

数学三模拟试题 02

1. 设 $f(x) = \int_x^{\sin x} e^{2t} \ln(1+t) dt$, $g(x) = \cos \sqrt{2}x - e^{-x^2}$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的

2. 设 $f(x) = \begin{cases} (1+x)^x - 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处

3. 设 $f(x)$ 二阶可导, 则下列结论正确的是

- ①当 $f'(x) < 0$ 时, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx < 0$;
- ②当 $f'(x) < 0$ 时, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx > 0$;
- ③当 $f''(x) > 0$ 时, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx > 0$;
- ④当 $f''(x) > 0$ 时, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx < 0$;

- 4.当 $\lambda \neq 0$ 时, 累次积分 $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R (e^{\lambda r \cos \theta} - e^{-\lambda r \sin \theta}) r dr$ 的值

5. 设 A, B 均 n 阶可逆矩阵, 且 $(A+B)^2 = E$, 则 $(E+BA^{-1})^{-1} =$

- A. $(A+B)B$ B. $E+AB^{-1}$ C. $A(A+B)$ D. $(A+B)A$

6. 设 A 是 n 阶矩阵, 若齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解, 则非齐次线性方程组 $A^T x = \beta$,

对任何 $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$

- A. 不可能有唯一解; B. 必有无穷多解;
C. 必有非零解; D. 可能有唯一解, 也可能有无穷多解.

7. 设 A 为 n 阶方阵, 将 A 的第 i 行与第 j 行交换, 再交换第 i 列与第 j 列得到 B , 则

- A. A 与 B 等价, 但不相似亦不合同 B. A 与 B 等价且相似, 但不合同
C. A 与 B 等价且合同, 但不相似 D. A 与 B 等价、相似且合同

8. 设随机变量 X 与 Y 独立, 且 $X \sim B(1, \frac{1}{2})$, $Y \sim N(0, 1)$, 则概率 $P\{XY \leq 0\}$ 的值为

- A. 0. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{4}$.

9. 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布, 则 $E \max\{X, 1\} =$

- A. 1 B. $1 + \frac{1}{e}$ C. $1 - \frac{1}{e}$ D. $\frac{1}{e}$

10. 已知二维随机变量 $(X, Y) \sim N(\mu, \mu, \sigma^2, \sigma^2, 0)$, $X_1, \dots, X_n$ 和 $Y_1, \dots, Y_n$ 分别为来自总体

X, Y 的简单随机样本, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$, 则 $P\{|\bar{X} - \bar{Y}| \leq \sigma\}$ 的值

- A. 随着 σ 的增加而减少, 随着样本容量 n 的增加而增加
B. 随着 σ 的增加而增加, 随着样本容量 n 的增加而减少
C. 与 σ 无关, 随着样本容量 n 的增加而增加
D. 与样本容量 n 无关, 随着 σ 的增加而增加

二、填空题: 11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 请将答案填写在答题卡指定位置上.

11. 曲线 $y = x^n$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线与 x 轴交于点 $(\xi_n, 0)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (e^n \xi_n^{n^2}) =$ _____.

12. 设 $y = y(x)$ 由方程 $x = \int_1^{y-x} \sin^2\left(\frac{\pi}{4}t\right) dt$ 所确定, 则 $\frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{x=0} =$ _____.

13. $\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{\sqrt{x^3}} dx =$ _____.

14. 设 $u(x, y)$ 有一阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial u}{\partial y} = x, u(x, e^x) = e^x$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x} =$ _____.

15. 已知向量 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -2 \end{pmatrix}$ 相互正交, 且 $A = \alpha\beta^T$, 则二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax$ 的

规范形为: _____.

16. 从数 1, 2, 3, 4 中有放回地任取两次, 每次一个数, 得两个数 X_1, X_2 , 记 $X = \min(X_1, X_2)$, 则

$P(X = 2) =$ _____.

三、解答题: 17~22 小题, 共 70 分. 请将解答写在答题卡指定位置上. 解答应写出文字说明、

证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分)

设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \sin 2x^2)^{\frac{1}{x^2}} - e^2}{x^n} = a (a \neq 0)$, 求 n 及 a 的值.

18. (本题满分 12 分)

已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 满足 $g(0) = g'(0) = 0, g''(0) = 3$.

(1) 求 $f'(0)$;

(2) 若 $g''(x) = 3 \cos x$, 证明: $f(x) < \frac{3}{2}x, (0 < x < \frac{\pi}{2})$, 并求由曲线 $f(x)$, 直线 $x = \frac{\pi}{2}$

及 $f(x)$ 在 $(0, 0)$ 处的切线所围图形绕 y 轴旋转一周的体积.

19. (本题满分 12 分)

设 $\frac{1}{1-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

(1) 证明: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, n = 0, 1, 2, \dots$

(2) 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}}$.

20. (本题满分 12 分)

计算二重积分 $I = \iint_D \left(\sqrt{|y-x^2|} + \sqrt[3]{xy^2} \right) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.

21. (本题满分 12 分)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -k & -1 & k \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, 存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵, 则

(1) 求 k 的值及可逆矩阵 P .

(2) 求 $A^{99} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(3) 判断二次型 $x^T A^T A x$ 的正定性, 并说明理由.

22. (本题满分 12 分)

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $G = \{(x, y) | -1 \leq x + y \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 上均匀分布, 随机变量

$Z = k(X + Y)$, k 为大于 0 的常数, 为了研究 k 的取值, 通过观察 n 组 (X, Y) 的样本, 得到

随机变量 Z 的一组样本值 $z_1, z_2, \dots, z_n$.

(1) 求边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$

(2) 求随机变量 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

(3) 求 k 的矩估计与最大似然估计.