

5. 设 A, B 均为三阶非零矩阵, 满足 $AB = O$, 其中 $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2a & 1-a & 2a \\ a & -a & a^2-2 \end{pmatrix}$, 则 ()

- (A) $a = 2$ 时, 必有 $r(A) = 1$ (B) $a = 2$ 时, 必有 $r(A) = 2$
 (C) $a = -1$ 时, 必有 $r(A) = 1$ (D) $a = -1$ 时, 必有 $r(A) = 2$

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则下列矩阵中与 A 合同, 但不相似的是

- (A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
 (C) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为

- (A) $a = 0, b = 2, c = 2$ (B) $a = 0, b = 2, c$ 为任意常数
 (C) $a = 0, b = 0, c = 0$ (D) $a = 2, b = 2, c$ 为任意常数

8. 设随机变量 X 与 Y 均服从 $B(1, \frac{1}{2})$ 分布, 且 $E(XY) = \frac{1}{2}$. 记 X 与 Y 的相关系数为 ρ , 则

- (A) $\rho = 1$. (B) $\rho = -1$.
 (C) $\rho = 0$. (D) $\rho = \frac{1}{2}$.

9. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 $U(0, 1)$ 的一个样本, 根据中心极限定理, 当 n 充分大时, 统

计量 $\sum_{i=1}^n X_i^2$ 近似服从

- (A) $\chi^2(n)$ (B) $N(n, 2n)$
 (C) $N\left(\frac{n}{3}, \frac{4n}{45}\right)$ (D) $N\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{45n}\right)$

10. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, 统计量 $Y = n \left(\frac{\bar{X} - \mu}{S} \right)^2$, 则

- (A) $Y \sim \chi^2(n-1)$. (B) $Y \sim t(n-1)$.
 (C) $Y \sim F(n-1, 1)$. (D) $Y \sim F(1, n-1)$.

二、填空题: 11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 请将答案填写在答题卡指定位置上.

11. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{n}{n+k} \right) \left(1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 由曲线 $y = x^2 - 1$, 直线 $y = -1, x = 2$ 所围成的图形绕 $y = 3$ 旋转一周所得旋转体体积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

13. 已知 $z = f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 的某邻域内连续, 且满足 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) + 2x - y + x^2 y}{x^2 + y^2} = 1$, 则 $dz|_{(0,0)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. $\int_{-1}^2 dx \int_0^1 |x-y| dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $|A|$ 的所有代数余子式之和 $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 A_{ij} = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$,

$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 则 $E(S^4) = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 17~22 小题, 共 70 分. 请将解答写在答题卡指定位置上. 解答应写出文字说明、

证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内连续, $u(x) = f(x) \sin x - x$, $v(x) = \int_0^{-x} t \ln(1-t) dt$. 若

$u(x)$ 与 $v(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是等价无穷小, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \cos x}{x^2}$.

18. (本题满分 12 分)

设平面区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} + x, x \geq 0\}$, 计算二重积分

$$\iint_D x(e^{xy} - e^{-xy} + 1) dx dy.$$

19. (本题满分 12 分)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, $f'(0) = 2$, 对任意的 $x, y \in (-\infty, +\infty)$, 恒有

$$f(x+y) = e^x f(y) + e^{-y} f(x) \text{ 成立.}$$

(1) 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导.

(2) 求 $f(x)$ 的表达式.

20. (本题满分 12 分)

讨论曲线 $y = 4 \ln x + k$ 与 $y = 4x + \ln^4 x$ 的交点个数.

21. (本题满分 12 分)

已知 A 为三阶矩阵, 且各行元素之和全为 0. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & a & a-1 \end{pmatrix}$, 满足 $AB + 2B = O$.

(1) 求 A 的特征值, 并判断 A 是否可相似对角化.

(2) 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T B \mathbf{x}$ 的规范形.

22. (本题满分 12 分)

设随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} k(x+y), & 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq x+1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 随机变量 U

服从分布 $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$, 且 U 与 X, Y 均独立. 记随机变量 $Z = U(X - Y)$.

(1) 求常数 k 及边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$.

(2) 求条件概率 $P(Y \leq 1 | X = \frac{1}{2})$.

(3) 求 Z 的分布函数 $F_Z(z)$.