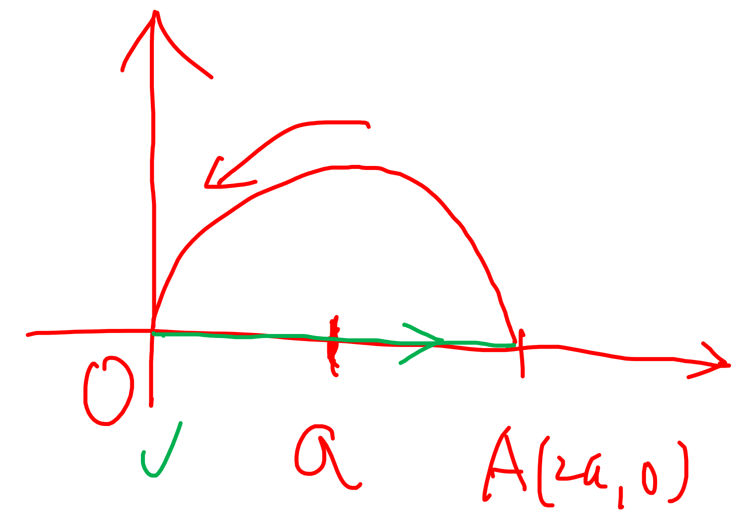
$(ye^{y^2})dx+xd(ye^{y^2})=d(xye^{y^2})$

$\int_L ye^{y^2}dx+(xe^{y^2}+2xy^2e^{y^2})dy=xye^{y^2}\Big|_{(0,0)}^{(1,1)}=e$

$d(xye^{y^2})$

$e^x\cos y-b \neq e^x\cos y-a$

【例3】计算 $I=\int_L[e^x\sin y-b(x+y)]dx+[e^x\cos y-ax]dy$ 其中 a,b 为正常数，L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧.



【解】补线段 $\overline{OA}$

$$I=\oint_{L+\overline{OA}}-\int_{\overline{OA}}$$

$$=\iint_D(b-a)d\sigma-\int_0^{2a}(-bx)dx$$

$$=\iint_D(b-a)d\sigma+b\int_0^{2a}xdx=\frac{\pi a^2}{2}(b-a)+2a^2b$$

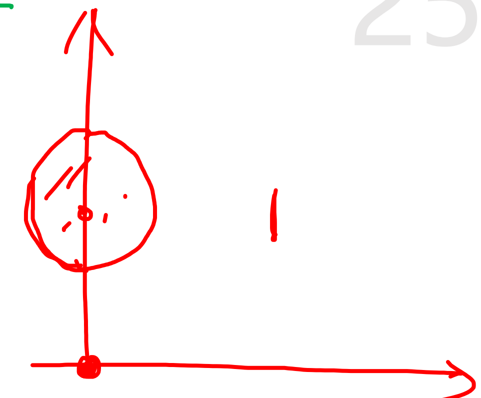
$y=0$

P, Q

【例4】 计算 $I=\oint_C \dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中

(1) C 为 $x^2+y^2-2y=-\dfrac{1}{2}$ 沿逆时针方向;

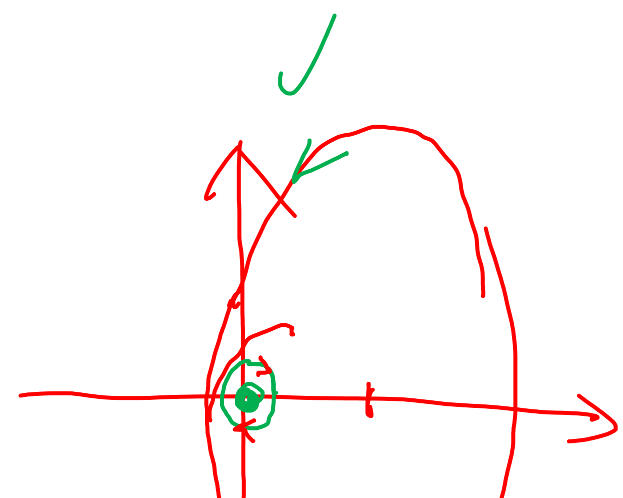
(2) C 为 $4x^2+y^2-8x=4$ 沿逆时针方向.



【解】 (1) $C: x^2+(y-1)^2=\dfrac{1}{2}$

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma$$

$$=\iint_D\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)d\sigma=0$$



(2) $C:\dfrac{(x-1)^2}{2}+\dfrac{y^2}{8}=1$, $L: x^2+y^2=\varepsilon^2(\varepsilon>0)$ 且取顺时针方向,

$$\oint_{L+C}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\iint_D\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)d\sigma=0$$

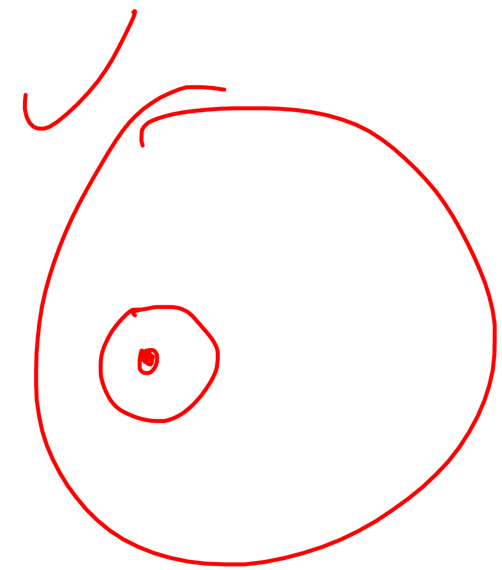
$$\oint_L \frac{xdx - xdy}{x^2+y^2} + \oint_C \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} = 0$$

$$I = \oint_C \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} = -\oint_L \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$$ $= \varepsilon^2$

$$= -\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_L ydx - xdy$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_1}(-1-1)d\sigma$$ -2

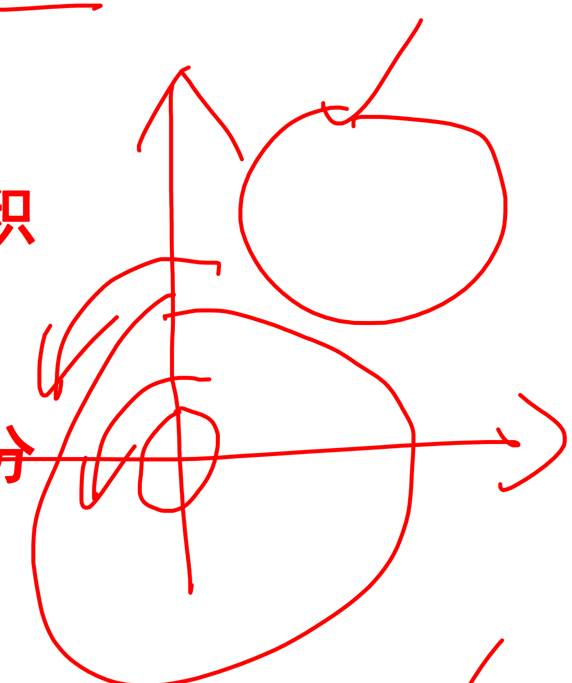
$$= \frac{-1}{\varepsilon^2}2\pi\varepsilon^2 = -2\pi$$



注： 对线积分 $\boxed{\int \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}}$, 1 $P = \frac{y}{x^2 + y^2}, Q = \frac{-x}{x^2 + y^2}$, 除原点

(0,0) 外，P, Q 有连续一阶偏导数, 且 2 $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}, (x, y) \neq (0,0)$

此时有以下结论：



1）沿任何一条不包含原点在内的分段光滑闭曲线的积分为零.

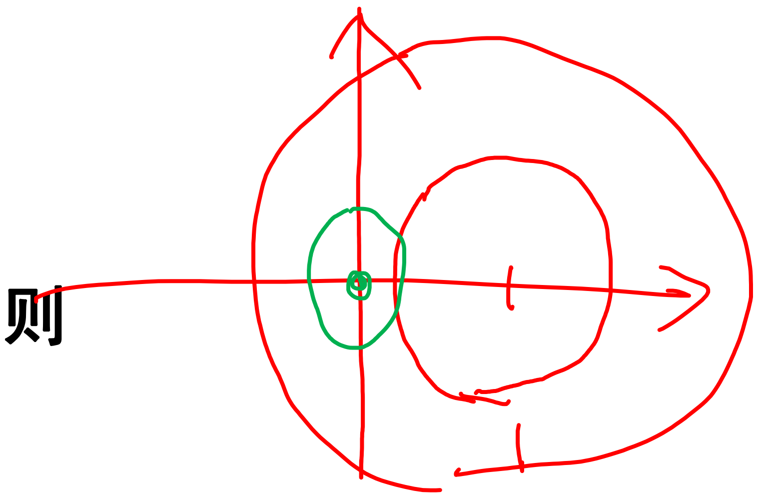
2）沿任何一条包含原点在内的分段光滑闭曲线的积分均相等.

$$\int_L \frac{(x-y)dx - (x+y)dy}{x^2 + y^2}, \quad \int_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2},$$

$$\int_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} \qquad \int_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

【例5】 计算 $I=\oint\limits_L \dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$ $=1$，其中 L 是以 $(1,0)$ 为中心，R 为半径的圆周 $(R\neq 1)$ 取逆时针方向.

r<1



【解】 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}$，$(x,y)\neq(0,0)$

（1）若 $R<1$，则 $(0,0)$ 点不在 L 曲线围成区域内，则

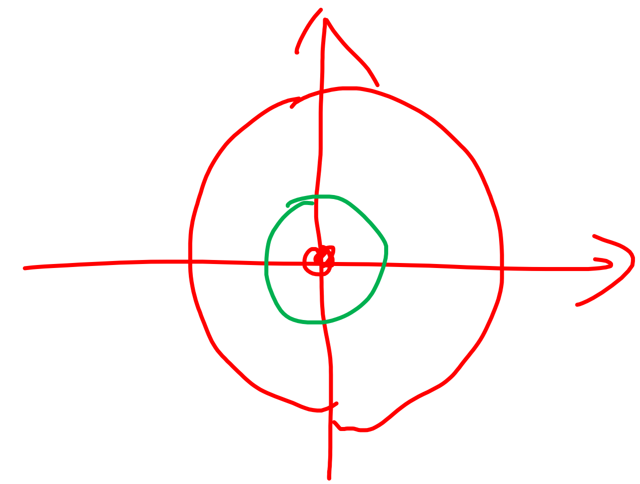
$$I=0$$

（2）若 $R>1$，则 $(0,0)$ 点在曲线 L 所围区域内，选 L 为椭圆 $4x^2+y^2=1$ 且取逆时针方向，则

$$I=\oint\limits_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\oint_L xdy-ydx=\iint\limits_D(1+1)d\sigma=\pi$$

【例】（2020年1） 计算曲线积分 $I=\oint_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy$，其中

L 是 $x^2+y^2=2$，方向为逆时针方向.



【解】 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-4x^2-8xy}{(4x^2+y^2)^2}$，　$(x,y)\neq(0,0)$

L_1 是 $4x^2+y^2=1$，方向为逆时针方向.

$$I=\oint_{L_1}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy$$

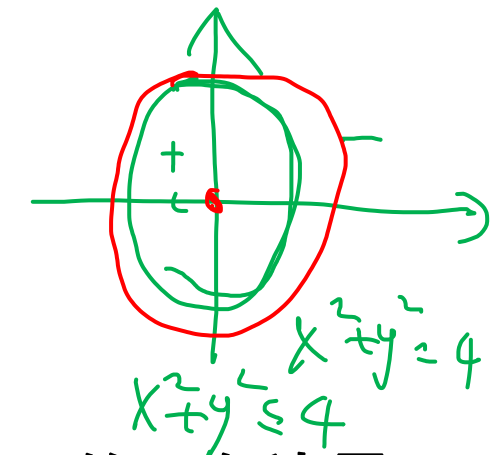
$$I=\oint_{L_1}(4x-y)dx+(x+y)dy=\iint_D(1+1)dxdy=\pi$$

12　　　　补洞

【例】（2021年）

$=0$

* 设 $D\subset R^2$ 是有界单连通封闭区域，$I(D)=\iint\limits_D (4-x^2-y^2)dxdy$ 取得最大值的积分区域记为 D_1



（1）求 $I(D_1)$ 的值；

（2）计算 $\int\limits_{\partial D_1}\dfrac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}$ $=1$，其中 ∂D_1 是 D_1 的正向边界.

$x^2+y^2=4$

【解】（1）$I(D_1)=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(4-x^2-y^2)dxdy=8\pi$

（2）$\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，$(x,y)\ne(0,0)$

$$\int\limits_{\partial D_1}\frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}=\int\limits_{x^2+4y^2=1}(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy$$

$$=\iint\limits_{x^2+4y^2\le 4}(-1-1)d\sigma=-\pi$$

【例6】 已知曲线积分 $\int_L \frac{xdy-ydx}{\varphi(x)+y^2}=A$（常数），其中 $\varphi(x)$ 有连续导数且 $\varphi(1)=1$. L 是绕 (0, 0) 一周的任一分段光滑正向闭曲线，试求 $\varphi(x)$ 及 A.

【解】 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \quad (x,y)\neq(0,0).$

$$x\varphi'(x)=2\varphi(x)$$

$$\varphi(x)=Cx^2$$

$\varphi(x)=x^2$

【例7】 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，$f(1)=f'(1)=1$，且

$$\oint_L \left[\frac{y^2}{x}+xf\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx+\left[y-xf'\left(\frac{y}{x}\right)\right]dy=0 \quad \neq 0$$

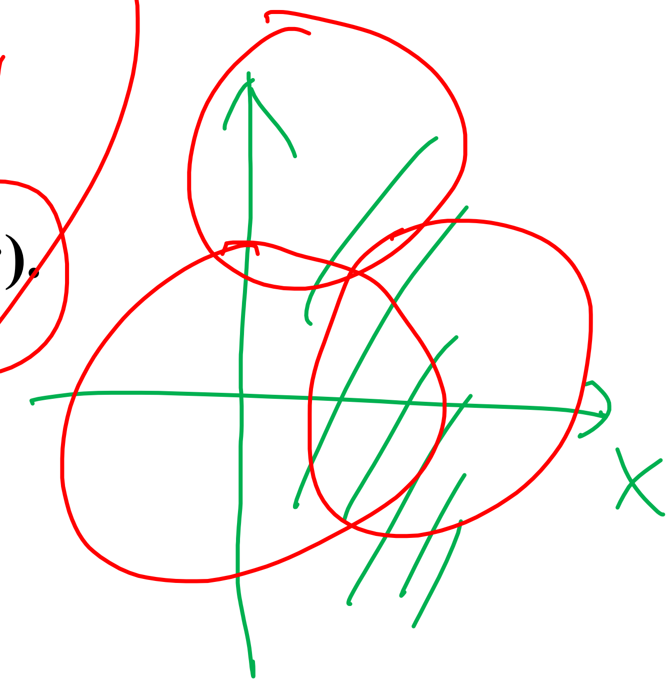
其中 L 是右半平面 $x>0$ 内任一分段光滑简单闭曲线，求 $f(x)$.

$x^2+y^2=1$

$4x^2+y^2$

x^2+4y^2

$f(*)$



【解】 由题设条件知，在 $x>0$ 处

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y^2}{x}+xf\left(\frac{y}{x}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[y-xf'\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

$$2\frac{y}{x}+f'\left(\frac{y}{x}\right)=-f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$f'=p$

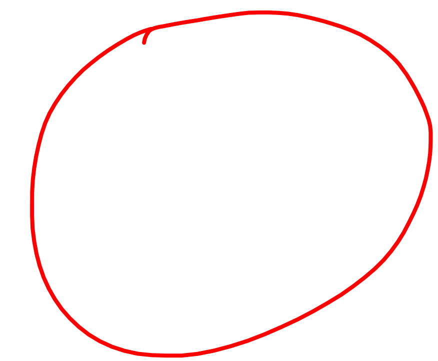
令 $\frac{y}{x}=t$，则 $tf''(t)-2f'(t)=2t$ $\quad f''(t)-\frac{2}{t}f'(t)=2$

$f'=y$

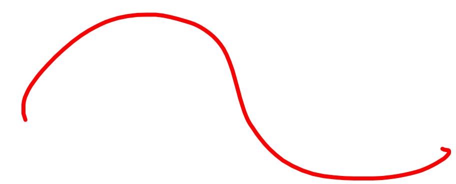
$$f'(t)=t^2\left[-\frac{2}{t}+C_1\right]=-2t+C_1t^2 \qquad f(x)=x^3-x^2+1$$

$$= e^{-\int -\frac{2}{t}dt}\left[\int 2e^{\int -\frac{2}{t}dt}dt+C\right]$$

闭 $\oint_C$ √



不闭 $\int_C$




还不关注，
你就慢了