25高数强化（24）

24	曲面积分计算举例；多元积分应用（质量、质心、形心、转到惯量，变力沿曲线做功，场论初步（散度，旋度）	P260-P273

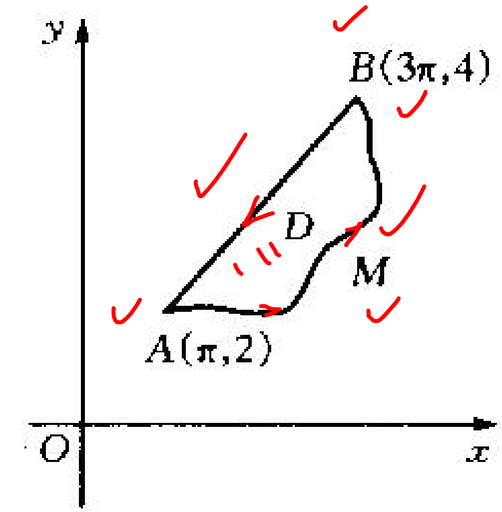
主讲　武忠祥　教授

$\varphi'(y)$ 与 $x-\pi$ 卡 $\varphi'(y)$ 与 x

【例8】 计算 $I=\int_{\overset{\frown}{AMB}}[\varphi(y)\cos x-\pi y]dx+[\varphi'(y)\sin x-\pi]dy$

其中 $\overset{\frown}{AMB}$ 为连结 $A(\pi,2)$ 与 $B(3\pi,4)$ 的线段 $\overline{AB}$ 之下方的任意路线，且该路线与 $\overline{AB}$ 所围图形面积为2.

$\left[\varphi\left(\frac{x}{\pi}+1\right) 与 x\right]\Big|_{3\pi}^{\pi}$



【解1】 补线段 $\overline{BA}$，则

$$I=\int_{\overset{\frown}{AMB}}=\int_{\overset{\frown}{AMB}}+\int_{\overline{BA}}-\int_{\overline{BA}}=\oint_{\overset{\frown}{AMBA}}-\int_{\overline{BA}}$$

$$\oint_{\overset{\frown}{AMBA}}Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=\pi\iint_D d\sigma=2\pi$$

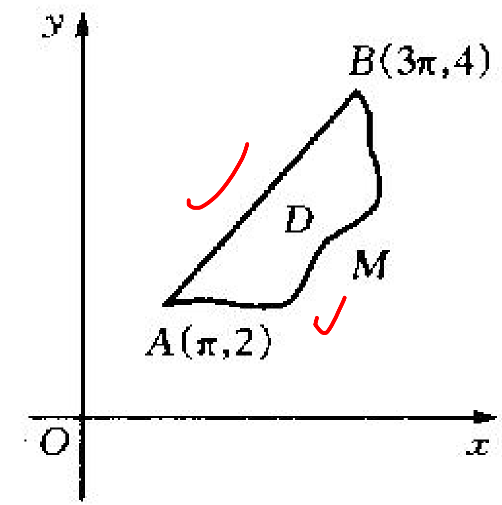
直线 $\overline{BA}$ 的方程为：$y=\frac{x}{\pi}+1$，则

$$\int_{\overline{BA}}=\int_{3\pi}^{\pi}\left[\varphi\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\cos x-\pi\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\right]dx+\left[\varphi'\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\sin x-\pi\right]\frac{1}{\pi}dx=2\pi(1+3\pi)$$

故 $I=2\pi-2\pi(1+3\pi)=-6\pi^2$

【例8】 计算 $I=\int_{\overset{\frown}{AMB}}[\varphi(y)\cos x-\pi y]dx+[\varphi'(y)\sin x-\pi]dy$

其中 $\overset{\frown}{AMB}$ 为连结 $A(\pi,2)$ 与 $B(3\pi,4)$ 的线段 $\overline{AB}$ 之下方的任意路线，且该路线与 $\overline{AB}$ 所围图形面积为2.



【解2】 $I=\int_{\overset{\frown}{AMB}}\varphi(y)\cos x dx+\varphi'(y)\sin x dy-\pi\int_{\overset{\frown}{AMB}}ydx+dy$

无关

$$\int_{\overset{\frown}{AMB}}\varphi(y)\cos x dx+\varphi'(y)\sin x dy=\varphi(y)\sin x\Big|_{(\pi,2)}^{(3\pi,4)}=0$$

$$\int_{\overset{\frown}{AMB}}ydx+dy=\oint_{AMB+BA}ydx+dy-\int_{BA}ydx+dy$$

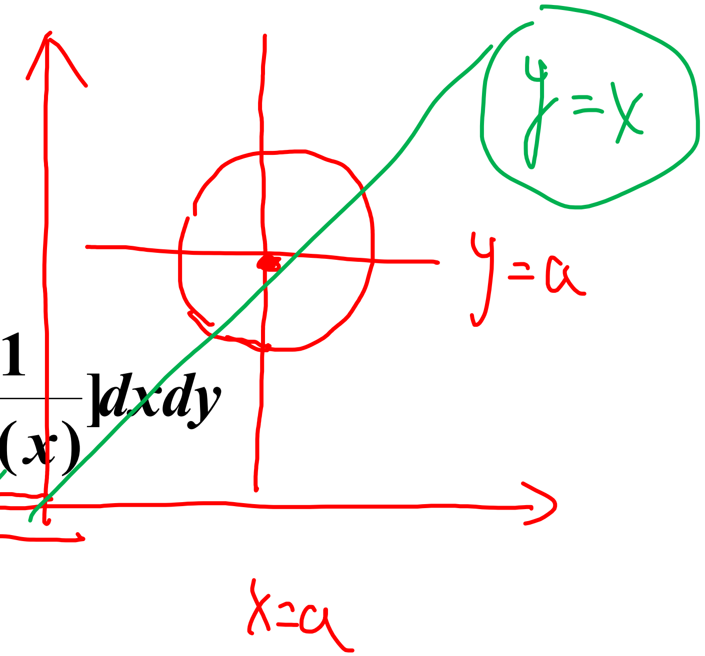
$$=-\iint_D dxdy-\int_4^2(\pi y+1)dy=6\pi$$

【例9】设 L 是圆周 $(x-a)^2+(y-a)^2=1\ (a>0)$ 的逆时针方向，

$f(x)$ 为连续正值函数，试证：

$$\oint_L [x^2+xf(y)]\mathrm{d}y-[y^2+\frac{y}{f(x)}]\mathrm{d}x \ge 2\pi(1+2a)$$

$2[(x-a)+a]$



【证】由格林公式知

$$\oint_L [x^2+xf(y)]dy-[y^2+\frac{y}{f(x)}]dx = \iint_D [2x+2y+f(y)+\frac{1}{f(x)}]dxdy$$

$$\iint_D (2x+2y)dxdy = 2\bar{x}S+2\bar{y}S = 2a\pi+2a\pi = 4a\pi$$

$(\sqrt{f})^2 \quad (\frac{1}{\sqrt{f}})^2$

$$\iint_D [f(y)+\frac{1}{f(x)}]dxdy = \iint_D [f(x)+\frac{1}{f(x)}]dxdy \ge 2\iint_D \sqrt{f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}}dxdy = 2\pi$$

空间　降维

【例10】 计算曲线积分 $I=\oint_L xz\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+\dfrac{y^2}{2}\mathrm{d}z$，其中 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向.

$x+y-z=0$

【解1】直接法　参数方程　$x=\cos t, y=\sin t, z=\cos t+\sin t$

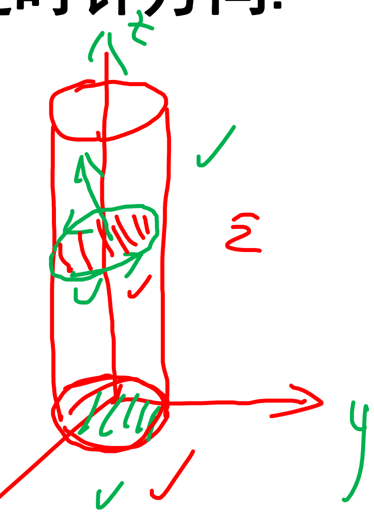
$\vec{n}=(1,1,-1)$

$\vec{n}=(-1,-1,1)$

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}[\cos t(\cos t+\sin t)(-\sin t)+\cos^2 t+\frac{\sin^2 t}{2}(-\sin t+\cos t)]dt$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 t dt=2\int_0^{\pi}\cos^2 t dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=4\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\pi$$

$\vec{n}^0\left(-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)$



$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt3\,dxdy$

【解2】 利用斯托克斯公式

$$I=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xz & x & \dfrac{y^2}{2}\end{vmatrix}dS=\frac{1}{\sqrt3}\iint_\Sigma(1-x-y)dS$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le1}(1-x-y)d\sigma=\pi$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt3},\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt3},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt3},$$

【例10】计算曲线积分 $I=\oint_L xz\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+\frac{y^2}{2}\mathrm{d}z$，其中 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向.

曲 平面

【解3】 化为平面线积分

$$I=\oint_C x(x+y)dx+xdy+\frac{y^2}{2}(dx+dy)$$

$$=\oint_C[x(x+y)+\frac{y^2}{2}]dx+[x+\frac{y^2}{2}]dy$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le1}(1-x-y)d\sigma \qquad \text{（格林公式）}$$

$$=\pi$$

$x^2+y^2=1$ 逆

12分 降维

$z=2x-1$

【例】（24年1） 已知有向曲线 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=2x$ 与平面 $2x-z-1=0$ 的交线，从 z 轴正向往负向看去为逆时针方向，计算 $\int_L (6xyz-yz^2)dx+2x^2zdy+xyzdz$.

πab

【解1】 原式 $=\int_C [6xy(2x-1)-y(2x-1)^2 dx+2x^2(2x-1)dy+2xy(2x-1)dx$

$(2,0,-1)$

$(-2,0,1)$

$\left(\frac{-2}{\sqrt5},0,\frac{1}{\sqrt5}\right)$

$$=\int_C [8xy(2x-1)-y(2x-1)^2 dx+2x^2(2x-1)dy \qquad C: 5\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+y^2=\frac{4}{5}$$

$$=\iint_D [12x^2-4x-8x(2x-1)+(2x-1)^2]dxdy=\iint_D dxdy=\frac{4\pi}{5\sqrt5}$$

【解2】 原式 $=\frac{1}{\sqrt5}\iint_\Sigma \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 6xyz-yz & 2x^2z & xyz \end{vmatrix} dS=\frac{1}{\sqrt5}\iint_\Sigma (4x^2-4xz+\cancel{x}^2)dS$

$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$

大+小，

$$=\iint_D [4x^2-4x(2x-1)+(2x-1)^2]d\sigma=\iint_D dxdy=\frac{4\pi}{5\sqrt5}$$

2S（=宝典）

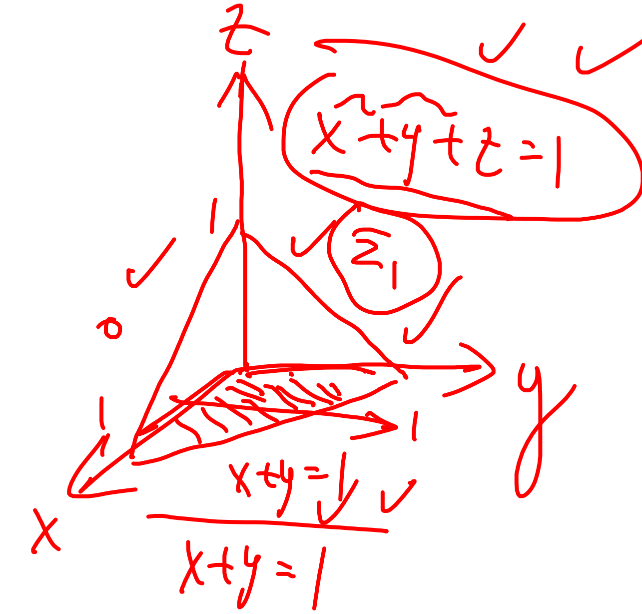
题型四 计算对面积的面积分

$|x|+|y|=1$

【例1】 设曲面 $\Sigma:|x|+|y|+|z|=1$，则 $\oiint\limits_{\Sigma}(x+|y|)\,\mathrm{d}S=$ ____.

【解1】 原式 $=8\iint\limits_{\Sigma_1} ydS$

$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{3}\,dxdy$



$y=\frac{1}{3}$

方法1 $\iint\limits_{\Sigma_1} ydS=\iint\limits_{D} y\sqrt{3}dxdy=\sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x} ydy=\frac{\sqrt{3}}{6}$

方法2 $\iint\limits_{\Sigma_1} ydS=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma} dS=\frac{\sqrt{3}}{6}$

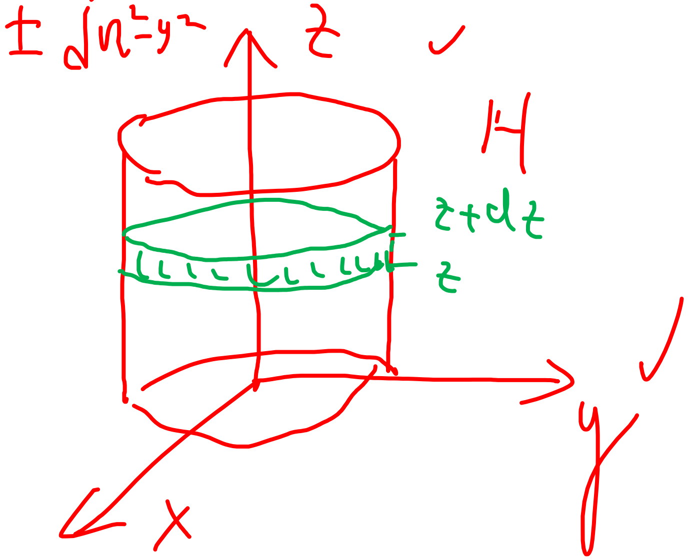
方法3 $\iint\limits_{\Sigma_1} ydS=\overline{y}\cdot S=\frac{1}{3}S=\frac{\sqrt{3}}{6}$

【解2】 原式 $=\frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}(|x|+|y|+|z|)\,\mathrm{d}S$ $=\frac{1}{3}S$

【例3】计算 $\iint\limits_{\Sigma} \dfrac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 为柱面 $x^2+y^2=R^2$ 夹在 $z=0$ 和 $z=H\,(H>0)$，之间的部分.

$z=z(x,y)$

$x=\pm\sqrt{R^2-y^2}$



【解1】✓

*【解2】

$$\iint\limits_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2} = \iint\limits_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}S}{R^2+z^2} \quad \mathrm{d}S = 2\pi R\,dz$$

$$= 2\pi R \int_0^H \frac{dz}{R^2+z^2}$$

$$= 2\pi \arctan\frac{H}{R}$$

abxy　　adx

【例4】 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(ax+by+cz+\mathrm{d})^2\mathrm{d}S$, 其中 Σ 为球面

$x^2+y^2+z^2=R^2$.

【解】 原式 $\overset{(*)}{=}\iint\limits_{\Sigma}(a^2x^2+b^2\overset{x^2}{y^2}+c^2\overset{x^2}{z^2})dS+4\pi R^2d^2$

$$\overset{*}{=}(a^2+b^2+c^2)\iint\limits_{\Sigma}x^2dS+4\pi R^2d^2$$

$$\overset{*}{=}\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\iint\limits_{\Sigma}(\overset{R^2}{x^2+y^2+z^2})dS+4\pi R^2d^2$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\iint\limits_{\Sigma}R^2dS+4\pi R^2d^2$$

$$=\frac{4\pi}{3}(a^2+b^2+c^2)R^4+4\pi R^2d^2$$

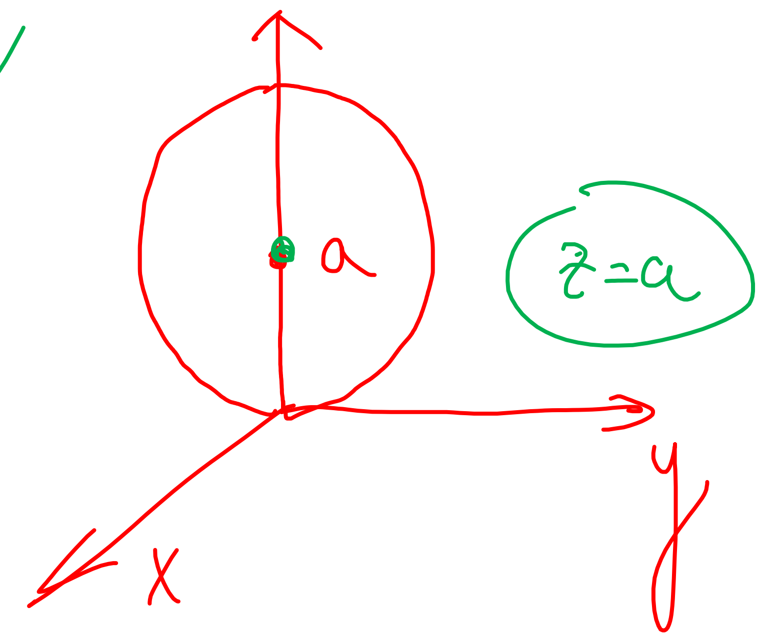
【例5】 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$, 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=2az(a>0)$.

【解】 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=\iint\limits_{\Sigma}2azds=2a\boxed{\iint\limits_{\Sigma}zdS}$

1) $\iint\limits_{\Sigma}zdS=\iint\limits_{\Sigma}[(z-a)+a]dS=\iint\limits_{\Sigma}adS=4\pi a^3$

2) $\iint\limits_{\Sigma}zdS=\bar{z}\cdot S=a\cdot 4\pi a^2=4\pi a^3$

则 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=8\pi a^4$



$z=a$

题型五 计算对坐标的面积分

【例1】计算曲面积分 $\iint\limits_{S} \frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中 S 是由曲面 $x^2+y^2=R^2$ 及两平面 $z=R, z=-R\ (R>0)$ 所围成立体表面(如右图)的外侧.

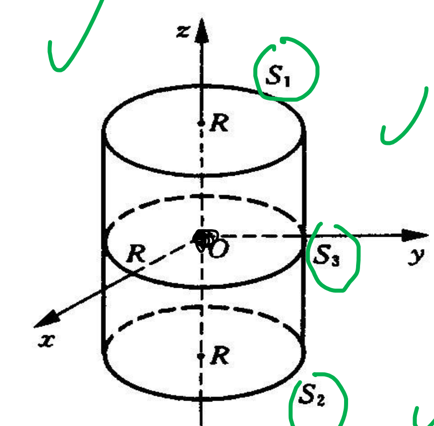
P Q R

【解】设 S_1, S_2, S_3 依次为 S 的上、下底和圆柱面部分，则

$$\iint\limits_{S_1} \frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2} = \iint\limits_{S_2} \frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2} = 0.$$

$$\iint\limits_{S_1+S_2} \frac{z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2} = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{R^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+R^2} - \iint\limits_{D_{xy}} \frac{(-R)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+R^2} = 0.$$

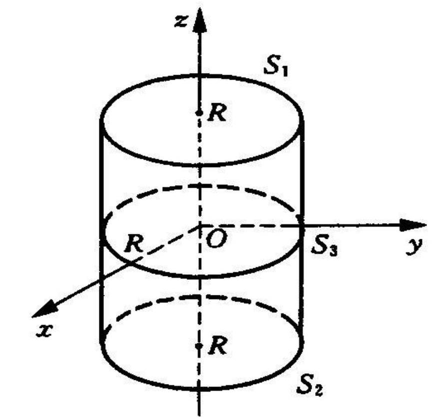
$$\iint\limits_{S_3} \frac{z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2} = 0,$$



$x = \pm\sqrt{R^2-y^2}$

$x^2+y^2=R^2$

$$\iint\limits_{S_3} \frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2} = \iint\limits_{D_{yz}} \frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \iint\limits_{D_{yz}} \frac{-\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$



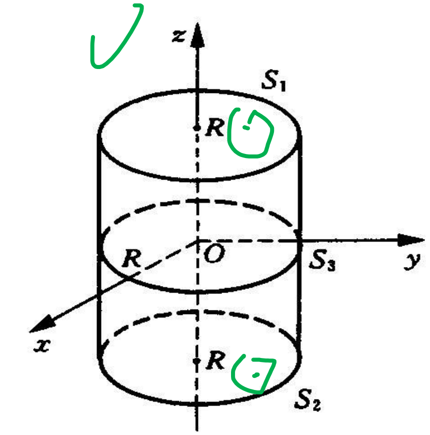
$$= 2\iint\limits_{D_{yz}} \frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}z}{R^2+z^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{2}R.$$

奇　　　偶

【例1】 计算曲面积分 $\iint\limits_S \dfrac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$, 其中 S 是由曲面 $x^2+y^2=R^2$ 及两平面 $z=R, z=-R\ (R>0)$ 所围成立体表面 (如右图) 的外侧.

10:15



【解2】 若曲面 S 关于 xOy 平面对称, 则 ①

$$\iint\limits_S R(x,y,z)dxdy = \begin{cases} 0, & f(x,y,-z) = f(x,y,z), \\ 2\iint\limits_{S_{z\ge 0}} R(x,y,z)dxdy, & f(x,y,-z) = -f(x,y,z). \end{cases}$$

②

$$\iint\limits_S \frac{z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2} = 0$$

$$\iint\limits_{S_3} \frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2} = 2\iint\limits_{S_{3(x\ge 0)}} \frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2} = 2\iint\limits_{D_{yz}} \frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}z}{R^2+z^2}$$

补面+高斯

*【例2】计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2\ (z\ge 0)$ 的上侧.

z=0

6(x²+y²)

【解】$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}$

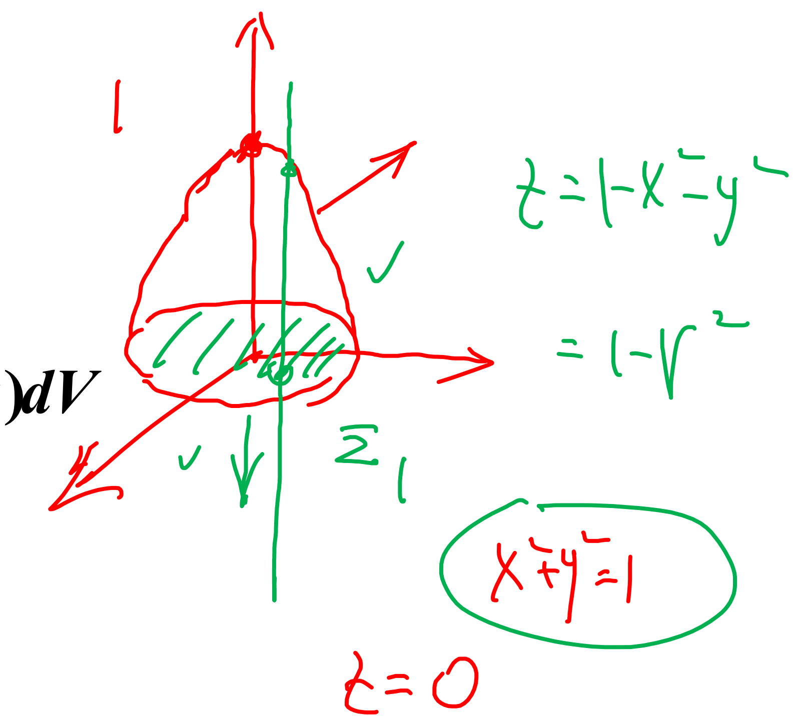
$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy=\iiint\limits_{\Omega}(6x^2+6y^2+6z)dV$$

$$=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_0^{1-r^2}(z+r^2)rdz$$

$$=12\pi\int_0^1\left[\frac{1}{2}r(1-r^2)^2+r^3(1-r^2)\right]dr=2\pi$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(-3)d\sigma=3\pi$$

故 $I=2\pi-3\pi=-\pi$



12分

【例】(2023) 设空间有界区域 Ω 由柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=0$ 和 $x+z=1$ 围成，Σ 为 Ω 的边界曲面的外侧，计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} 2xzdydz+xz\cos ydzdx+3yz\sin xdxdy$$

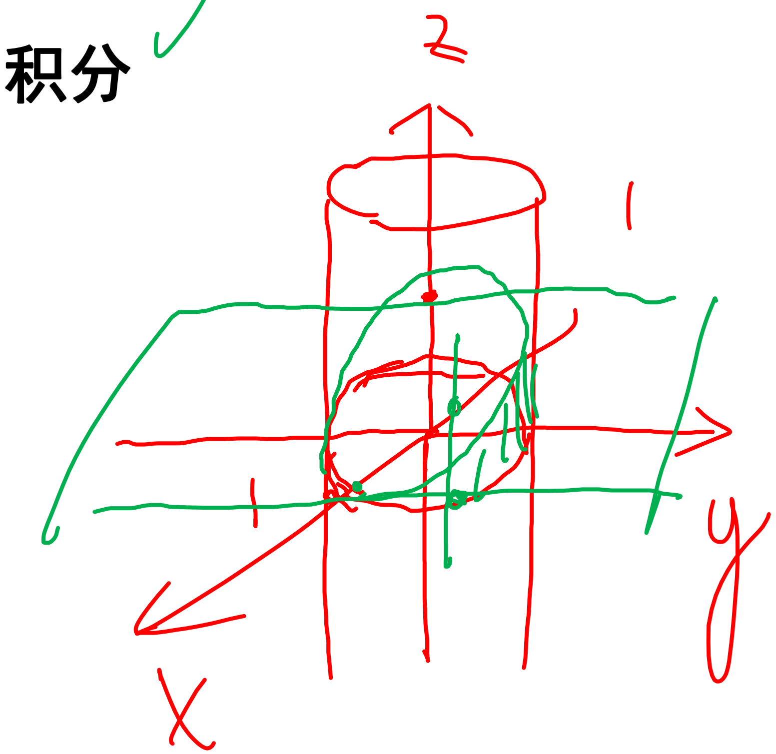
【解】

$$I=\iiint_{\Omega}(2z-xz\sin y+3y\sin x)dv$$

$$\iiint_{\Omega} xz\sin ydv=0 \qquad \iiint_{\Omega} y\sin zdv=0$$

$$I=2\iiint_{\Omega} zdv=2\iint_{D}dxdy\int_0^{1-x}zdz$$

$$=\iint_{D}(x^2+1)dxdy=\frac{1}{2}\iint_{D}(x^2+y^2)dxdy+\pi=\frac{5}{4}\pi.$$



D: $x^2+y^2\le 1$

【例3】 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, 其中

$x^2+y^2+z^2=a^2$

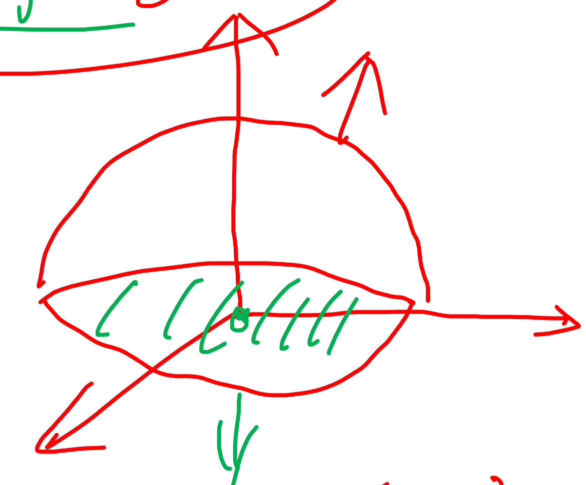
1) Σ 为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

2) Σ 为上半椭球面 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{25}=1(z\geq 0)$

① 代入

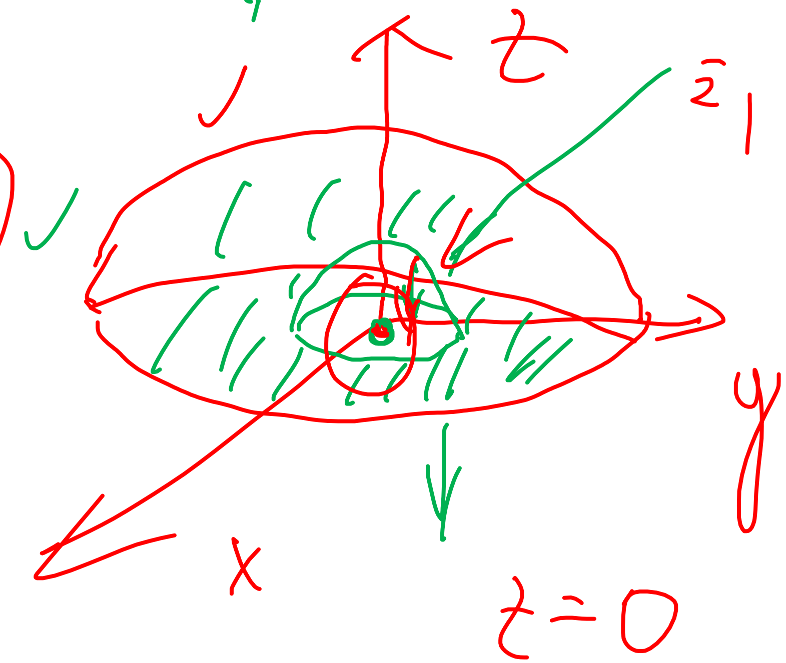
$z=0$

② 补面



【解】 1) $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{a^3}$

$$=\frac{1}{a^3}\Big[\iint\limits_{\Sigma+S}-\iint\limits_{S}\Big]=\frac{1}{a^3}\Big[\iiint\limits_{\Omega}3dV-0\Big]=\frac{3}{a^3}\cdot\frac{2}{3}\pi a^3=2\pi$$



2) $I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint\limits_{\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_2}$

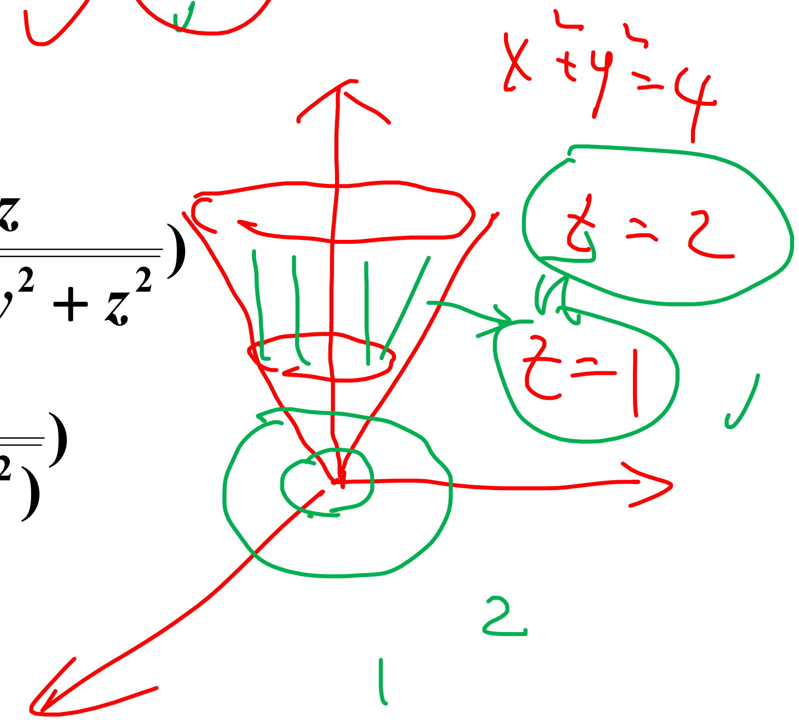
$$=\iiint\limits_{\Omega}0dV-\iint\limits_{\Sigma_1}-0=2\pi$$

$x^2+y^2=z^2$ $\quad\vec n\quad$ $x^2+y^2-z^2=1$ $\quad 2x\quad 2y\quad -2z$

【例5】 设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\ (1\le x^2+y^2\le 4)$ 的下侧，$f(x)$ 是连续函数，计算

$$I=\iint_\Sigma [xf(xy)+2x-y]dydz+[yf(xy)+2y+x]dzdx+[zf(xy)+z]dxdy$$

【解】 $\vec n=(x,y,-z)$ 统一型 归



$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{-z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$=\left(\frac{x}{\sqrt{2(x^2+y^2)}},\frac{y}{\sqrt{2(x^2+y^2)}},\frac{-z}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}\right)$$

$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt2\,dxdy$

$$I=\iint_\Sigma \frac{1}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}[\underbrace{(x^2+y^2-z^2)}_{=0}f(xy)+\underbrace{2x^2+2y^2-z^2}_{x^2+y^2}]dS$$

$$=\frac{\sqrt2}{2}\iint_\Sigma\sqrt{x^2+y^2}\,dS=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 r^2dr=\frac{14\pi}{3}$$

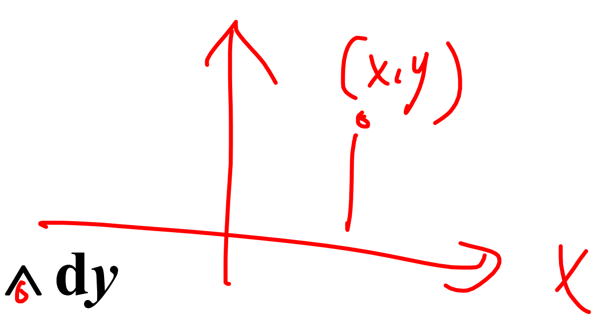
第二节 多元积分应用

二重 三重 √ √一型线 √一型面

	平面板	空间体	曲线段	曲面片
√ 几何度量	$S=\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma$ √	$V=\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}V$	$L=\int_C \mathrm{d}s$	$S=\iint\limits_\Sigma \mathrm{d}S$
√ 质量	$m=\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$	$m=\iiint\limits_\Omega \rho(x,y,z)\mathrm{d}V$	$m=\int_C f(x,y,z)\mathrm{d}s$	$m=\iint\limits_\Sigma \rho(x,y,z)\mathrm{d}S$
√ 质心	$\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_D x\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}$	$\bar{x}=\dfrac{\iiint\limits_\Omega x\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}{\iiint\limits_\Omega \rho(x,y,z)\mathrm{d}V}$	$\bar{x}=\dfrac{\int_C x\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}{\int_C \rho(x,y,z)\mathrm{d}s}$	$\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_\Sigma x\rho(x,y,z)\mathrm{d}S}{\iint\limits_\Sigma \rho(x,y,z)\mathrm{d}S}$
√ 形心	$\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_D x\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma}$ √	$\bar{x}=\dfrac{\iiint\limits_\Omega x\mathrm{d}V}{\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}V}$	$\bar{x}=\dfrac{\int_C x\mathrm{d}s}{\int_C \mathrm{d}s}$	$\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_\Sigma x\mathrm{d}S}{\iint\limits_\Sigma \mathrm{d}S}$
√ 转动惯量	$I_x=\iint\limits_D y^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$	$I_x=\iiint\limits_\Omega (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dv$	$I_x=\int_C (y^2+z^2)\rho(x,y,z)ds$	$I_x=\iint\limits_\Sigma (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dS$

√ **1. 变力作功**： $$W=\int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

× **2. 通量**： $$\Phi=\iint\limits_\Sigma P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$



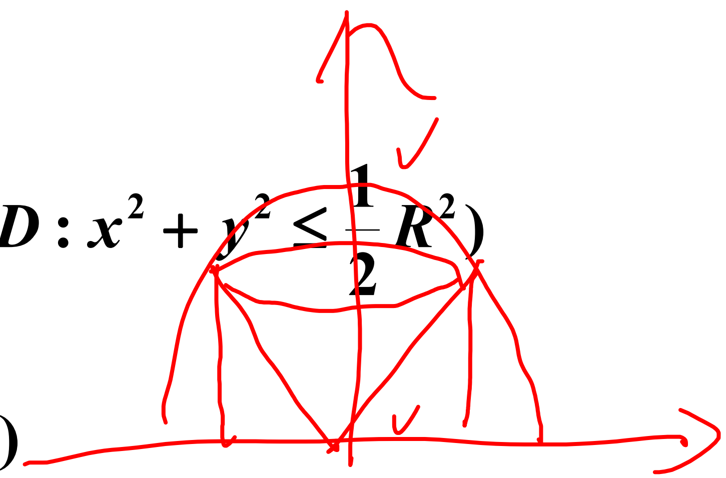
题型一　求几何量

【例1】计算曲面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 和 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体体积.

【解1】利用二重积分计算

$$V=\iint\limits_D[\sqrt{R^2-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2}]dxdy \qquad (D: x^2+y^2\le\frac{1}{2}R^2)$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}[\sqrt{R^2-r^2}-r]rdr=\frac{\pi R^3}{3}(2-\sqrt{2})$$

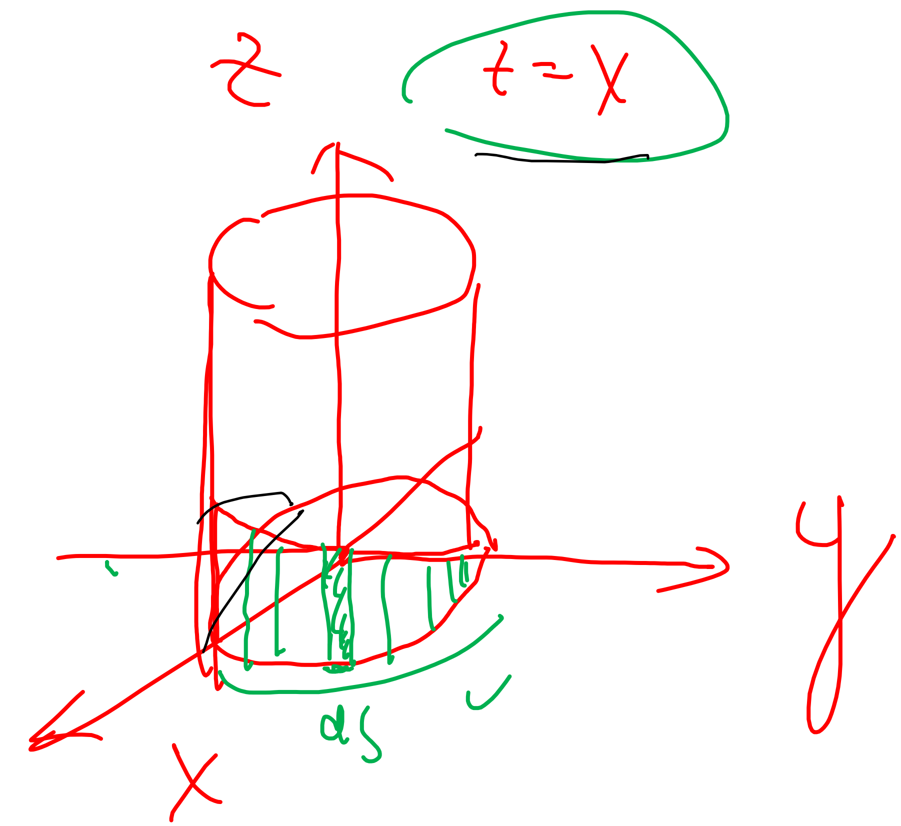


【解2】利用三重积分

$$V=\iiint\limits_\Omega 1\,dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^R r^2\sin\varphi dr$$

$$=\frac{\pi R^3}{3}(2-\sqrt{2})$$

【例2】 求柱面 $x^2+y^2=a^2$ 夹在平面 $x-z=0$ 与 $z=0$ 之间部分的面积.



【解1】 $x^2+y^2=a^2 \quad y=\sqrt{a^2-x^2}$,

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial z}=0$$

$$dS=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}dzdx=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dzdx$$

$$S=4\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^x \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}z=4a^2$$

$x=a\cos\theta$

$y=a\sin\theta$

$z\,ds=x\,ds$

【解2】 利用线积分

$a\cos\theta$

$$S_1=\int_L z ds=\int_L x\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos\theta \mathrm{d}\theta=a^2 \quad \text{则} \quad S=4a^2$$

$ds=\sqrt{a^2 d\theta^2}=a\,d\theta$

$4a^2$

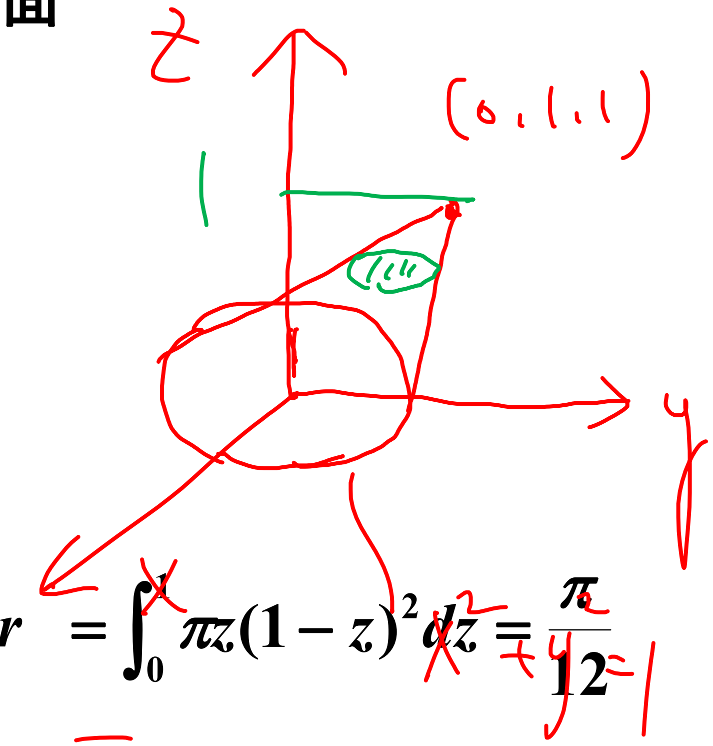
$x^2+y^2=1$

题型二 计算物理量

$x^2+(y-1)^2=0$

【例3】设 Ω 是由锥面 $x^2+(y-z)^2=(1-z)^2\ (0\le z\le 1)$ 与平面 $z=0$ 围成的锥体，求 Ω 的形心坐标.

$z=1$ $x=0$, $y=1$



【解】$\bar{x}=0.$

$x=r\cos\theta$ $y-z=r\sin\theta$

$$V=\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=\int_0^1 dz\iint\limits_{D_z}dxdy=\int_0^1\pi(1-z)^2dz=\frac{\pi}{3}$$

$(y-z)+z$

$$\iiint\limits_{\Omega}ydxdydz=\int_0^1 dz\iint\limits_{D_z}ydxdy=\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{1-z}(z+r\sin\theta)rdr=\int_0^1\pi z(1-z)^2dz=\frac{\pi}{12}$$

$x^2+y^2=1$

$\bar{x}=0$

$$\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz=\int_0^1 dz\iint\limits_{D_z}zdxdy=\int_0^1\pi z(1-z)^2dz=\frac{\pi}{12}$$

所以 $\bar{y}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}ydxdydz}{V}=\dfrac{1}{4},\ \bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz}{V}=\dfrac{1}{4}.$

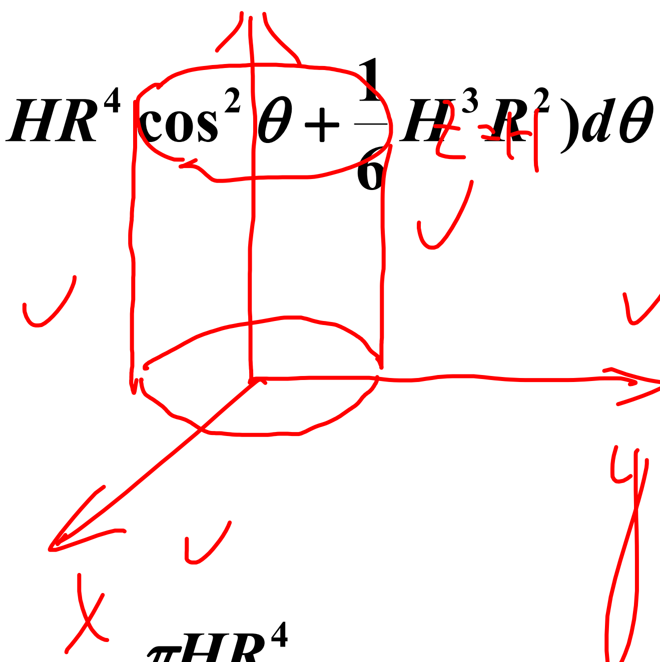
【例4】 求底半径为 R，高为 H，密度为 μ 的均匀柱体对底面圆直径的转动惯量.

【解1】 $I_y=\iiint\limits_{\Omega}\mu(x^2+z^2)dv=\mu\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R dr\int_0^H(r^2\cos^2\theta+z^2)rdz$

(x,y,z)

$$=\mu\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R(Hr^3\cos^2\theta+\frac{1}{3}H^3r)dr=\mu\int_0^{2\pi}(\frac{1}{4}HR^4\cos^2\theta+\frac{1}{6}H^3R^2)d\theta$$

$$=\frac{\pi\mu HR^2}{12}(3R^2+4H^2)$$



【解2】 $I_y=\iiint\limits_{\Omega}\mu(x^2+z^2)dv$

$$\iiint\limits_{\Omega}x^2dv=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R dr\int_0^H r^3dz=\frac{\pi HR^4}{4}$$

$$\iiint\limits_{\Omega}z^2dV=\int_0^H\pi R^2z^2dz=\frac{\pi R^2H^2}{3},$$

第三节 场论初步

1. 梯度:

1）定义:

2）计算 $\mathrm{grad}\,u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}$

2. 散度: 设有向量场 $\mathrm{A}(x,y,z)=\{P,Q,R\}$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

3. 旋度: 设有向量场 $\mathrm{A}(x,y,z)=\{P,Q,R\}$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

题型一 梯度 散度 旋度计算

【例1】函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度

$\mathbf{grad}\,u|_M=$ ______ .

$u_x i + u_y j + u_z k$

$u_x \quad u_y \quad u_z$

$y^2 \qquad e^z$

【例2】向量场 $\mathbf{u}(x,y,z)=xy^2\mathbf{i}+ye^z\mathbf{j}+x\ln(1+z^2)\mathbf{k}$ 在点 $P(1,1,0)$ 处的散度 $\mathrm{div}\,\mathbf{u}=$ ______ .

$1+1+0=2$

【例3】设数量场 $u(x,y,z)$ 有二阶连续偏导数，试证明

$\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\,u)=0.$

【例4】设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$f(u)$ 有二阶连续导数，

$\mathrm{div}[\mathbf{grad}\,f(r)]=0$，试求 $f(u)$.

一.复习消化强化课内容（例题，学习包习题）

二.严选题

三.660题

四.330题