随机事件与概率

- **随机事件及其运算**
  - 随机试验与随机事件
    - 随机试验：可重复，结果不唯一，不可预测
    - 样本空间：所有结果组成的集合
    - 样本点：单个结果（不可再分）
    - 随机事件
      - 定义：样本空间的子集
      - 意义：是否发生具有随机性
      - 特殊事件
        - 样本空间：必然事件
        - 空集：不可能事件
        - 单个样本点组成的事件：基本事件
  - 随机事件的运算
    - 和事件
      - 定义
        - 集合意义：并集
        - 概率意义：A 发生或者 B 发生
        - 理解关键词：或、至少一个
      - 常用结论：$\{\min\{X,Y\}\le a\}=\{X\le a\}\cup\{Y\le a\}$
    - 积事件
      - 定义
        - 集合意义：交集
        - 概率意义：A 发生并且 B 发生
        - 理解关键词：且、都、同时、“，”
      - 常用结论：$\{\max\{X,Y\}\le a\}=\{X\le a\}\cap\{Y\le a\}$
    - 差事件
      - 定义：A 发生并且 B 不发生
      - 常用结论：$A-B=A-AB=A\overline{B}$
    - 运算法则
      - 吸收律
        - 基本内容：若 $A\subset B$，则 $AB=A, A\cup B=B$
        - 常用结论
          - $A\Omega=A\cup\varnothing=A, A\cup\Omega=\Omega, A\varnothing=\varnothing$
          - $A+AB=A, AAB=AB$
      - 分配律
        - $(A+B)C=AC+BC$
        - $(A+C)(B+C)=AB+C$
      - 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
  - 随机事件的关系
    - 包含：$A\subset B$
      - 集合意义：A为B的子集
      - 概率意义：A 发生 $\Rightarrow B$ 发生
      - 等价描述
        - $A\overline{B}=\varnothing$
        - $\overline{B}\subset\overline{A}$
        - $AB=A, A\cup B=B$
    - 相等：$A=B$
      - 集合意义：相互包含
      - 概率意义：同一事件的等价描述
    - 互斥：A,B 互斥（互不相容）
      - 集合意义：$A\cap B=\varnothing$
      - 概率意义：A,B 不能同时发生
      - 等价描述
        - $A\subset\overline{B}, B\subset\overline{A}$
        - $\overline{A}\cup\overline{B}=\Omega$
    - 对立：$B=\overline{A}$
      - 集合意义
        - 运算：$A\cap B=\varnothing, A\cup B=\Omega$
        - 图像：A,B 将样本空间 Ω 分为互不相交的两份
      - 概率意义：每次试验 A,B 有且仅有一个发生
    - 完备事件组
      - 集合意义
        - 运算：$A_1,\ldots\ldots,A_n$ 两两互斥且 $A_1\cup\ldots\ldots\cup A_n=\Omega$
        - 图像：$A_1,\ldots\ldots,A_n$ 将样本空间 Ω 分为互不相交的 n 份
      - 概率意义：每次试验 $A_1,\ldots\ldots,A_n$ 中有且仅有一个发生
- **概率**
  - 公理化定义
    - 基本定义
      - 非负性
      - 归一性
      - 可列可加性
    - 常用性质
      - 不可能事件的概率
        - 公式：$P(\varnothing)=0$
        - 易错点
          - 概率为零的事件不一定为不可能事件
          - 由概率的关系无法得到集合的关系
      - 单调性
        - 公式：$A\subset B\Rightarrow P(A)\le P(B)$
        - 推论
          - $P(AB)\le P(A)\le P(A+B)$
          - $P(A)=0\Rightarrow P(AB)=0, P(A+B)=P(B)$
          - $P(A)=1\Rightarrow P(AB)=P(B), P(A+B)=1$
      - 有限可加性
        - 公式：$A_1,\ldots\ldots,A_n$ 两两互斥，则 $P(A_1\cup\ldots\ldots\cup A_n)=P(A_1)+\ldots\ldots+P(A_n)$
        - 推论：$P(\overline{A})=1-P(A)$
  - 条件概率
    - 定义：$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$
    - 性质
      - 非负性、归一性、可列可加性
      - 有限可加性
      - $P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)$
    - 计算方法
      - 用定义
      - 缩减样本空间
  - 独立性
    - 定义
      - 数学定义
        - A,B 独立：$P(AB)=P(A)P(B)$
        - A,B,C 两两独立：$P(AB)=P(A)P(B), P(AC)=P(A)P(C), P(BC)=P(B)P(C)$
        - A,B,C 相互独立：A,B,C 两两独立且 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$
      - 实际意义：互不影响
      - 等价条件
        - $P(B|A)=P(B)$（$P(A)>0$）
        - $P(B|A)=P(B|\overline{A})$（$0<P(A)<1$）
    - 常用性质
      - 概率为0或1的随机事件与任何随机事件都是独立的
      - 取逆事件不影响独立性
  - 概率的计算方法
    - 用简单概型
      - 古典概型
        - 三种抽取方式：先后放回、先后不放回、任取
        - 抽签原理
      - 几何概型
      - 伯努利概型
        - 独立重复试验
        - n 次试验中成功 k 次（对位置没有任何要求）的概率：$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$
    - 用性质：单调性、有限可加性、逆事件的概率
    - 用条件概率与独立性
    - 用公式
      - 加法公式
        - $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
        - $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$
      - 减法公式：$P(A-B)=P(A)-P(AB)$
      - 乘法公式：$P(AB)=P(A)P(B|A)$（$P(A)>0$）
      - 全概率公式
        - 使用条件
          - 需分情况讨论的事件
          - 离散型与连续型结合
        - 使用方法：先划分情况，再逐一讨论（缩减样本空间）
        - 具体公式：$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$
      - 贝叶斯公式：$P(A_i|B)=\dfrac{P(A_iB)}{P(B)}=\dfrac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}$
    - 用分布
      - 分布函数
        - $P\{a<X\le b\}=F(b)-F(a)$
        - $P\{X=a\}=F(a)-F(a-0)$
      - 概率密度
        - $P\{a<X<b\}=P\{a\le X\le b\}=\int_a^b f(x)dx$
        - $P\{(X,Y)\in D\}=\iint_{(x,y)\in D} f(x,y)dxdy$

一维随机变量

概念与性质

- 随机变量
  - 数学表达：定义在样本空间上的函数
  - 实际意义：将随机试验的结果用数字表达
- 分布函数
  - 基本知识
    - 适用范围：一切随机变量
    - 定义：$F(x)=P\{X\le x\}$
    - 性质
      - 充要条件
        - 1、$F(x)$单调不减
        - 2、$F(+\infty)=1, F(-\infty)=0$
        - 3、$F(x)$右连续
      - 特殊性质
        - $P\{a<X\le b\}=F(b)-F(a)$
        - $P\{X=a\}=F(a)-F(a-0)$
  - 常考题型
    - 对性质的考查
      - 求参数
      - 判断分布函数：逐一检验充要条件
      - 分布函数的连续性
        - $F(x)$右连续
        - $F(x)$在$x=a$连续$\Leftrightarrow P\{X=a\}=0$
        - 若X为连续型，$F(x)$连续
    - 分布函数的计算
      - 结合分布律：$F(x)=\sum_{x_i\le x} p_i$
      - 结合概率密度：$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
      - 用定义
        - 1、先求出X的取值范围
          - 如x小于X取值的下限，则$F(x)=0$
          - 如x大于或等于X取值的上限，则$F(x)=1$
        - 2、在X的取值范围之内，分析$\{X\le x\}$的实际意义，计算其概率
- 分布律
  - 适用范围：离散型随机变量
  - 定义：取值+概率（$P\{X\le x_i\}=p_i$）
  - 性质（充要条件）
    - 非负性：$p_i\ge 0$
    - 归一性：$\sum_i p_i=1$
  - 常考题型
    - 求参数：利用性质
    - 求分布律：抓住两要素
- 概率密度
  - 定义
    - 适用范围：连续型随机变量
    - 数学表达：$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
    - 实际意义：随机变量在该点附近单位长度区间内取值的概率
  - 性质
    - 充要条件
      - 非负性：$f(x)\ge 0$
      - 归一性：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$
    - 特殊性质
      - $\forall a\in R, P\{X=a\}=0$
      - $P\{a<X<b\}=P\{a\le X\le b\}=\int_a^b f(x)dx$
  - 常考题型
    - 求参数
    - 判断概率密度：逐一检验充要条件
    - 求概率：哪儿求概率哪儿积分
    - 求概率密度：求分布函数，再对其求导

常见分布

- 离散型
  - 0-1分布
    - 意义：表示在一次试验中某事件是否发生
    - 分布律：$P\{X=1\}=p, P\{X=0\}=1-p$
  - 二项分布
    - 意义：n重伯努利试验中成功的次数
    - 符号：$X\sim B(n,p)$
    - 分布律：$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,\ldots\ldots,n$
    - 性质
      - $B(1,p)$就是 0-1 分布
      - $X\sim B(n,p), Y\sim B(m,p)$且$X,Y$独立，则$X+Y\sim B(m+n,p)$
  - 几何分布
    - 意义：伯努利试验进行到第一次成功时的试验次数
    - 符号：$X\sim G(p)$
    - 分布律：$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p, k=1,2,3,\ldots\ldots$
  - 泊松分布
    - 符号：$X\sim P(\lambda)$
    - 分布律：$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\ldots\ldots$
    - 性质：$X\sim P(\lambda_1), Y\sim P(\lambda_2)$且$X,Y$独立，则$X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$
- 连续型
  - 均匀分布
    - 符号：$X\sim U(a,b)$
    - 概率密度：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, a<x<b\\ 0, 其他\end{cases}$
    - 性质：概率=区间长度比
  - 指数分布
    - 符号：$X\sim E(\lambda)$
    - 概率密度：$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$
    - 性质：无记忆性（$P\{X>s+t\mid X>s\}=P\{X>t\}$）
  - 正态分布
    - 符号：$X\sim N(\mu,\sigma^2)$
    - 分布
      - 一般正态分布：$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
      - 标准正态分布
        - 概率密度：$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$
        - 分布函数：$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$
    - 性质
      - 查表
      - 对称性
        - 数学表达
          - $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$
          - $\Phi(0)=0.5$
        - 图像：概率密度的图像关于$x=\mu$对称
      - 标准化：$X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

多维随机变量

联合分布

- 联合分布函数
  - 适用范围：一切二维随机变量
  - 定义：$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$
  - 性质
    - $F(x,y)$ 关于 x 和 y 均单调不减
    - $F(x,-\infty)=F(-\infty,y)=0,F(+\infty,+\infty)=1$
    - $F(x,y)$ 关于 x 和 y 均右连续
    - $P\{x_1<X\le x_2,y_1<Y\le y_2\}=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)$
  - 常考题型：联合分布函数的计算（用定义）
- 联合分布律
  - 适用范围：二维离散型随机变量（X,Y都是离散型随机变量）
  - 定义：取值+概率（$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$）
  - 性质
    - $p_{ij}\ge 0$
    - $\sum_i\sum_j p_{ij}=1$
    - $P\{(X,Y)\in D\}=\sum_{(x_i,y_j)\in D}p_{ij}$
  - 常考题型
    - 求参数
    - 求联合分布律：抓住两要素
- 联合概率密度
  - 适用范围：二维连续型随机变量（X,Y都是连续型随机变量）
  - 定义
    - 数学表达：$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}du\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dv$
    - 实际意义：随机变量在该点附近单位面积区域内取值的概率
  - 性质
    - 非负性：$f(x,y)\ge 0$
    - 归一性：$\iint_{R^2}f(x,y)dxdy=1$
    - $P\{(X,Y)\in D\}=\iint_{(x,y)\in D}f(x,y)dxdy$
  - 常考题型
    - 求参数
    - 求概率：哪儿求概率哪儿积分
    - 求概率密度：求分布函数，再对其求导

常见分布

- 二维均匀分布
  - 符号：$(X,Y)\sim U(D)$
  - 概率密度：$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S(D)},(x,y)\in D\\ 0,其他\end{cases}$
  - 性质：概率=区域面积比
- 二维正态分布
  - 符号：$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$
  - 概率密度：略
  - 性质
    - 与一维正态分布的关系
      - (X,Y) 服从二维正态分布 $\Rightarrow X,Y$ 均服从一维正态分布
      - X,Y 均服从一维正态分布 $\not\Rightarrow (X,Y)$ 服从二维正态分布
      - X,Y 均服从一维正态分布，且 X,Y 独立 $\Rightarrow (X,Y)$ 服从二维正态分布
    - 线性性质
      - (X,Y) 服从二维正态分布 $\Rightarrow aX+bY$ 服从一维正态分布
      - $X_1,\ldots\ldots,X_n$ 相互独立且均服从正态分布，则 $\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$ 服从一维正态分布
      - (X,Y) 服从二维正态分布，且 $ad-bc\ne 0$，则 $(aX+bY,cX+dY)$ 也服从二维正态分布
    - 独立性与不相关性：若 (X,Y) 服从二维正态分布，则 X,Y 独立 $\Leftrightarrow \rho_{XY}=0$

边缘与条件

- 边缘分布
  - 定义：二维随机变量中两个随机变量各自的分布
  - 计算公式
    - 边缘分布函数：$F_X(x)=F(x,+\infty)$
    - 边缘分布律：$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_j p_{ij}$
    - 边缘概率密度：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$
- 条件分布
  - 定义：固定一个随机变量之后另一个随机变量的分布
  - 计算公式
    - 条件分布律：$P\{Y=y_j|X=x_i\}=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$（$p_{i\cdot}>0$）
    - 条件概率密度：$f_X(x)>0$ 时，$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$
- 独立性
  - 定义
    - 一般表达：$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$
    - 离散型：$p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$
    - 连续型：$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$
  - 意义
    - X,Y的取值互不影响
    - $P\{X\in I_1,Y\in I_2\}=P\{X\in I_1\}P\{Y\in I_2\}$，$I_1,I_2$ 为任意数集
- 常考题型
  - 离散型
    - 已知联合分布求边缘分布及条件分布：代公式
    - 已知边缘分布求联合分布
      - 1、写出X,Y各自的取值
      - 2、写出联合分布各行各列的和
      - 3、结合题目中其他条件求联合分布
    - 独立性
      - 判断
        - 定义法：求出两个边缘分布
        - 观察法：直接观察联合分布各行各列是否成比例
      - 应用
        - 利用独立性求分布
        - 利用独立性求概率
  - 连续型
    - 已知联合求边缘及条件
      - 基本方法：代公式
      - 难点
        - 范围的讨论
          - $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$：固定x，y从-∞到+∞取值
          - $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$
            - 首先确保 $f_X(x)>0$
            - x看作常数
        - 特殊积分的计算
          - $\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}dx=n!$
          - $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$
          - $\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2n}e^{-x^2}dx=\dfrac{2n-1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2n-2}e^{-x^2}dx$
    - 已知边缘及条件求联合
      - 1、$f_X(x)>0$ 时，$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)$
      - 2、$f_X(x)=0$ 时，$f(x,y)=0$
    - 独立性
      - 判断
        - 定义法：求出两个边缘分布
        - 观察法
          - 1、解析式变量可分离
          - 2、定义域为矩形区域
          - 两点同时满足，随机变量X,Y才独立
        - 排除法
          - 对于明显有关系的随机变量X,Y，可用如下方法说明其不独立：
          - 1、找到数集 I_1 与 I_2
          - 2、验证 $P\{X\in I_1,Y\in I_2\}\ne P\{X\in I_1\}P\{Y\in I_2\}$
      - 应用
        - 利用独立性求分布
        - 利用独立性求概率

随机变量函数的分布

- **一维**
  - 离散型：把握好两要素（先写出取值，再逐一计算其概率）
  - 连续型
    - 公式法
      - 适用范围：Y=g(X)可导且在X的取值范围内g(X)单调
      - 具体步骤
        - 1、先根据X的取值范围得到Y的取值范围
        - 2、在Y的取值范围之外，直接令 $f_Y(y)=0$
        - 3、在Y的取值范围之内
          - （1） 求出 $Y=g(X)$ 的反函数 $X=h(Y)$
          - （2） 代公式 $f_Y(y)=f_X(h(y))\left|h'(y)\right|$
    - 定义法
      - 适用范围：Y=g(X)不可导或在X的取值范围内g(X)不单调
      - 具体步骤
        - 1、先根据X的取值范围得到Y的取值范围
        - 2、在Y的取值范围之外
          - （1） y 小于 Y 取值的下限：$F_Y(y)=0$
          - （2） y 大于或等于 Y 取值的上限：$F_Y(y)=1$
        - 3、在Y的取值范围之内： 解出不等式 $g(X)\le y$ 所对应的区间，对概率密度积分
- **多维**
  - 离散型：把握好两要素（先写出取值，再逐一计算其概率）
  - 连续型
    - 公式法
      - 总体法则
        - 1、积谁换对门
        - 2、再乘z偏导
      - 具体公式
        - 和的分布 $Z=aX+bY$： $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,\frac{1}{b}(z-ax)\right)\frac{1}{|b|}dx$
        - 积的分布 $Z=XY$： $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,\frac{z}{x}\right)\frac{1}{|x|}dx$
        - 商的分布 $Z=\frac{Y}{X}$： $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,xz)|x|dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{y}{z},y\right)\frac{|y|}{z^2}dy$
    - 定义法
      - 1、先根据X,Y的取值范围得到Z的取值范围
      - 2、在Z的取值范围之外
        - （1） z 小于 Z 取值的下限：$F_Z(z)=0$
        - （2） z 大于或等于 Z 取值的上限：$F_Z(z)=1$
      - 3、在Z的取值范围之内： 画出不等式 $g(X,Y)\le z$ 所对应的区域，对概率密度积分
  - 混合型
    - 基本思路：定义法 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{g(X,Y)\le z\}$
    - 计算要点（假设Y为离散型）
      - （1）全概率公式：根据Y的取值，分情况讨论
      - （2）缩减样本空间法： $P\{g(X,Y)\le z\mid Y=y_i\}=P\{g(X,y_i)\le z\mid Y=y_i\}$
      - （3）特殊事件的概率：若a,b均为常数，则 $P\{a\le b\}=\begin{cases}1, a\le b\\ 0, a>b\end{cases}$
  - 最值的分布
    - 基本思路：定义法 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}$
    - 计算要点
      - （1）最大值
        - $\{\max\{X,Y\}\le z\}=\{X\le z,Y\le z\}$
        - $\{\max\{X_1,\dots,X_n\}\le z\}=\{X_1\le z,\dots,X_n\le z\}$
      - （2）最小值
        - $\{\min\{X,Y\}\le z\}=\{X\le z\text{或}Y\le z\}$
        - $\{\min\{X,Y\}>z\}=\{X>z,Y>z\}$
        - $\{\min\{X_1,\dots,X_n\}>z\}=\{X_1>z,\dots,X_n>z\}$
      - （3）特殊事件的意义：若a,b均为常数，则 $\{a\le b\}=\begin{cases}\Omega, a\le b\\ \varnothing, a>b\end{cases}$

数字特征

- **基本概念**
  - 一维
    - 期望
      - 意义：随机变量的取值的平均数
      - 数学表达：$E\left[g(X)\right]=\begin{cases}\sum_i g(x_i)p_i,\text{离散型}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx,\text{连续型}\end{cases}$
    - 方差
      - 意义：随机变量取值的波动程度
      - 数学表达
        - $DX=E\left[(X-EX)^2\right]=EX^2-(EX)^2$
        - 标准差：$\sqrt{DX}$
    - 计算难点
      - 离散型：级数求和
      - 连续型
        - $\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\mu$
        - $\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\sigma^2$
        - $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\mu^2+\sigma^2$
        - $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}dx=\begin{cases}\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} u^k e^{-u}du,n=2k+1\\ \frac{2k-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{2k-2}e^{-x^2}dx,n=2k\end{cases}$
    - 应用
  - 二维
    - 期望：$E\left[g(X,Y)\right]=\begin{cases}\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij},\text{离散型}\\ \iint_{R^2} g(x,y)f(x,y)dxdy,\text{连续型}\end{cases}$
    - 协方差：$\operatorname{cov}(X,Y)=E\left[(X-EX)(Y-EY)\right]=EXY-EX\cdot EY$
    - 相关系数：$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}}$
- **常用公式**
  - 常见分布的数字特征
    - 公式
    - 使用要点
      - 常见分布的识别
      - 数字特征之间的关系
        - $EX^2=DX+(EX)^2$
        - $\operatorname{cov}(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{DX\cdot DY}$
  - 常用性质
    - 常数的数字特征：$EC=C,DC=0,\operatorname{cov}(C,X)=0$
    - 数乘的数字特征：$E(CX)=CEX,D(CX)=C^2DX,\operatorname{cov}(C_1X,C_2Y)=C_1C_2\operatorname{cov}(X,Y)$
    - 加法的数字特征
      - 期望
        - $E(X+Y)=EX+EY$
        - $E(X_1+\dots+X_n)=EX_1+\dots+EX_n$
      - 方差
        - $D(X+Y)=DX+DY+2\operatorname{cov}(X,Y)$
        - $D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)=\sum_{i=1}^n DX_i+2\sum_{i\neq j}\operatorname{cov}(X_i,Y_j)$
      - 协方差：$\operatorname{cov}(X+Y,Z)=\operatorname{cov}(X,Z)+\operatorname{cov}(Y,Z)$
      - 使用技巧
        - 将复杂的随机变量分解为若干个简单的随机变量之和
        - 若$X_1,\dots,X_n$同分布，则$E(\overline{X})=EX_1$
    - 积的期望
      - 一般公式：若X,Y独立，则$E(XY)=EX\cdot EY$
      - 推论
        - 若X,Y独立，则$\operatorname{cov}(X,Y)=0$
        - 若X,Y独立，则$D(X+Y)=DX+DY$
        - 若$X_1,\dots,X_n$两两独立，则$D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)=\sum_{i=1}^n DX_i$
        - 若$X_1,\dots,X_n$独立同分布，则$D(\overline{X})=\frac{1}{n}DX_1$
    - 协方差的性质
      - 对称性：$\operatorname{cov}(Y,X)=\operatorname{cov}(X,Y)$
      - 与方差的关系：$\operatorname{cov}(X,X)=DX$
      - 常用结论
        - $\operatorname{cov}(X+Y,X-Y)=DX-DY$
        - 若$X_1,\dots,X_n$两两独立，则$\operatorname{cov}\left(X_i,\sum_{j=1}^n X_j\right)=DX_i$
- **相关系数的性质**
  - 意义
    - 绝对值：线性关联程度
    - 符号：线性关联的性质
      - 符号为正：正相关，$D(X+Y)>DX+DY$
      - 符号为负：负相关，$D(X+Y)<DX+DY$
  - $|\rho_{XY}|=1$：完全线性关系，$Y=aX+b,a\neq0$
    - $a>0\Leftrightarrow\rho_{XY}=1$
    - $a<0\Leftrightarrow\rho_{XY}=-1$
  - $\rho_{XY}=0$：不相关
    - 充要条件：$\operatorname{cov}(X,Y)=0$
    - 与独立的关系
      - X,Y独立$\Rightarrow X,Y$不相关
      - X,Y不相关$\not\Rightarrow X,Y$独立
      - (X,Y)服从二维正态分布且X,Y不相关$\Rightarrow X,Y$独立

大数定律与中心极限定理

- **大数定律**
  - 依概率收敛：$\forall \varepsilon > 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} P\{|X_n - \mu| > \varepsilon\} = 0$
  - 常见大数定律
    - 切比雪夫大数定律
      - 条件
        - 1、$X_1,\dots,X_n$ 相互独立
        - 2、$EX_1 = \dots = EX_n = \mu$
        - 3、$\{DX_n\}$ 有上界
      - 结论：$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \mu$
    - 辛钦大数定律
      - 条件
        - 1、$X_1,\dots,X_n$ 相互独立
        - 2、$X_1,\dots,X_n$ 同分布
        - 3、$EX_1 = \dots = EX_n = \mu$
      - 结论：$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \mu$
    - 伯努利大数定律
      - 条件
        - 1、$P\{X_i = 1\} = p, P\{X_i = 0\} = 1 - p$
        - 2、$X_1,\dots,X_n$ 相互独立
      - 结论：$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} p$
    - 相互关系
      - 切比雪夫与辛钦
        - 相同点
          - 1、结论相同（均值依概率收敛于期望）
          - 2、相同的条件
            - $X_1,\dots,X_n$ 相互独立
            - $EX_1 = \dots = EX_n = \mu$
        - 不同点
          - 切比雪夫：$\{DX_n\}$ 有上界
          - 辛钦：$X_1,\dots,X_n$ 同分布
      - 伯努利：同时是切比雪夫与辛钦的推论
- **中心极限定理**
  - 定理内容
    - 实际意义：无穷多个独立同分布的随机变量之和服从正态分布
    - 数学表达
      - 条件
        - 1、$X_1,\dots,X_n$ 独立同分布
        - 2、$EX_i = \mu, DX_i = \sigma^2$
      - $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x\right\} = \Phi(x)$
      - 结论
        - $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)}{\sigma} \le x\right\} = \Phi(x)$
    - 推论：当n足够大时，n个独立同分布的随机变量之和近似服从正态分布
  - 运用中心极限定理做近似计算
    - 1、构造独立同分布的随机变量
    - 2、按实际意义写出事件的表达式（用 $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ 或 $\overline{X}$ 表示）
    - 3、$\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ 或 $\overline{X}$ 标准化，用 $\Phi(x)$ 表示计算结果

数理统计

基本概念

- 总体
- 样本
  - 简单随机样本 $X_1,\dots,X_n$：独立同分布的随机变量
  - 观测值 $x_1,\dots,x_n$：随机变量 $X_1,\dots,X_n$ 实际的取值
  - 样本容量：n
- 统计量
  - 基本概念：简单随机样本 $X_1,\dots,X_n$ 的函数，不含未知参数
  - 常见统计量
    - 样本均值：$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$
    - 样本方差：$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right]$
    - 样本标准差：$S=\sqrt{S^2}$
    - k 阶原点矩：$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$
    - k 阶中心矩：$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^k$

统计量求数字特征

- 一般总体
  - 设总体为 X，且 EX,DX 均存在，则
  - 1、$E\left(\overline{X}\right)=EX,D\left(\overline{X}\right)=\frac{DX}{n},E\left(S^2\right)=DX$
  - 2、$E\left(\overline{X}^2\right)=(EX)^2+\frac{DX}{n},E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=(EX)^2+DX$
  - 3、$E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right]=(n-1)DX$
- 正态总体
  - 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则
  - 1、$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)\Rightarrow DS^2=\frac{2\sigma^4}{n-1}$
  - 2、$\overline{X}$ 与 S^2 相互独立 $\Rightarrow E\left(\overline{X}S^2\right)=E\left(\overline{X}\right)E\left(S^2\right),D\left(\overline{X}+S^2\right)=D\left(\overline{X}\right)+D\left(S^2\right)$
- χ^2 分布的数字特征：若 $X\sim\chi^2(n)$，则 $EX=n,DX=2n$

统计量的分布

- 三大抽样分布
  - χ^2 分布
    - 定义：$X\sim\chi^2(n)$
      - 形式：$X=X_1^2+\dots+X_n^2$
      - 要求：$X_1,\dots,X_n$ 相互独立且均服从标准正态分布
    - 性质：$X\sim\chi^2(n),Y\sim\chi^2(m),X$ 与 Y 相互独立 $\Rightarrow X+Y\sim\chi^2(m+n)$
  - t 分布
    - 定义：$T\sim t(n)$
      - 形式：$T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$
      - 要求：$X\sim N(0,1),Y\sim\chi^2(n),X$ 与 Y 相互独立
    - 性质：概率密度为偶函数（图像接近于标准正态）
  - F 分布
    - 定义：$F\sim F(m,n)$
      - 形式：$F=\frac{X/m}{Y/n}$
      - 要求：$X\sim\chi^2(m),Y\sim\chi^2(n),X$ 与 Y 相互独立
    - 性质
      - $F\sim F(m,n)\Rightarrow\frac{1}{F}\sim F(n,m)$
      - $T\sim t(n)\Rightarrow T^2\sim F(1,n)$
  - 常考题型
    - 统计量分布的判断：连猜带凑
      - 1、先通过统计量的形式大致判断分布的类型
      - 2、将统计量凑成分布定义的标准形式
    - 利用分布求概率
      - $T\sim t(n)$
        - $P\{T>a\}=P\{T<-a\}$
        - $P\{-a<T<a\}=2P\{0\le T<a\}$
        - 分位点的性质：$-t_\alpha(n)=t_{1-\alpha}(n)$
      - F 分布
        - $F\sim F(n,n)\Rightarrow P\{F>1\}=P\{F<1\}=\frac{1}{2}$
        - 分位点的性质：$F_\alpha(m,n)F_{1-\alpha}(n,m)=1$
- 正态总体下统计量的分布
  - 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则
  - 1、$\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu\right)}{\sigma}\sim N(0,1)$
  - 2、$\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu\right)}{S}\sim t(n-1)$
  - 3、$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$
  - 4、$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

参数估计与假设检验

- **参数估计**
  - 点估计
    - 估计方法
      - 矩估计
        - 基本步骤
          - 1、求出 $EX = g(\theta)$
          - 2、解出 $\theta = g^{-1}(EX)$
          - 3、用 $\overline{X}$ 估计 EX 得到矩估计量 $\hat{\theta} = g^{-1}(\overline{X})$
          - 4、矩估计值：$\hat{\theta} = g^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$
        - 方法推广
          - EX 与 θ 无关
            - 1、求出 $EX^2 = g_2(\theta)$
            - 2、解出 $\theta = g_2^{-1}(EX^2)$
            - 3、用 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 估计 EX^2 得到矩估计量 $\hat{\theta} = g_2^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$
          - 两个参数 θ_1, θ_2
            - 1、求出 $EX = g_1(\theta_1, \theta_2), EX^2 = g_2(\theta_1, \theta_2)$
            - 2、解出 $\theta_1 = \theta_1(EX, EX^2), \theta_2 = \theta_2(EX, EX^2)$
            - 3、用 $\overline{X}$ 估计 EX，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 估计 EX^2
      - 最大似然估计
        - 基本步骤
          - 1、写似然函数
            - 离散型：$L = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i = x_i\}$
            - 连续型：$L = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$
          - 2、在可能的范围内，求使得 L 最大的 θ 的取值
            - 定义域内不含 θ
              - (1) 取对数 $\ln L$
              - (2) 求导 $\frac{d(\ln L)}{d\theta}$
              - (3) 令 $\frac{d(\ln L)}{d\theta} = 0$ 解出最大似然估计值
            - 定义域内含 θ：分析单调性
              - L 关于 θ 单增：$\hat{\theta} = \min\{x_1, \cdots, x_n\}$
              - L 关于 θ 单减：$\hat{\theta} = \max\{x_1, \cdots, x_n\}$
          - 3、将 x_i 写成 X_i 得到最大似然估计量
        - 方法推广：两个参数 θ_1, θ_2
          - 1、写似然函数
          - 2、在可能的范围内，求使得 L 最大的 θ_1, θ_2 的取值
    - 评选标准（*数学一）
      - 无偏性：$E\left(\hat{\theta}\right) = \theta$
      - 有效性：$\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效
        - 1、$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 均为无偏估计量
        - 2、$D\left(\hat{\theta}_1\right) < D\left(\hat{\theta}_2\right)$
      - 一致性（相合性）：当 $n \to \infty$ 时，$\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$
  - 区间估计（*数学一）
    - 基本概念
      - $P\left\{\theta \in \left[\underline{\theta}, \overline{\theta}\right]\right\} = 1 - \alpha$
      - $1 - \alpha$：置信水平
      - $\left[\underline{\theta}, \overline{\theta}\right]$ 置信区间
      - $\underline{\theta}$（$\overline{\theta}$）：置信下（上）限
    - 估计方法
      - 基本思路
        - 1、结合已知信息，构造含未知参数且服从统计分布的统计量 T
        - 2、找出满足 $P\{T \in I\} = 1 - \alpha$ 的最小区间 I
        - 3、从 $T \in I$ 中解出参数即得到置信区间
      - 具体公式
- **假设检验（*数学一）**
  - 基本概念
    - 原假设与备择假设
      - 原假设 H_0：根据经验成立的假设
      - 备择假设 H_1：H_0 的否命题
    - 接受域与拒绝域
      - 接受域：接受原假设 H_0 的统计量取值范围
      - 拒绝域：拒绝原假设 H_0 的统计量取值范围
    - 两类错误
      - 第一类错误（弃真）：原假设为真的条件下拒绝了原假设
      - 第二类错误（纳伪）：原假设为假的条件下接受了原假设
    - 显著水平：犯第一类错误的概率
  - 检验方法
    - 基本思路
      - 1、提出原假设 H_0 与备择假设 H_1
      - 2、结合已知信息，构造统计量 T
      - 3、假设 H_0 为真，进行检验
    - 具体公式
      - $H_0: \mu = \mu_0$（$H_1: \mu \neq \mu_0$）
        - σ 已知
          - 统计量及分布：$U = \frac{\sqrt{n}\left(\overline{X} - \mu\right)}{\sigma} \sim N(0,1)$
          - 拒绝域：$|U| > z_{\frac{\alpha}{2}}$
        - σ 未知
          - 统计量及分布：$T = \frac{\sqrt{n}\left(\overline{X} - \mu\right)}{S} \sim t(n-1)$
          - 拒绝域：$|T| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
      - $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$（$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$）
        - μ 已知
          - 统计量及分布：$W' = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$
          - 拒绝域：$W' < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ 或 $W' > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$
        - μ 未知
          - 统计量及分布：$W = (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
          - 拒绝域：$W < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $W > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$