2025 年全国硕士研究生招生考试

数学一模拟试题 03

一、选择题:1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的.请将所选项前的字母填涂在答题卡指定位置上.

1.当 $x \to 0$ 时，$e^x(1+Bx+Cx^2)-1-Ax$ 是比 x^3 高阶的无穷小量，则

A. $A=1,B=-\dfrac{2}{3},C=\dfrac{1}{6}$　　B. $A=\dfrac{1}{3},B=-\dfrac{2}{3},C=\dfrac{1}{6}$

C. $A=1,B=\dfrac{2}{3},C=-\dfrac{1}{6}$　　D. $A=\dfrac{1}{3},B=-\dfrac{2}{3},C=-\dfrac{1}{6}$

2.设 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$， $J=\int_0^{\pi} x\sin x dx$， $K=\int_0^{\pi} x\cos x dx$，则

A. $I<J<K$.　　B. $J<K<I$.

C. $K<I<J$.　　D. $I<K<J$.

3.设 $f(x,y)$ 为连续函数,变换二次积分 $I=\int_0^{2\pi} dx\int_0^{\sin x} f(x,y)dy$ 的次序为先 x 后 y，正确的

A. $I=\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx-\int_{-1}^0 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)dx$

B. $I=\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx+\int_{-1}^0 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)dx$

C. $I=\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx+\int_{-1}^0 dy\int_{\pi+\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)dx$

D. $I=\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx-\int_{-1}^0 dy\int_{\pi+\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)dx$

4.设 $S:2x^2+y^2+z^2=1\ (z\ge 0)$，$S_1$ 为 S 在第一卦限的部分，面的朝向与 S 相同，则下列等式错误的是

A. $\iint\limits_S xdydz=4\iint\limits_{S_1} xdydz$.　　B. $\iint\limits_S ydxdz=4\iint\limits_{S_1} ydxdz$.

C. $\iint\limits_S zdS=4\iint\limits_{S_1} xdS$.　　D. $\iint\limits_S zdS=4\iint\limits_{S_1} ydS$.

5.设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为三阶非零矩阵，满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2a & 1-a & 2a\\ a & -a & a^2-2\end{pmatrix}$，则

A. $a=2$时，必有$r(\boldsymbol{A})=1$

B. $a=2$时，必有$r(\boldsymbol{A})=2$

C. $a=-1$时，必有$r(\boldsymbol{A})=1$

D. $a=-1$时，必有$r(\boldsymbol{A})=2$

6.设秩为 2 的n维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$满足$\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3=0$，对任意的$n$维向量$\boldsymbol{\beta}$，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2+b\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，则参数$a,b$应满足条件

A. $a=b$.

B. $a=-b$.

C. $a=2b$.

D. $a=-2b$.

7.设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是$n$阶实对称矩阵，且$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$的特征值均不为0，则存在$n$阶可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得下列关系式成立的个数是:

① $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$ ② $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{ABP}=\boldsymbol{BA}$ ③ $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^2$ ④ $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^2$

A.1个

B.2个

C.3个

D.4个

8.设随机变量X的概率分布为$P\{X=k\}=\dfrac{C}{k!},k=1,2,\cdots$，则$EX^2=$

A. $\dfrac{2e}{e-1}$

B. $\dfrac{e-1}{2e}$

C. 2

D. $\dfrac{1}{2}$

9.设随机变量$X\sim U\left(0,2\pi\right)$，令$Y=\sin X$， $Z=\cos X$，则下列结论正确的个数是

① Y与Z不相关.

② Y与Z不独立.

③ Y^2与Z^2不相关.

④④ Y^2与Z^2不独立.

A.1 个

B.2 个

C.3 个

D.4 个

10.设随机变量X与Y独立同分布，且均服从$\left(0,1\right)$上的均匀分布，则$E\left[\min\left(X,Y\right)\right]=$

A. 1

B. $\dfrac{1}{2}$

C. $\dfrac{1}{3}$

D. $\dfrac{1}{4}$

二、填空题：11~16 小题，每小题 5 分，共 30 分.请将答案填写在答题卡指定位置上.

11.设$f\left(x\right)$为可导的偶函数，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(\cos x\right)}{x^2}=2$，则曲线$y=f\left(x\right)$在点$x=-1$处的法线方程为____________.

12.当$x>0$时，$f(\ln x)=\sqrt{x}$，则$\int_1^e f'(\ln x)\ln x dx=$____________.

13.$\int_0^1 dz\int_{-1}^{z}dx\int_0^1|2x-2y|dy=$____________.

14.曲面$x^2+y^2-z^2=1$与平面$x+y+z=0$平行的切平面为____________.

15.已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+ax_2x_3$，其中$a$为常数，则二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形为____________.

16.设随机变量$X\sim\pi(1)$，$Y=\left(X-EX\right)^2$，则$P\left\{Y<EY\right\}=$____________.

三、解答题:17~22小题，共70分.请将解答写在答题卡指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本题满分10分）

设函数$y(x)$ $(x\geq 0)$由方程$y^3+xy-8=0$所确定.

（1）证明：$y^2dx=-2\left(y^3+4\right)dy$；

（2）计算积分$\int_0^7 y^2(x)dx$.

18.（本题满分12分）

设$z=z(x,y)$由方程$x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$所确定，试求$z=z(x,y)$的极值.

19.（本题满分12分）

将函数$f(x)=1-x^2(0\leq x\leq\pi)$展开成余弦级数，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$的和.

20.（本题满分12分）

设L为从点$A(-1,0)$沿曲线$y=x-x^3$到点$B(1,0)$的有向弧段,求曲线积分

$$I=\int_L(\mathrm{e}^{x^2}\sin x+3y-\cos y)\mathrm{d}x+(x\sin y-y)\mathrm{d}y.$$

21.（本题满分12分）

设$\boldsymbol{A}$是3阶实对称矩阵，矩阵$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,其中$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是3维列向量，$\boldsymbol{\alpha}_1\neq 0$，且满足$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$，证明：

（1）线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解；

（2） $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，其中 $\boldsymbol{B}^T$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的转置矩阵.

22.（本题满分 12 分）

设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$， μ 已知， σ^2 未知. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，记 $T_1^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,T_2^2=c\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ ，其中 $\overline{X}$ 为样本均值， T_2^2 是 σ^2 的无偏估计.

（1）确定常数 c 并证明 T_1^2 也是 σ^2 的无偏估计.

（2）比较 T_1^2,T_2^2 的有效性.

（3）证明 T_1^2,T_2^2 均为 σ^2 的一致估计.