

行列式

基础知识

概念、性质与定理

定义

- 几何意义：以n个向量为邻边的平行多面体体积
- 数学表达：不同行不同列的n项乘积的代数和

性质

- 转置：行列互换，行列式不变
- 互换：交换两行（列），行列式变号
- 数乘
 - 某行（列）乘以常数k，行列式变为k倍
 - 两行（列）成比例，行列式为0
- 拆分：某行（列）元素均为两数之和，可以按该行（列）拆成两个行列式的和
- 倍加乘：将某行（列）元素的k倍加到另一行（列），行列式不变

展开定理

- 任何一行（列）元素与自身代数余子式乘积之和等于行列式
- 任何一行（列）与另外一行（列）对应元素代数余子式乘积之和为零

计算公式

常见的行列式

- 二阶、三阶行列式
- 上（下）三角行列式
- 范德蒙行列式

方阵的行列式

- 转置： $|A^T| = |A|$
- 数乘： $|\lambda A| = \lambda^n |A|$
- 乘法： $|AB| = |BA| = |A||B|$
- 拉普拉斯展开式
 - $\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$
 - $\begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| \cdot |B|$
- 逆矩阵与伴随矩阵： $|A^{-1}| = |A|^{-1}, |A^*| = |A|^{n-1}$

相似理论

- 矩阵所有特征值的乘积等于其行列式
- 相似的矩阵行列式相同

常考题型

数值型行列式

低阶

- 二阶、三阶行列式的计算公式
- 降阶
 - 展开：先化零，再展开
 - 拉普拉斯
- 范德蒙

高阶

- 三角化
 - 爪型
 - 对角线型
- 直接展开
- 展开
 - 递推公式
 - 1、先定位 D_{n-1} 和 D_n 阶数相同，但阶数低一阶
 - 2、展开行列式，得到 D_n 和 D_{n-1}, D_{n-2} 的关系
 - 3、运用递推公式求出 D_n

抽象型行列式

列分块的行列式

- 运用行列式的性质化简
- 运用列分块矩阵的运算法则分解

与矩阵的运算结合

- 直接使用相关公式：转置、数乘、乘法、逆矩阵以及伴随矩阵的行列式
- 与矩阵方程结合
 - 1、化简方程
 - 2、提公因式
 - 3、等式两边同时求行列式

与相似理论结合

- 运用特征值
- 运用相似

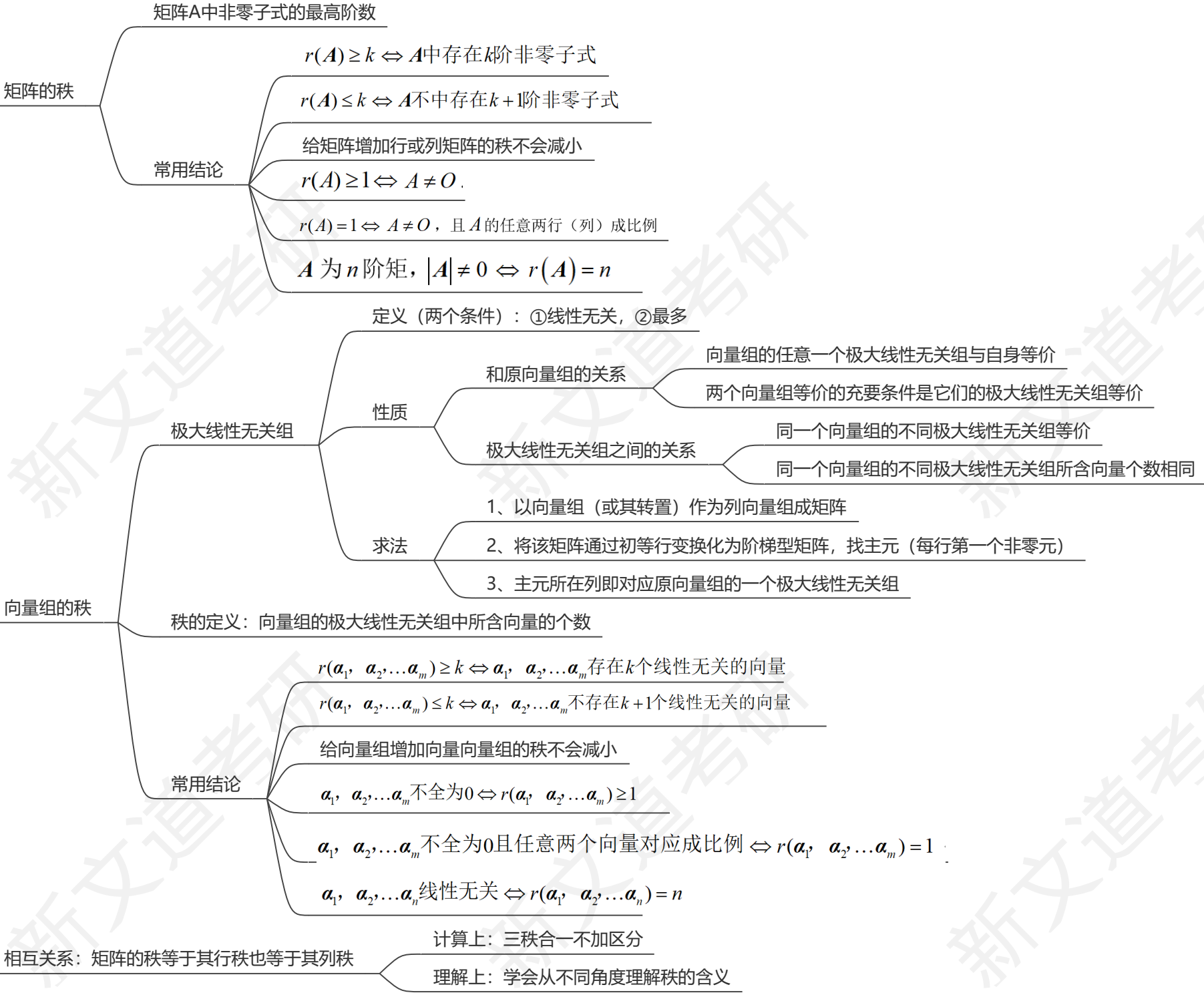


矩阵

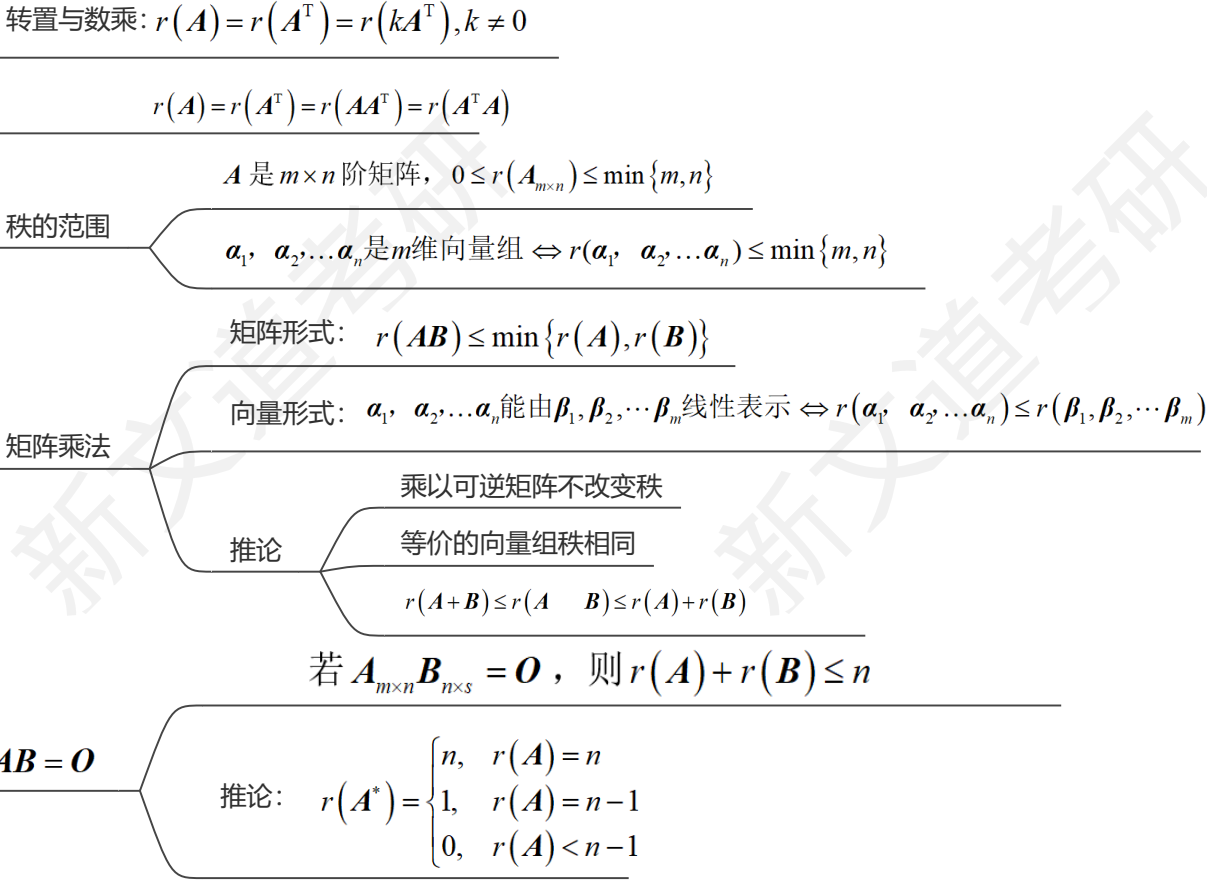


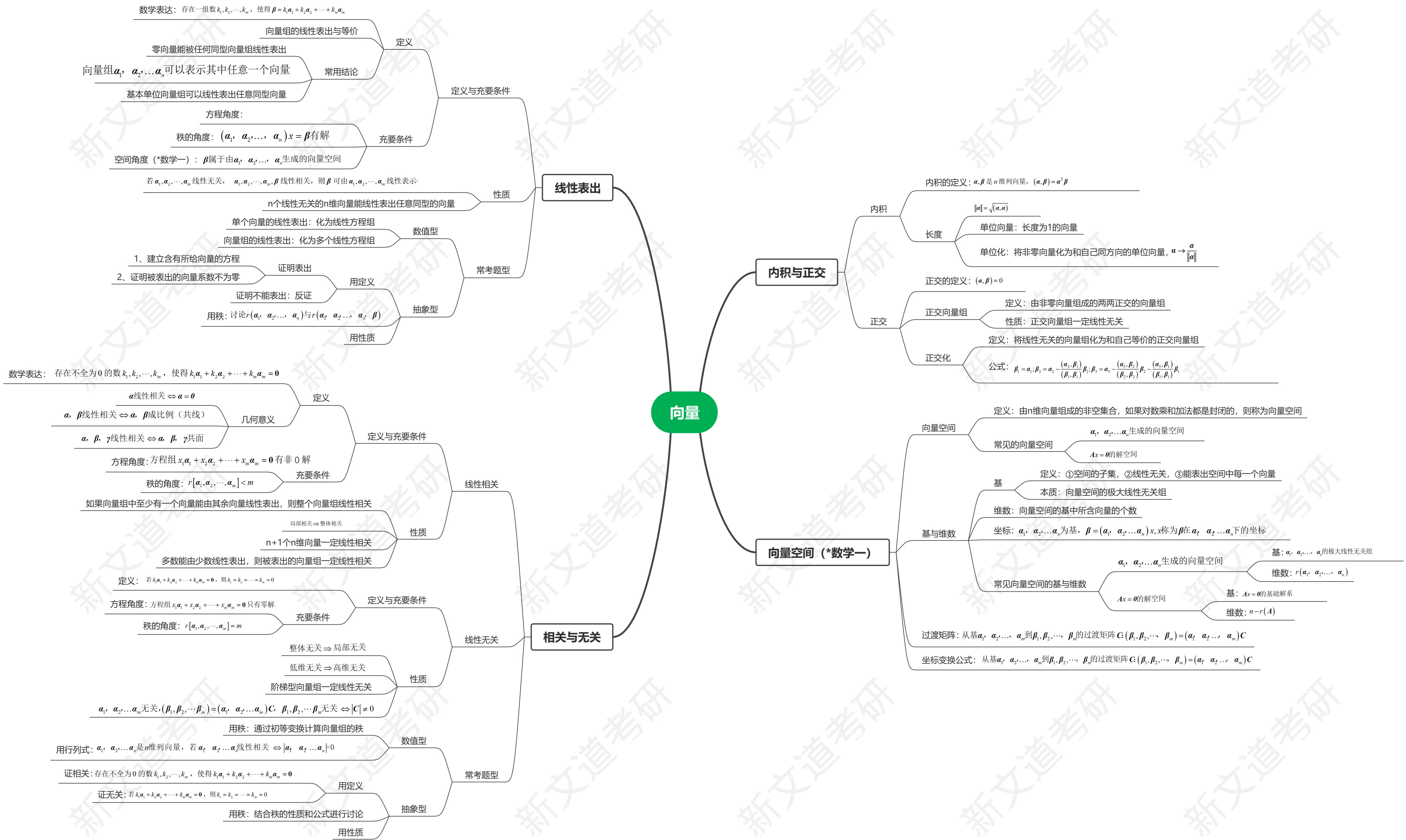
秩

基本概念



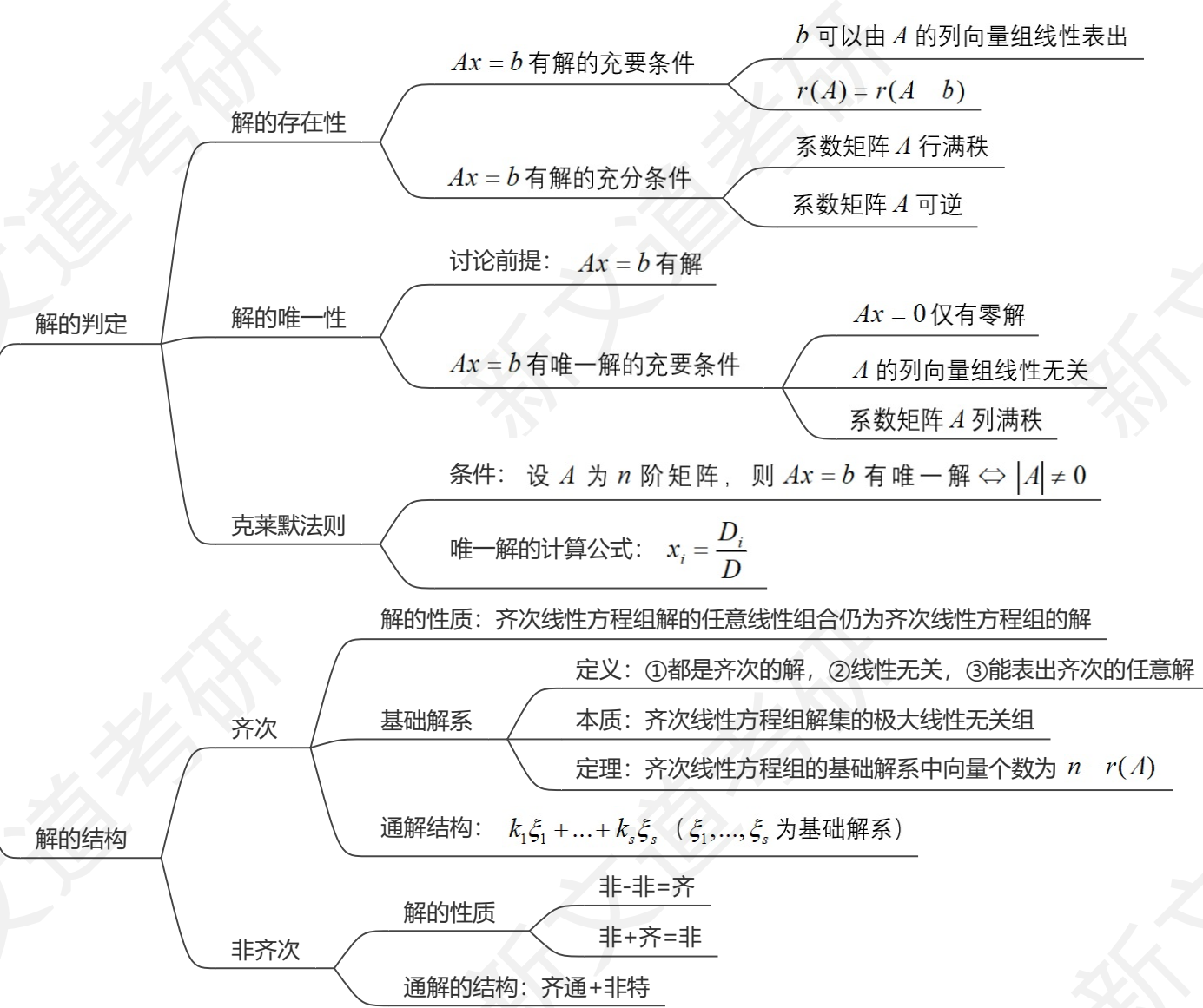
常用公式



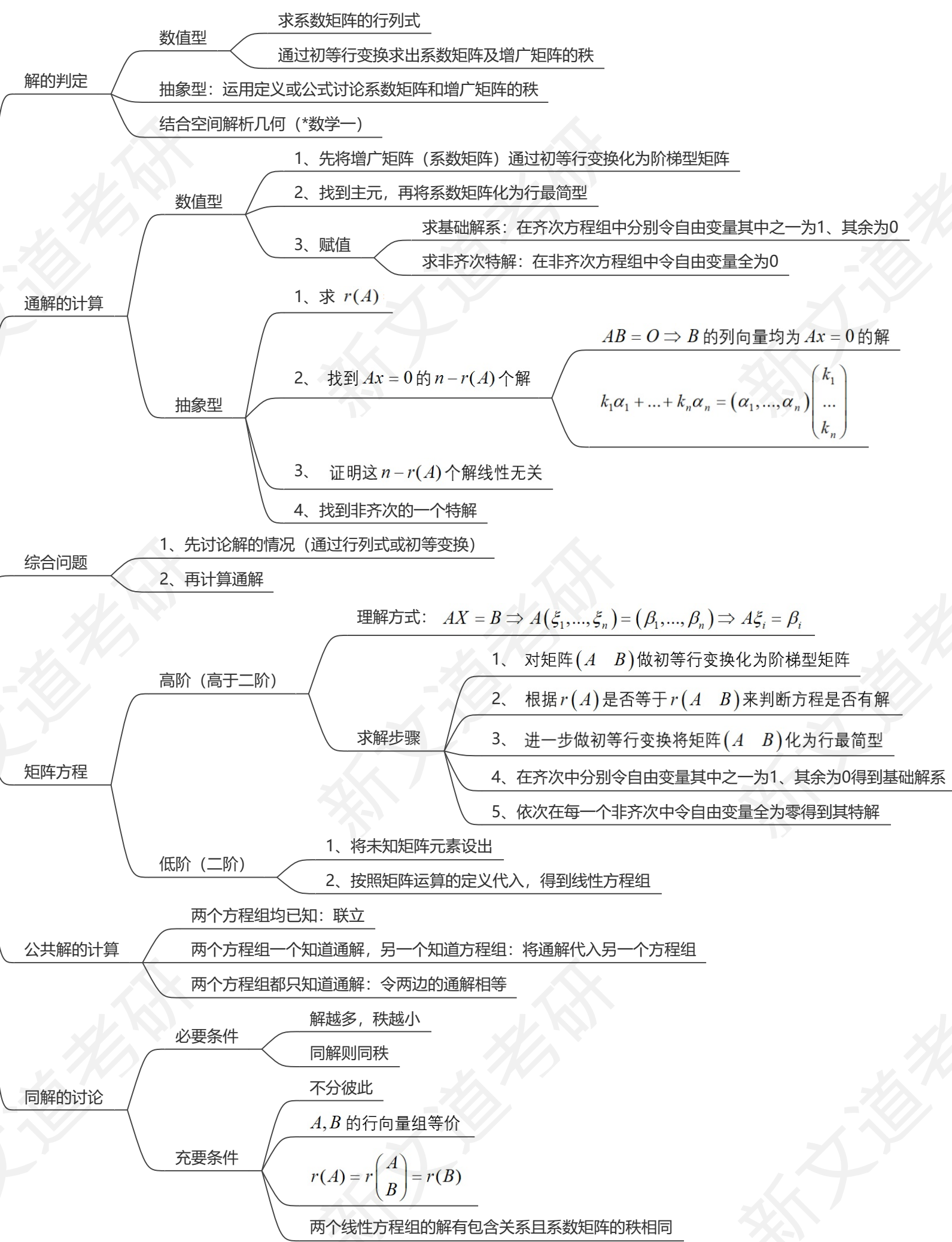


线性方程组

基础知识



常考题型



特征值与特征向量

基础知识

定义： $A\alpha = \lambda\alpha$ ($\alpha \neq 0$)

特征向量的性质

- 同一特征值：同一特征值的特征向量的非零线性组合仍为该特征值的特征向量
- 不同特征值
 - 不同特征值的特征向量线性无关
 - 不同特征值的特征向量之和不为特征向量

各类矩阵的特征值与特征向量

- 特征值变特征向量不变
 - $f(A)$ $f(\lambda)$
 - A^{-1} λ^{-1}
 - A^* $|A|\lambda^{-1}$
 - $A+kE$ $\lambda+k$
- 特征向量变特征值不变
 - $P^{-1}AP$ $P^{-1}\alpha$
 - A^T ?

特征值的常用性质

- $f(A) = 0 \Rightarrow f(\lambda) = 0$
- $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|$
- $\sum_{i=1}^n \lambda_i = tr(A)$

特征值的重数

- 矩阵的k重特征值至多有k个线性无关的特征向量
- 特征根的重数 $\geq n - r(A - \lambda E)$
- $r(A) = 1$, 则A的特征值为 $0, 0, \dots, 0$ $traA$

常考题型

特征值的计算

数值型

- 用定义： $|\lambda E - A| = 0$
- 秩为1的矩阵
 - $0, 0, \dots, 0, tr(A)$
 - $\lambda^{n-1}(\lambda - \sum_{i=1}^n a_{ii}) = 0$

抽象型

- 用定义及其变形
 - $|\lambda E - A| = 0$
 - 已有等式的重新组合：
 $A\alpha = \beta, A\beta = \alpha$ 则 $A(\alpha + \beta) = \beta + \alpha, A(\alpha - \beta) = \beta - \alpha$
 - $A\alpha = \lambda\alpha$ ($\alpha \neq 0$)
 - 矩阵乘法： $A\beta = \beta$
 - 向量的内积与正交
- 用性质
 - $f(A)$ $f(\lambda)$
 - $f(A) = 0 \Rightarrow f(\lambda) = 0$
 - $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|$
 - $\sum_{i=1}^n \lambda_i = tr(A)$
- 用相似

特征向量的计算

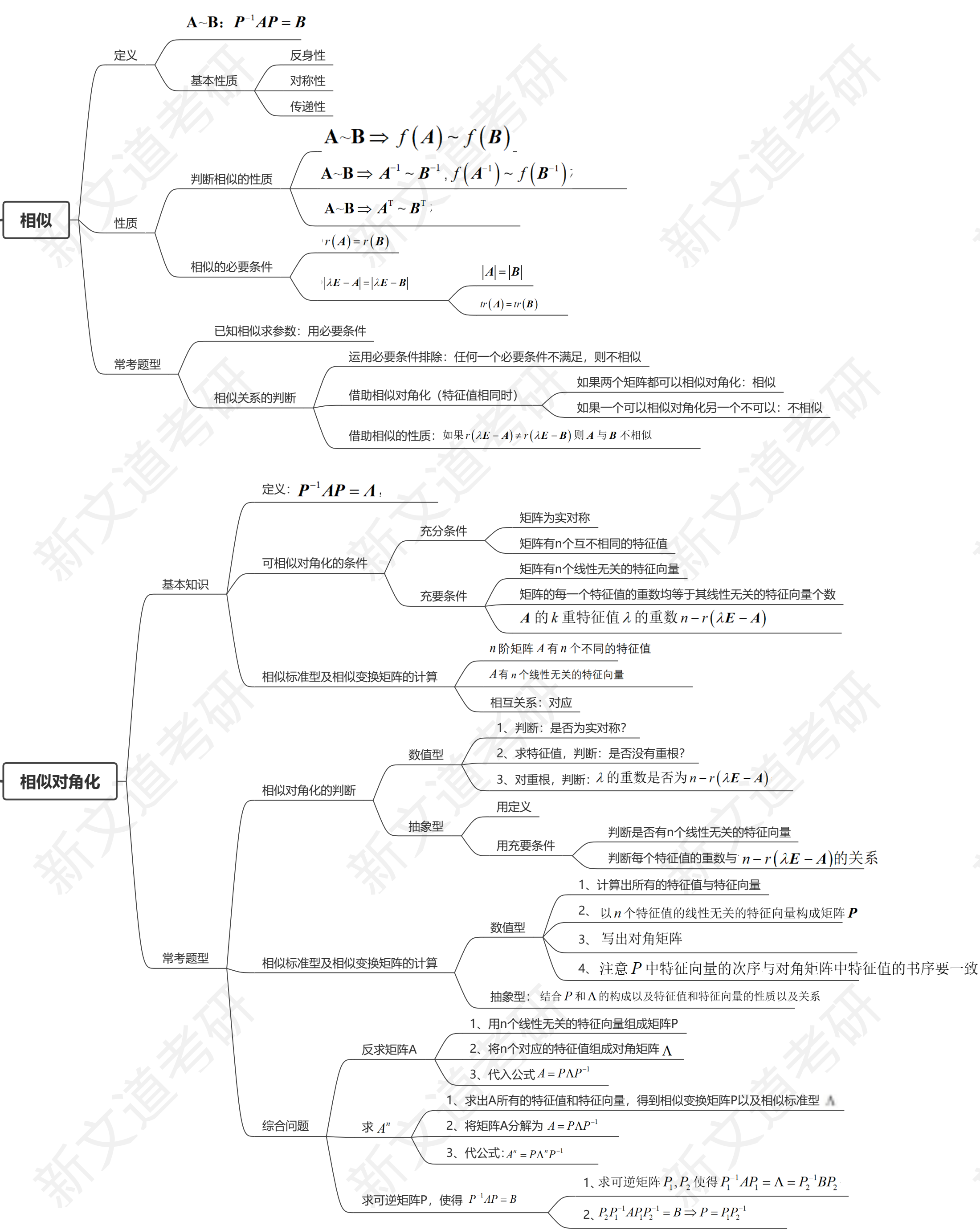
数值型

- $(\lambda E - A)x = 0$ 的非零解
- 代定义： $A\alpha = \lambda\alpha$ ($\alpha \neq 0$)

抽象型

- 用定义及其变形
 - 已有等式的重新组合：
 $A\alpha = \beta, A\beta = \alpha$ 则 $A(\alpha + \beta) = \beta + \alpha, A(\alpha - \beta) = \beta - \alpha$
 - 矩阵乘法： $A\beta = \beta$
 - 向量的内积与正交
- 用性质
 - $f(A)$ $f(\lambda)$
 - 特征向量不变的矩阵
 - A^{-1} λ^{-1}
 - A^* $|A|\lambda^{-1}$
 - $A+kE$ $\lambda+k$
- 用相似
 - 实对称矩阵：不同特征值的特征向量正交

相似与相似对角化



实对称矩阵与二次型

实对称矩阵



二次型

