

2025 年全国硕士研究生招生考试

数学二模拟试题 01

一、选择题:1~10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合要求的. 请将所选项前的字母填涂在答题卡指定位置上.

1. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, $f''(0) \neq 0$, 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - ax - b}{x^2} = c \neq 0$, 则

- (A) $a = 0, b = 1, c = \frac{1}{2} f''(0)$ (B) $a = 1, b = 1, c = \frac{1}{2} f''(0)$
(C) $a = 1, b = 0, c = f''(0)$ (D) $a = 1, b = 1, c = f''(0)$

2. 已知 $f(x) = \frac{(x^2 + a^2)(x-1)}{e^x + b}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有一个可去间断点和一个跳跃间断点, 则

- (A) $a = 1, b = -1$ (B) $a = 0, b = 1$
(C) $a \neq 0, b = -e$ (D) $a = e, b = -1$

3. 积分 $\int_a^{a+2\pi} e^{\cos x} \cos x dx$ 的值

- (A) 恒为零 (B) 与 a 无关且恒为负
(C) 与 a 有关 (D) 与 a 无关且恒为正

4. 曲线 $y = x^2 \arctan \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \arctan x^2$ 的渐近线有

- (A) 3 条 (B) 2 条
(C) 1 条 (D) 0 条

5. 设 $z = \varphi(x^2 - y^2)$, 其中 φ 有连续导数, 则 z 满足

- (A) $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (B) $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
(C) $y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (D) $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

6. 设 $I_1 = \iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$, $I_2 = 2 \iint_D \sin x^2 \cos y^2 d\sigma$, $I_3 = \iint_D \sin(x^2 + y^2)^2 d\sigma$, 其中

$D: x^2 + y^2 \leq 1$, 则

(A) $I_1 > I_2 > I_3$

(B) $I_1 < I_2 < I_3$

(C) $I_1 < I_3 < I_2$

(D) $I_3 < I_1 < I_2$

7. 具有特解 $y_1 = 2xe^{-x}$, $y_2 = 3e^x$ 的 3 阶常系数齐次线性微分方程是

(A) $y''' - y'' - y' + y = 0$.

(B) $y''' + y'' - y' - y = 0$.

(C) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

(D) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.

8. 设 A, B 均为三阶非零矩阵, 满足 $AB = O$, 其中 $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2a & 1-a & 2a \\ a & -a & a^2-2 \end{pmatrix}$, 则

(A) $a = 2$ 时, 必有 $r(A) = 1$

(B) $a = 2$ 时, 必有 $r(A) = 2$

(C) $a = -1$ 时, 必有 $r(A) = 1$

(D) $a = -1$ 时, 必有 $r(A) = 2$

9. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则下列矩阵中与 A 合同, 但不相似的是

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

10. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为

(A) $a = 0, b = 2, c = 2$

(B) $a = 0, b = 2, c$ 为任意常数

(C) $a = 2, b = 2, c = 2$

(D) $a = 2, b = 2, c$ 为任意常数

二、填空题: 11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 请将答案填写在答题卡指定位置上.

11. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{\frac{1}{n}} - 1) \sum_{i=0}^{n-1} e^{\frac{i}{n}} \ln(e^{\frac{2i+1}{2n}} - 1) =$ _____.

12. 由曲线 $y = x^2 - 1$, 直线 $y = -1, x = 2$ 所围成的图形绕 $y = 3$ 旋转一周所得旋转体体积为 _____.

13. 已知 $z = f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 的某邻域内连续, 且满足 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) + 2x - y + x^2 y}{x^2 + y^2} = 1$, 则 $dz|_{(0,0)} =$ _____.

14. $\int_{-1}^2 dx \int_0^1 |x - y| dy =$ _____.

15. $\int \frac{\cos x \sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx =$ _____.

16. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $|A|$ 的所有代数余子式之和 $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 A_{ij} =$ _____.

三、解答题: 17~22 小题, 共 70 分. 请将解答写在答题卡指定位置上. 解答应写出文字说明、

证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内连续, $u(x) = f(x) \sin x - x$, $v(x) = \int_0^{-x} t \ln(1-t) dt$.

若 $u(x)$ 与 $v(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是等价无穷小, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \cos x}{x^2}$.

18. (本题满分 12 分)

设平面区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} + x, x \geq 0\}$, 求 D 的形心坐标.

19. (本题满分 12 分)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, $f'(0) = 2$, 对任意的 $x, y \in (-\infty, +\infty)$, 恒有

$$f(x+y) = e^x f(y) + e^{-y} f(x)$$

成立.

(1) 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导.

(2) 求 $f(x)$ 的表达式.

20. (本题满分 12 分)

讨论曲线 $y = 4 \ln x + k$ 与 $y = 4x + \ln^4 x$ 的交点个数.

21. (本题满分 12 分)

已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{3}{x_n} \right)$, $n = 1, 2, \dots$, 其中 $x_1 = 1$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极

限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

22. (本题满分 12 分)

已知 A 为三阶矩阵, 且各行元素之和全为 0. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & a & a-1 \end{pmatrix}$, 满足 $AB + 2B = O$.

(1) 求 A 的特征值, 并判断 A 是否可相似对角化.

(2) 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T B \mathbf{x}$ 的规范形.