

# 2025 年全国硕士研究生招生考试

## 数学三模拟试题 03

一、选择题:1~10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分.下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合要求的.请将所选项前的字母填涂在答题卡指定位置上.

1. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{c \ln(1 - 2x) + d(1 - e^{-x^2})} = 2$ , 其中  $a^2 + c^2 \neq 0$ , 则必有

A.  $b = 4d$ .

B.  $b = -4d$ .

C.  $a = 4c$ .

D.  $a = -4c$ .

2. 设  $f(x)$  在  $[0, 2\pi]$  上有二阶连续导数, 且  $f''(x) = 0$ , 则积分  $\int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx$  的值

A. 既可能为正也可能为 0.

B. 既可能为负也可能为 0.

C. 恒为 0.

D. 不为 0.

3. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \tan^2(e^{\frac{1}{n^2}} - 1)$

A. 发散;

B. 条件收敛;

C. 绝对收敛.

D. 敛散性不定.

4. 设  $f(x, y)$  为连续函数, 变换二次积分  $I = \int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy$  的次序为先  $x$  后  $y$ , 正确的

A.  $I = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx - \int_{-1}^0 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{2\pi + \arcsin y} f(x, y) dx$

B.  $I = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{2\pi + \arcsin y} f(x, y) dx$

C.  $I = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{\pi + \arcsin y}^{2\pi + \arcsin y} f(x, y) dx$

D.  $I = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx - \int_{-1}^0 dy \int_{\pi + \arcsin y}^{2\pi + \arcsin y} f(x, y) dx$

5. 设  $A, B$  均为三阶非零矩阵, 满足  $AB = O$ , 其中  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2a & 1-a & 2a \\ a & -a & a^2-2 \end{pmatrix}$ , 则

A.  $a = 2$  时, 必有  $r(A) = 1$

B.  $a = 2$  时, 必有  $r(A) = 2$

C.  $a = -1$  时, 必有  $r(A) = 1$

D.  $a = -1$  时, 必有  $r(A) = 2$

6. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是  $Ax = 0$  的基础解系, 则该方程组的基础解系还可以表示成

A.  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的一个等价向量组.

B.  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的一个等秩向量组.

C.  $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ .

D.  $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ .

7. 设  $A, B$  是  $n$  阶实对称矩阵, 且  $A, B$  的特征值均不为 0, 则存在  $n$  阶可逆矩阵  $P$ , 使得下列关系式成立的个数是:

①  $PA = B$  ②  $P^{-1}ABP = BA$  ③  $P^{-1}A^2P = B^2$  ④  $P^T A^2 P = B^2$

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

8. 设随机变量  $X$  的概率分布为  $P\{X = k\} = \frac{C}{k!}, k = 1, 2, \dots$ , 则  $EX^2 =$

A.  $\frac{2e}{e-1}$

B.  $\frac{e-1}{2e}$

C. 2

D.  $\frac{1}{2}$

9. 设随机变量  $X \sim U(0, 2\pi)$ , 令  $Y = \sin X$ ,  $Z = \cos X$ , 则下列结论正确的个数是

①  $Y$  与  $Z$  不相关.

②  $Y$  与  $Z$  不独立.

③  $Y^2$  与  $Z^2$  不相关.

④  $Y^2$  与  $Z^2$  不独立.

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

10. 设随机变量  $X$  与  $Y$  独立同分布, 且均服从  $(0, 1)$  上的均匀分布, 则  $E[\min(X, Y)] =$

A. 1

B.  $\frac{1}{2}$

C.  $\frac{1}{3}$

D.  $\frac{1}{4}$

二、填空题: 11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 请将答案填写在答题卡指定位置上.

11. 设  $f(x) = \begin{cases} xe^{x^2}, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^3, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$  则  $\int_0^2 xf'(2-x)dx =$  \_\_\_\_\_.

12. 不定积分  $\int \frac{\ln x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} dx =$  \_\_\_\_\_.

13. 设  $y > 0$ , 微分方程  $xdy - ydx = y^2 e^y dy$  的通解为\_\_\_\_\_.

14.  $\int_{-1}^2 dx \int_0^1 |x-y| dy =$ \_\_\_\_\_.

15. 已知正负惯性指数均为1的二次型  $x^T A x$  通过可逆变换  $x = Py$  化为二次型  $y^T C y$ , 其中

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } a = \text{_____}.$$

16. 设随机变量  $X \sim \pi(1)$ ,  $Y = (X - EX)^2$ , 则  $P\{Y < EY\} =$ \_\_\_\_\_.

**三、解答题:17~22 小题, 共 70 分. 请将解答写在答题卡指定位置上. 解答应写出文字说明、**

**证明过程或演算步骤.**

17. (本题满分 10 分)

$$\text{求极限 } I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t) \sin^2 t dt}{x \int_0^x \sin^2 (x-t) dt}.$$

18. (本题满分 12 分)

设函数  $f(x)$  满足  $xf'(x) - 2f(x) + x = 0$ , 且由曲线  $y = f(x)$ ,  $x = 1$  以及  $x$  正半轴所围成的平面图形  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积最小, 求:

(1)  $y = f(x)$  的表达式.

(2) 曲线在点  $(1, f(1))$  处的切线与曲线  $y = f(x)$  及直线  $x = 1$  所围成的平面图形的面积.

19. (本题满分 12 分)

设  $a_n = \int_0^1 \sin x^n dx$ ,  $b_n = \int_0^1 \sin^n x dx$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 证明:

(1)  $0 \leq b_n \leq a_n$ ;

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

20. (本题满分 12 分)

设平面区域  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$ , 计算二重积分  $I = \iint_D |\cos(x+y)| d\sigma$ .

21. (本题满分 12 分)

设  $A$  是 3 阶实矩阵, 矩阵  $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , 其中  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是 3 维列向量,  $\alpha_1 \neq 0$ , 且满足

$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3)$ , 证明:

(1) 线性方程组  $Bx = 0$  仅有零解;

(2)  $B^T B + A^* A$  是正定矩阵, 其中  $B^T$  是  $B$  的转置矩阵.

22. (本题满分 12 分)

设随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} k(x+y), & 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq x+1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

随机变量  $U$  服从分布  $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$ , 且  $U$  与  $X, Y$  均独立. 记随机变量  $Z = U(X - Y)$ .

(1) 求常数  $k$  及边缘概率密度  $f_X(x), f_Y(y)$ .

(2) 求条件概率  $P(Y \leq 1 | X = \frac{1}{2})$ .

(3) 求  $Z$  的分布函数  $F_Z(z)$ .