

2025考研冲刺班(4)

(高等数学)

主讲：武忠祥 教授



还不关注，
你就慢了



第七章 无穷级数

重点题型及方法：

1. 数项级数敛散性的选择题

2. 数项级数的证明题（仅数一）

3. 幂级数

1) 收敛半径、收敛区间、收敛域

2) 幂级数展开

* 3) 幂级数求和



还不关注，
你就慢了



【例1】级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n}$ 收敛的充要条件是 ()

(A) $\alpha > 1$.

(B) $\alpha > 1, \beta > 1$.

(C) $\alpha \geq 1, \beta > 1$.

(D) $\alpha > 1$ 或 $\alpha = 1, \beta > 1$.

【解】选 (D)

若 $\alpha < 1$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n}$ 发散

若 $\alpha > 1$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n}$ 收敛

若 $\alpha = 1$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\beta} n}$ $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^{\beta} x} dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln^{\beta} x} d \ln x = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{t^{\beta}} dt$

$\alpha \leq 1$ 发散

$\alpha > 1$ 收敛

$\beta > 1$ 收敛
 $\beta \leq 1$ 发散

【例2】已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则下列级数一定发散的是（ ）

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n a_n$

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \sqrt{|a_n|})$

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \sqrt{|a_n|})$

【解】

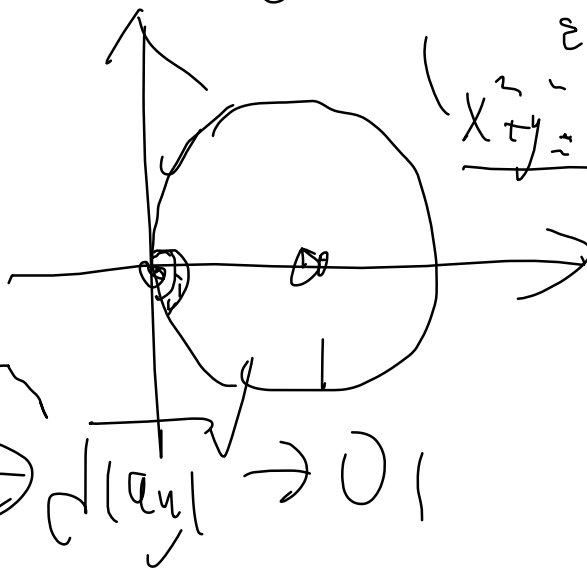
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(1+n)}$

$\sum a_n$

$\sum ()$

$\sum \ln(1 + \sqrt{|a_n|})$

$\ln(1 + \sqrt{|a_n|}) \rightarrow 0$



【例3】已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则下列结论不正确的是

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$ 必收敛.

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$ 必收敛.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} - a_{2n+1})$ 必收敛.

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+1}^2)$ 必收敛.

【解】 应选(C)

取 $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 但

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} - a_{2n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} \right)$ 发散.

$S_n = a_1^2 - a_{n+1}^2 \rightarrow a_1^2$
 $\downarrow$
 0

$a_n \rightarrow 0$

【例4】设有命题 $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ✓

1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} a_n$ 收敛; ✓ $\sum \frac{1}{n}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1$ ✓

2) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ($n=1,2,\dots$), 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; ✓

$a_n \searrow \sum \frac{1}{n}$

3) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l \neq 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散; ✓ 正项级数

4) 若 $a_n \leq b_n \leq c_n$ ($n=1,2,\dots$) 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛. ✓

则上述命题中正确的个数为

- (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

$b_n = (b_n - a_n) + (a_n)$ ✓

$0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n$ ✓

【例5】设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上二阶可导，且 $f''(x) < 0$ ， $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

(I) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [f(n) - f(n-1)]$ 收敛，并求其和：

(II) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)$ 收敛.

【证】(I) 令 $S_n = \sum_{k=1}^n [f(k) - f(k-1)]$ ，则

$$\begin{aligned} S_n &= [f(1) - f(0)] + [f(2) - f(1)] + \cdots + [f(n) - f(n-1)] \\ &= f(n) - f(0) \end{aligned}$$

由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ 可知， $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 - f(0)$

$$n-1 < \xi_n < n$$

$$\frac{2}{n-1} f'(\xi_n) \neq 0$$

$$f'(\xi_n) > f'(n) \geq 0$$

$$f'(x) \downarrow$$

?

✓

【例5】设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上二阶可导, 且 $f''(x) < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

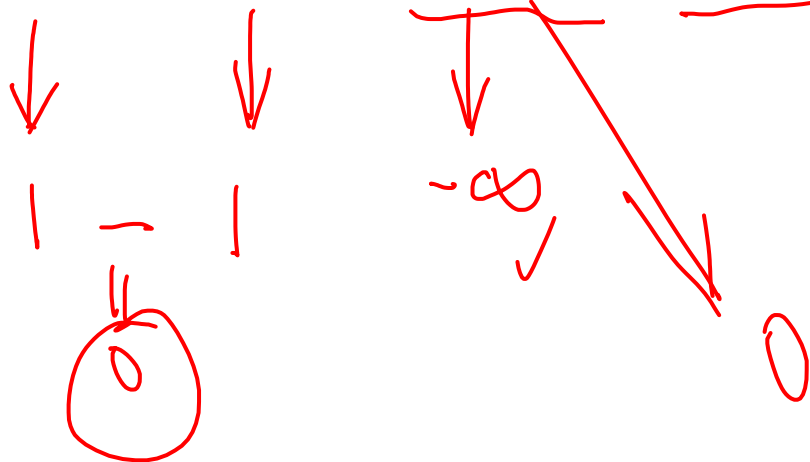
(I) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [f(n) - f(n-1)]$ 收敛, 并求其和:

✓ (II) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)$ 收敛. $= f'(\xi_n) > f'(n) \geq 0$

【证】 (II) 由 $f''(x) < 0$ 可知, $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调减少, 又

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, 则 $f'(x)$ 下有界. 否则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$,

$$f(x+1) - f(x) = f'(\xi) \quad (x < \xi < x+1) \quad (1)$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = a = 0$$

$$f'(x) \geq 0$$

$$f'(x) \geq m$$

→ 0

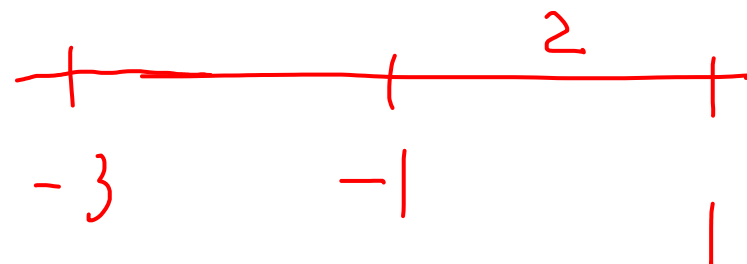
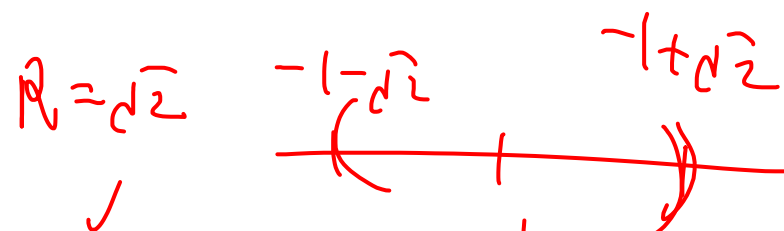
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{1} = -\infty$$

【例6】已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n 2^n$ 条件收敛，则幂级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n} (x+1)^{2n-1}$ 的收敛区间为_____.

【解】由 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n 2^n$ 条件收敛可知，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n (x+1)^n$

在 $x = -1$ 处条件收敛. 则其收敛半径为2,



【例7】 将 $f(x) = \frac{x}{x^2 + 7x + 6}$ 在 $x = 4$ 处展开为幂级数.

$$x-4$$

【解】 $f(x) = \frac{x}{(x+1)(x+6)} = \frac{1}{5} \left(\frac{6}{x+6} - \frac{1}{x+1} \right)$

$$= \frac{3}{25} \frac{1}{1 + \frac{x-4}{10}} - \frac{1}{25} \frac{1}{1 + \frac{x-4}{5}}$$

$$\frac{1}{1+x}$$

【例8】求幂级数 $x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} x^{2n+1}$ 的收敛域及和函数.

【解】易求得收敛域为 $[-1, 1]$.

令 $S(x) = x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} x^{2n+1}$

$\int_0^x S'(x) dx = \int_0^x \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} x^{2n} \right) dx$

$S(x) - S(0) = 1 + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{2n-1}$

$= \int_0^x (1 + 2x \arctan x) dx$

则 $S(x) = \int_0^x (1 + 2x \arctan x) dx = (1 + x^2) \arctan x$

Handwritten notes and integrals:

- $\int dx$
- $\int_a^b$
- $\int_{x_0}$
- $\int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^x \frac{1-x^2+x^4}{1-x^2+x^4} dx$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{2n-1} = \arctan x$$

【例9】已知 $a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2}$, 且当 $n \geq 2$ 时有 $na_n = [\frac{1}{2} + (n-1)]a_{n-1}$.

证明当 $|x| < 1$ 时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛, 并求其和函数.

【解】由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{1}{2} + n)}{n+1} = 1$, 则当 $|x| < 1$ 时幂级数收敛.

记 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 则 $S(0) = a_0 = 1$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} na_n x^{n-1} = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} [\frac{1}{2} + (n-1)]a_{n-1} x^{n-1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)a_{n-1} x^{n-1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} [\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0] + \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n = \frac{1}{2} S(x) + xS'(x).$$

$$\frac{S'(x)}{S(x)} = \frac{1}{2(1-x)}, S(0) = 1 \quad S(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^{(n-1)-1} \right]$$

$$= x \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^{(n-1)-1} = x S'(x)$$

【例】(24年1,3) 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数为 $\ln(2+x)$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_{2n} = ()$

(A) $-\frac{1}{6}$.

(B) $-\frac{1}{3}$.

(C) $\frac{1}{6}$.

(D) $\frac{1}{3}$.

【解1】 $\ln(2+x) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^n$

$a_{2n} = \frac{(-1)^{2n-1}}{2n \cdot 2^n} = -\frac{1}{n 2^{2n+1}}$ $\sum_{n=0}^{\infty} n a_{2n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} = -\frac{1}{6}$

【解2】 $\frac{1}{2} [\ln(2+x) + \ln(2-x)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$

$\sum_{n=0}^{\infty} n a_{2n} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2-x} \right] \Big|_{x=1} = -\frac{1}{6}$

$f(2) = 0$

【例】(24年1) 已知函数 $f(x) = x+1$, 若 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, x \in [0, \pi]$,

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin a_{2n-1} = \underline{-\frac{1}{\pi}}$.

【解】 $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x+1) \cos nx dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} (x+1) d \sin nx$

$= -\frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1]$

$a_{2n-1} = \frac{-4}{(2n-1)^2 \pi} \rightarrow 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin a_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin \left(-\frac{4}{(2n-1)^2 \pi} \right) = -\frac{4}{\pi}$

$\frac{-4}{4\pi}$

第八章 多元微积分续 (数一)

重点题型及方法:

1. 第二型线积分

方法: 1) 平面线积分

(1) 直接法 ✓ (2) 格林公式 ✓

(3) 补线用格林公式 ✓ (4) 线积分与路径无关 ✓

2) 空间线积分

(1) 直接法 ✓ (2) 斯托克斯公式 ✓ *

(3) 化空间线积分平面线积分 ✓ *

* 2. 第二型面积分计算

方法: 1) 直接法 ① 2) 高斯公式 ✓ 3) 补面用高斯公式 ✓

3. 三重积分及第一型线面积分计算

【例1】 设曲线 $z = 1 - y^2$ 绕 z 轴旋转所得旋转面为 Σ , 则曲面 Σ 与平面 $x + y + z = 1$

平行的切平面方程为 _____.

【解】 $z = 1 - x^2 - y^2$

$$\vec{n} = (2x, 2y, 1) = (1, 1, 1)$$

$$(1, 1, 1)$$

$$\frac{2x}{1} = \frac{2y}{1} = \frac{1}{1}$$

$$x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$$

$$1 \cdot (x - \frac{1}{2}) + 1 \cdot (y - \frac{1}{2}) + 1 \cdot (z - \frac{1}{2}) = 0$$

$$x + y + z = \frac{3}{2}$$

【例2】 设 $u = 3x^2y - 2yz + z^3$, $v = 4xy - z^3$, 则 u 在点 $P(1, -1, 1)$

处沿 $\text{grad}v$ 方向的方向导数为 _____.

【解】 $\text{grad}v = \{-4, 4, -3\}$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}_{(-6)} \cdot \underbrace{\frac{-4}{\sqrt{41}}} + \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}_1 \cdot \underbrace{\frac{4}{\sqrt{41}}} + \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}_5 \cdot \underbrace{\frac{-3}{\sqrt{41}}} = \frac{13}{\sqrt{41}}$$

$$\text{div}(\text{grad}v)|_{(1, -1, 1)} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{0}{1} + \frac{0}{1} + \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{rot}(\text{grad}v)|_{(1, -1, 1)} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -4 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

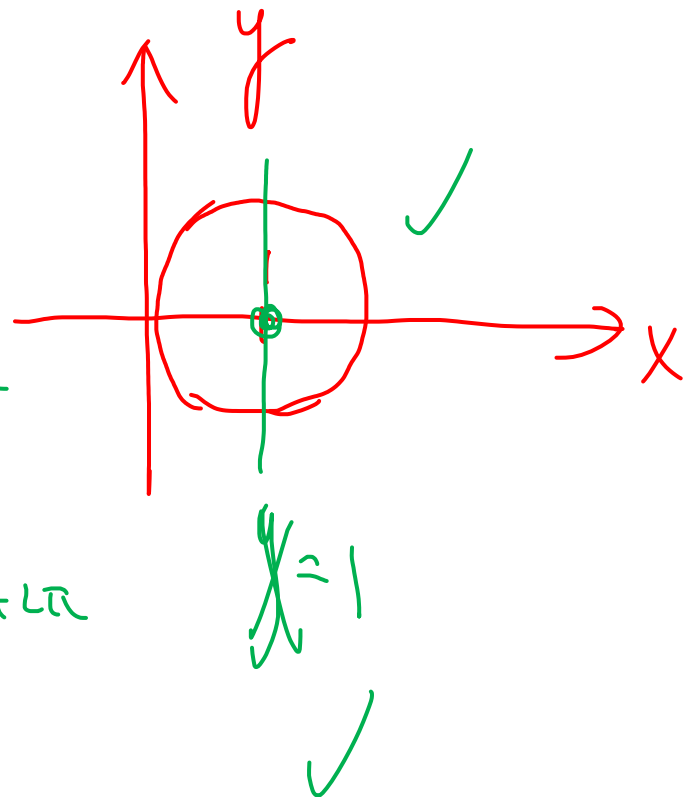
【例3】设曲线 $C: x^2 + y^2 = 2x$ ，则 $\oint_C \frac{(x+y+1)^2}{(x-1)^2 + y^2} ds = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解】 $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$

$$\oint_C \frac{(x+y+1)^2}{(x-1)^2 + y^2} ds = \oint_C [\underbrace{x^2 + y^2}_{=1} + 1 + 2xy + 2x + 2y] ds$$

$$= \oint_C [2x + 1 + 2x] ds = \oint_C [4x + 1] ds = 4 \oint_C x ds + 4\pi$$

$$= \oint_C [4(x-1) + 5] ds = 10\pi \quad \approx 4 \cdot 2\pi + 4\pi = 10\pi$$



【例4】设曲面 Σ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = 2y$, 则 $\iint_{\Sigma} (x^2 + 2y^2 + 3z^2) dS = \underline{\hspace{2cm}}$.

2对称, $3x^2$ $2x^2$ $2z^2$

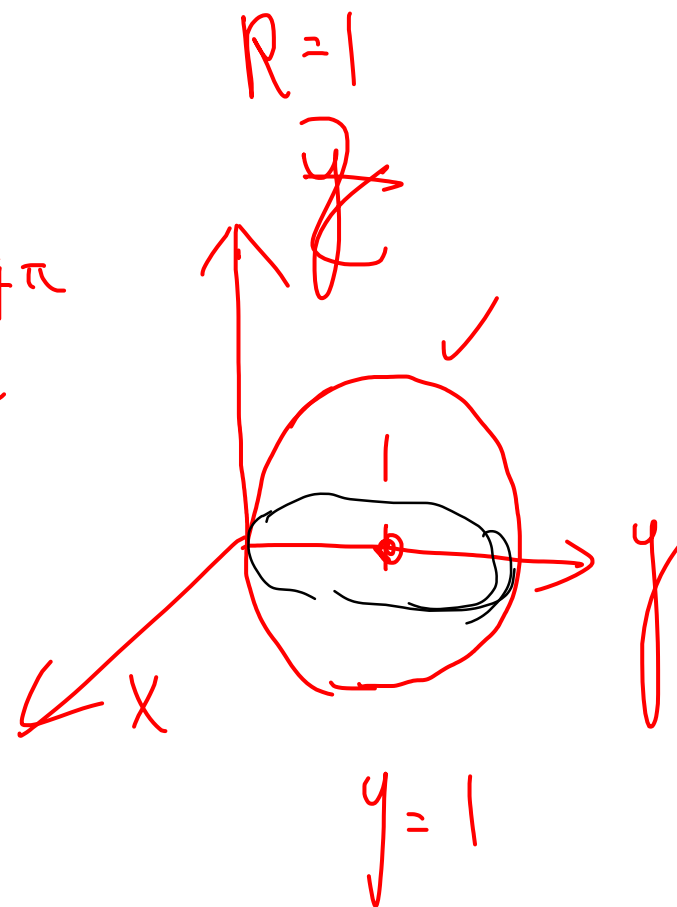
【解】 $\iint_{\Sigma} (x^2 + 2y^2 + 3z^2) dS = \iint_{\Sigma} (2x^2 + 2y^2 + 2z^2) dS$

$= \iint_{\Sigma} 4y dS = 4 \bar{y} S = 4 \cdot 4\pi = 16\pi$

$\bar{y} = 1$

$= 4 \iint_{\Sigma} [(y-1) + 1] dS$

$= 4 \iint_{\Sigma} dS = 16\pi$



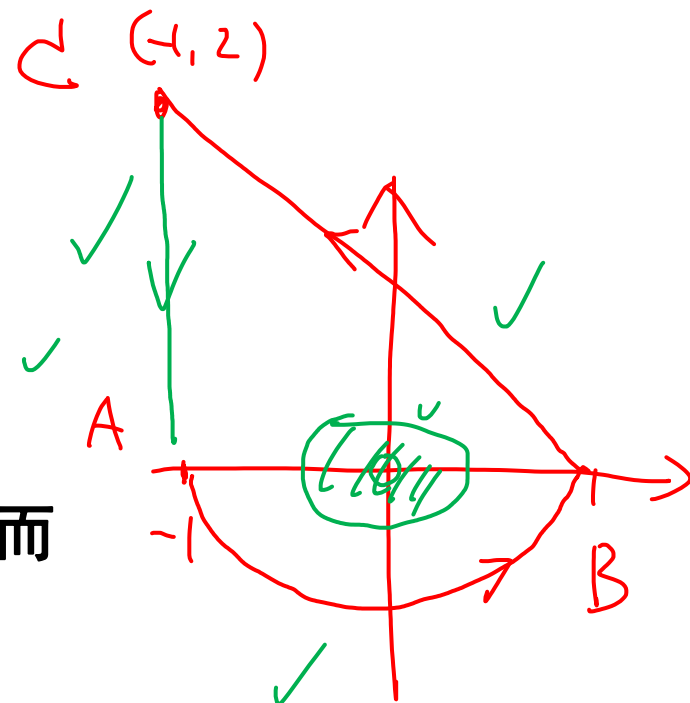
【例5】计算线积分 $I = \int_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$, 其中 L 为由点 $A(-1,0)$ 经点 $B(1,0)$ 到点 $C(-1,2)$ 的路径, $\widehat{AB}$ 为下半圆周, $\overline{BC}$ 为直线.

【解】由于 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ($x^2 + y^2 \neq 0$)

则 $\oint_{L+CA} \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} = \oint_{\Gamma} \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$

其中 Γ 为椭圆 $4x^2 + y^2 = 1$ 沿逆时针方向, 从而

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} &= \oint_{\Gamma} \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} - \oint_{CA} \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} \\ &= \oint_{\Gamma} xdy - ydx + \int_0^2 \frac{2-1}{4+y^2} dy = \frac{7}{8}\pi. \end{aligned}$$



【例6】设 $f(x, y)$ 在圆域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上二阶连续可微, 且满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{-(x^2+y^2)}, \text{ 计算积分 } \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy.$$

【解】设 L 为圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 沿逆时针方向, 考虑线积分

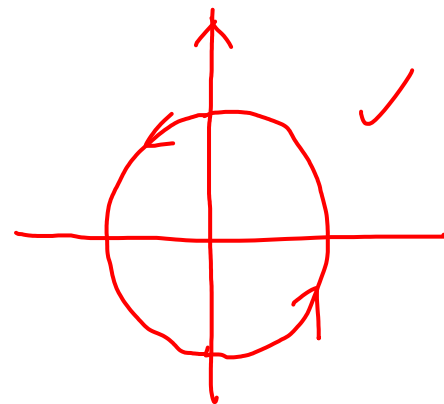
$$I = \oint_L (x^2 + y^2) \left(\frac{\partial f}{\partial x} dy - \frac{\partial f}{\partial y} dx \right)$$

$$= \oint_L \frac{\partial f}{\partial x} dy - \frac{\partial f}{\partial y} dx$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) d\sigma$$

$$I = \oint_L (x^2 + y^2) \left(\frac{\partial f}{\partial x} dy - \frac{\partial f}{\partial y} dx \right)$$

$$= 2 \iint_D \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\sigma + \iint_D (x^2 + y^2) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) d\sigma$$



【例7】计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (xz + \sqrt{x^2 + y^2}) dydz + (yz + \sqrt{x^2 + y^2}) dzdx + (z^2 + \sqrt{x^2 + y^2}) dxdy$

其中 Σ 为球面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 所截部分的上侧。

【解1】 $\iint_{\Sigma} \sqrt{x^2 + y^2} dydz = 0$ $\iint_{\Sigma} \sqrt{x^2 + y^2} dzdx = 0$

$\iint_{\Sigma} xz dydz + yz dzdx + (z^2 + \sqrt{x^2 + y^2}) dxdy$

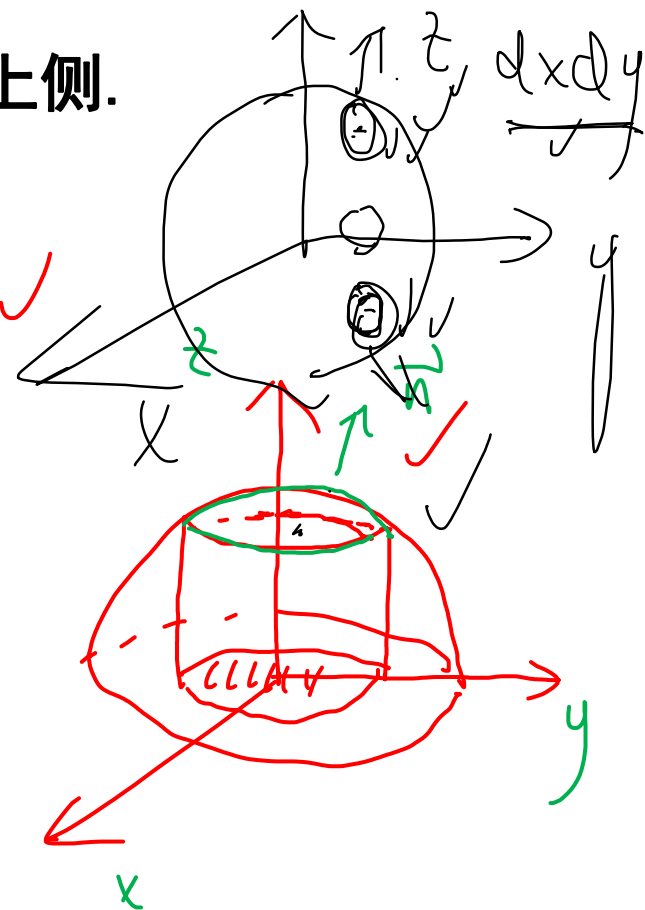
$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2})$

$dydz = \cos \alpha dS = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} dxdy = \frac{x}{z} dxdy$

$dzdx = \cos \beta dS = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} dxdy = \frac{y}{z} dxdy$

$dxdy = \cos \gamma dS$

$\iint_{\Sigma} [x^2 + y^2 + (z^2 + \sqrt{x^2 + y^2})] dxdy = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (4 + \sqrt{x^2 + y^2}) dxdy = 4\pi + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 dr = \frac{14\pi}{3}$



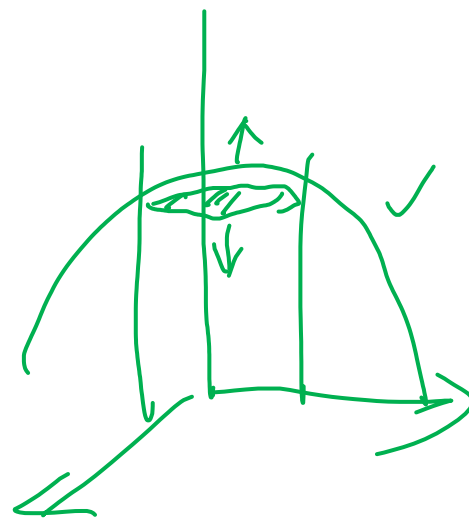
【例7】计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (xz + \sqrt{x^2 + y^2}) dydz + (yz + \sqrt{x^2 + y^2}) dzdx + (z^2 + \sqrt{x^2 + y^2}) dxdy$

其中 Σ 为球面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 所截部分的上侧.

【解2】① $\iint_{\Sigma} \sqrt{x^2 + y^2} dydz = 0$ $\iint_{\Sigma} \sqrt{x^2 + y^2} dzdx = 0$

$\iint_{\Sigma} xz dydz + yz dzdx + (z^2 + \sqrt{x^2 + y^2}) dxdy$

设 S 为平面圆 $z = \sqrt{3}$ ($x^2 + y^2 \leq 1$) 的下侧, 则



② 原式 = $\iint_{\Sigma+S} - \iint_S$

$= \iiint_{\Omega} (z + z + 2z) dv + \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (3 + \sqrt{x^2 + y^2}) dxdy$

$= 4 \int_{\sqrt{3}}^2 z \pi (4 - z^2) dz + 3\pi + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 dr = \frac{14\pi}{3}$

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ✓ $\vec{n} = (x, y, z)$ ✓

【例】(24年1) 设 $P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z)$ 均为连续函数, Σ 为曲面

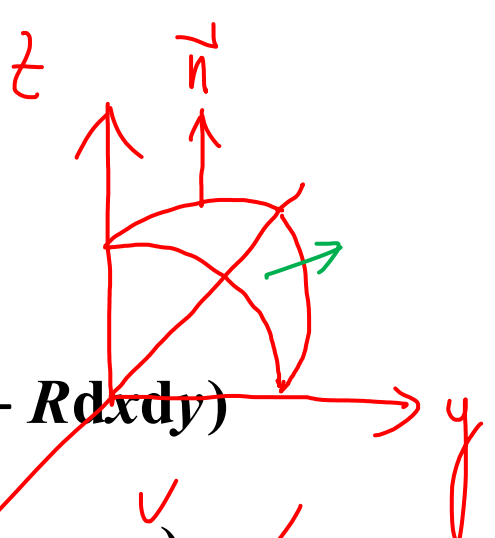
$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} (x \leq 0, y \geq 0)$ 的上侧, 则 $\iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx = ()$

✓ (A) $\iint_{\Sigma} \left(\frac{x}{z} P + \frac{y}{z} Q \right) dx dy.$ ✓

X (B) $\iint_{\Sigma} \left(-\frac{x}{z} P + \frac{y}{z} Q \right) dx dy.$

X (C) $\iint_{\Sigma} \left(\frac{x}{z} P - \frac{y}{z} Q \right) dx dy.$

X (D) $\iint_{\Sigma} \left(-\frac{x}{z} P - \frac{y}{z} Q \right) dx dy.$



【解1】直接法 $\iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iint_{\Sigma} (P dydz + Q dzdx + R dxdy)$

$\cos \alpha dS = dydz, \cos \beta dS = dzdx, \cos \gamma dS = dxdy$ $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = (x, y, z)$ ✓

$dydz = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} dxdy = \frac{x}{z} dxdy$ ✓

$dzdx = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} dxdy = \frac{y}{z} dxdy$ ✓

【解2】排除法 ✓

【例8】设函数 $f(x, y, z)$ 在区域 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ 上具有连续一阶偏导数，

且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 计算 $I = \iiint_{\Omega} (x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}) dx dy dz$.

【解】设 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 则

$$\iiint_{\Sigma} \frac{\partial f}{\partial x} dy dz + \frac{\partial f}{\partial y} dz dx + \frac{\partial f}{\partial z} dx dy = \iiint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) (\frac{\partial f}{\partial x} dy dz + \frac{\partial f}{\partial y} dz dx + \frac{\partial f}{\partial z} dx dy)$$

$$\textcircled{1} \iiint_{\Sigma} \frac{\partial f}{\partial x} dy dz + \frac{\partial f}{\partial y} dz dx + \frac{\partial f}{\partial z} dx dy = \iiint_{\Omega} (\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}) dv = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv$$

$$\textcircled{2} \iiint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) (\frac{\partial f}{\partial x} dy dz + \frac{\partial f}{\partial y} dz dx + \frac{\partial f}{\partial z} dx dy)$$

$$= 2 \iiint_{\Omega} (x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}) dx dy dz + \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) (\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}) dv$$

$$I = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} [\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}] dv = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 (r - r^3) r^2 \sin \varphi dr = \frac{\pi}{6}$$

【例9】曲面片 $\Sigma: z^2 = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 1)$ 的形心为

【解】

$$\bar{z} = \frac{\iint_{\Sigma} z dS}{\iint_{\Sigma} dS} = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 \sqrt{2} d\rho}{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho \sqrt{2} d\rho} = \frac{2}{3}$$

$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

① I型线. $(\text{面})^*$

② I型曲面. 重积分

③ 应用 (质心、重心、转动惯量)

④ 方向导数. 三个线.

⑤ 曲面. 功.

$$dS = \sqrt{2} dx dy$$

$\vec{r} = (x, y, z)$

S_n

$$\sum a_n x_n$$

$$S_n - S_{n-1} = a_n \rightarrow 0$$

x_n

S_n

S_{2n}

S

x

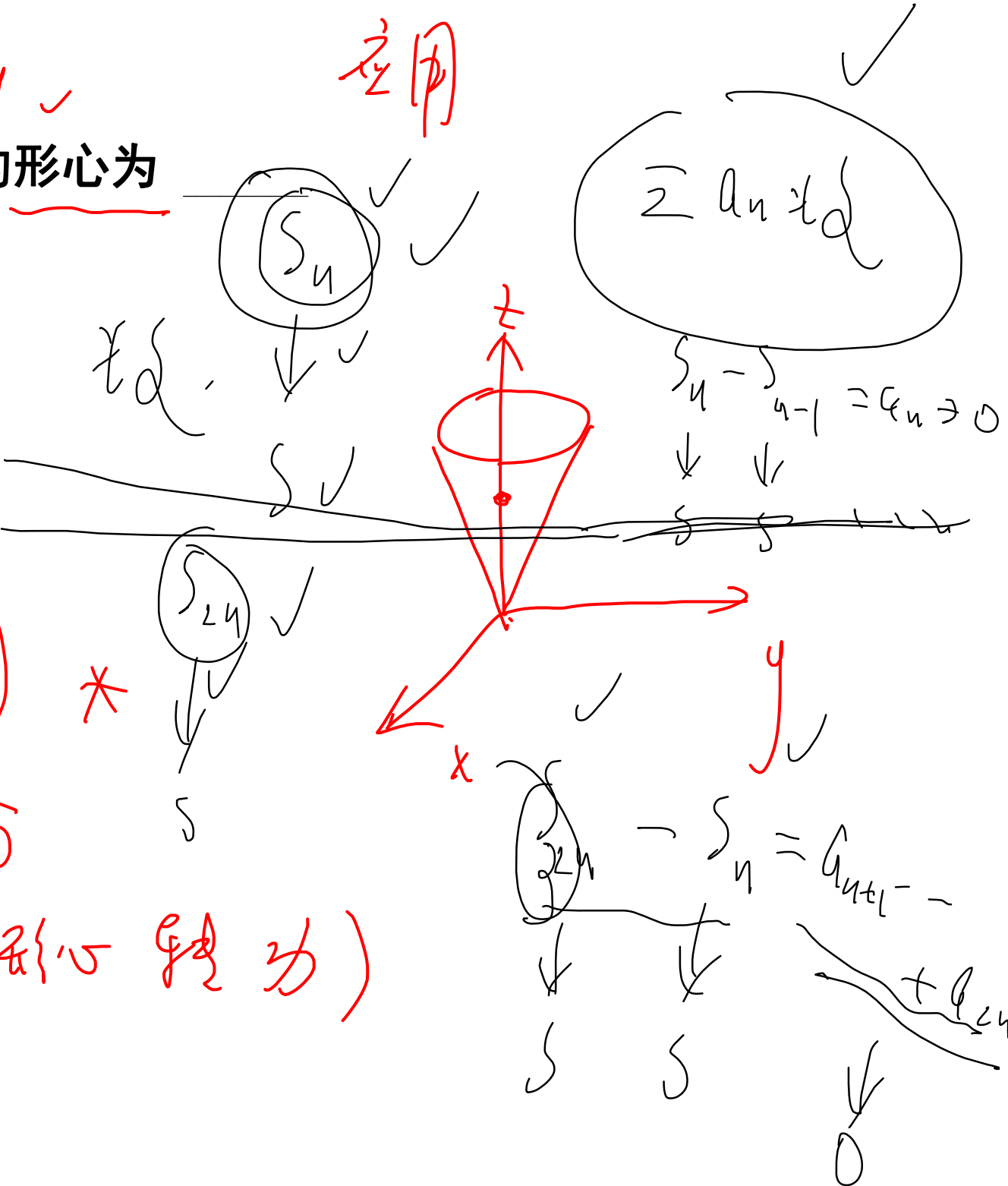
$2n$

S

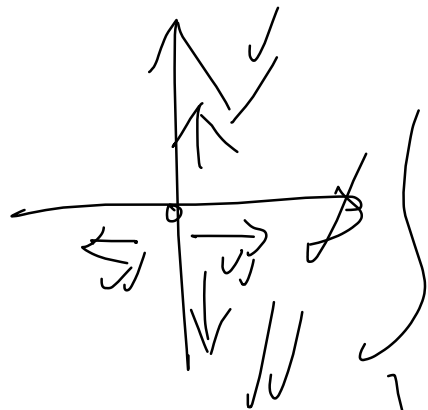
S

$+ a_{2n}$

0



$$\checkmark \quad f_x(0,0) \cdot \checkmark \quad f_y(0,0) \cancel{f_z} \rightarrow$$



$$X^{\mathbb{Z}} + Y^{\mathbb{Z}} + Z^{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$z = x^2 + y^2 \quad \checkmark$$

$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$t = 1$$

$$X + Y = \mathbb{R}^2$$

祝同学们

考研路上一路顺利!



你还关注，你就慢了

