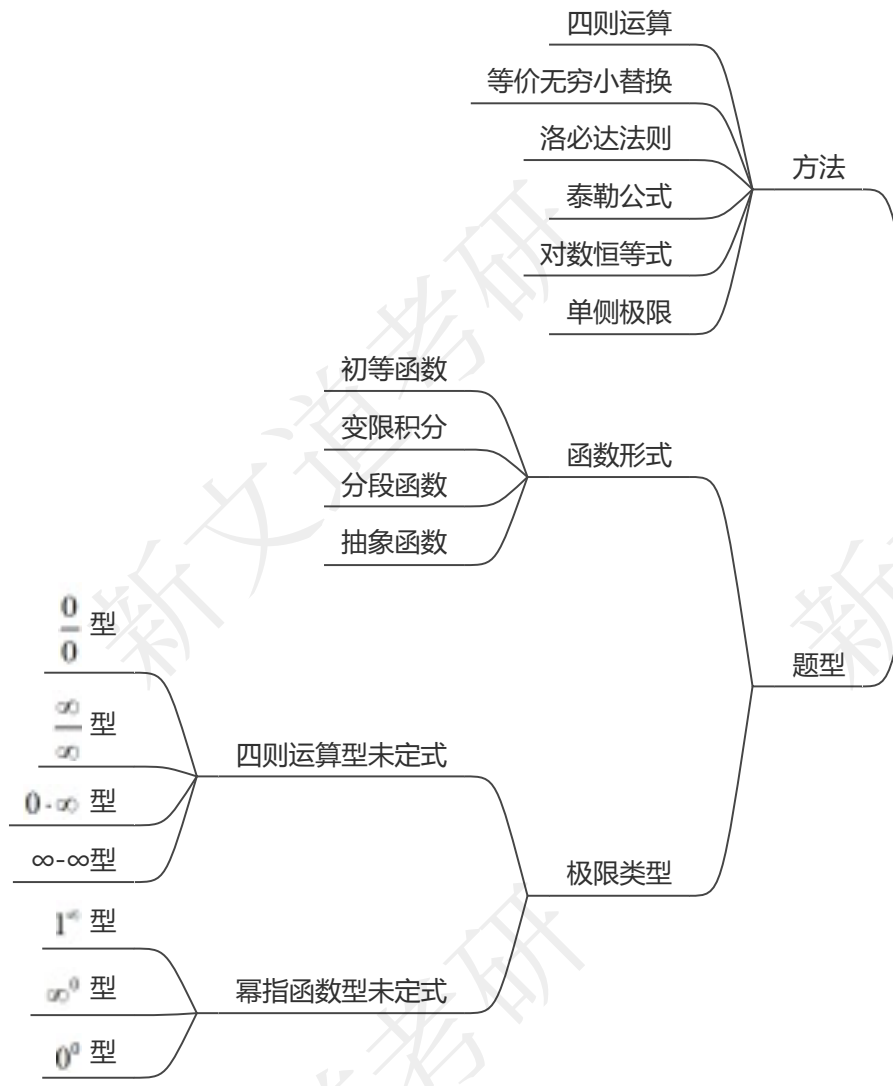
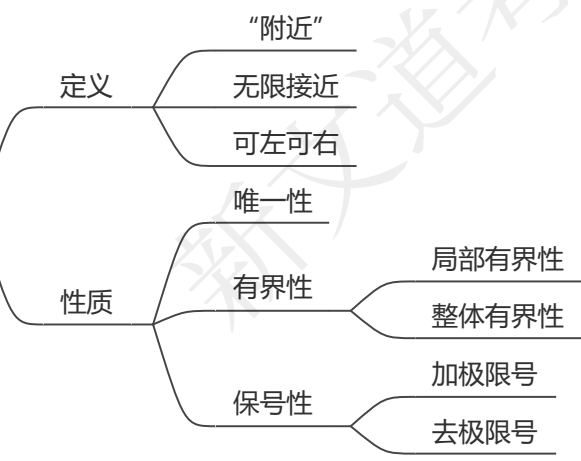


极限

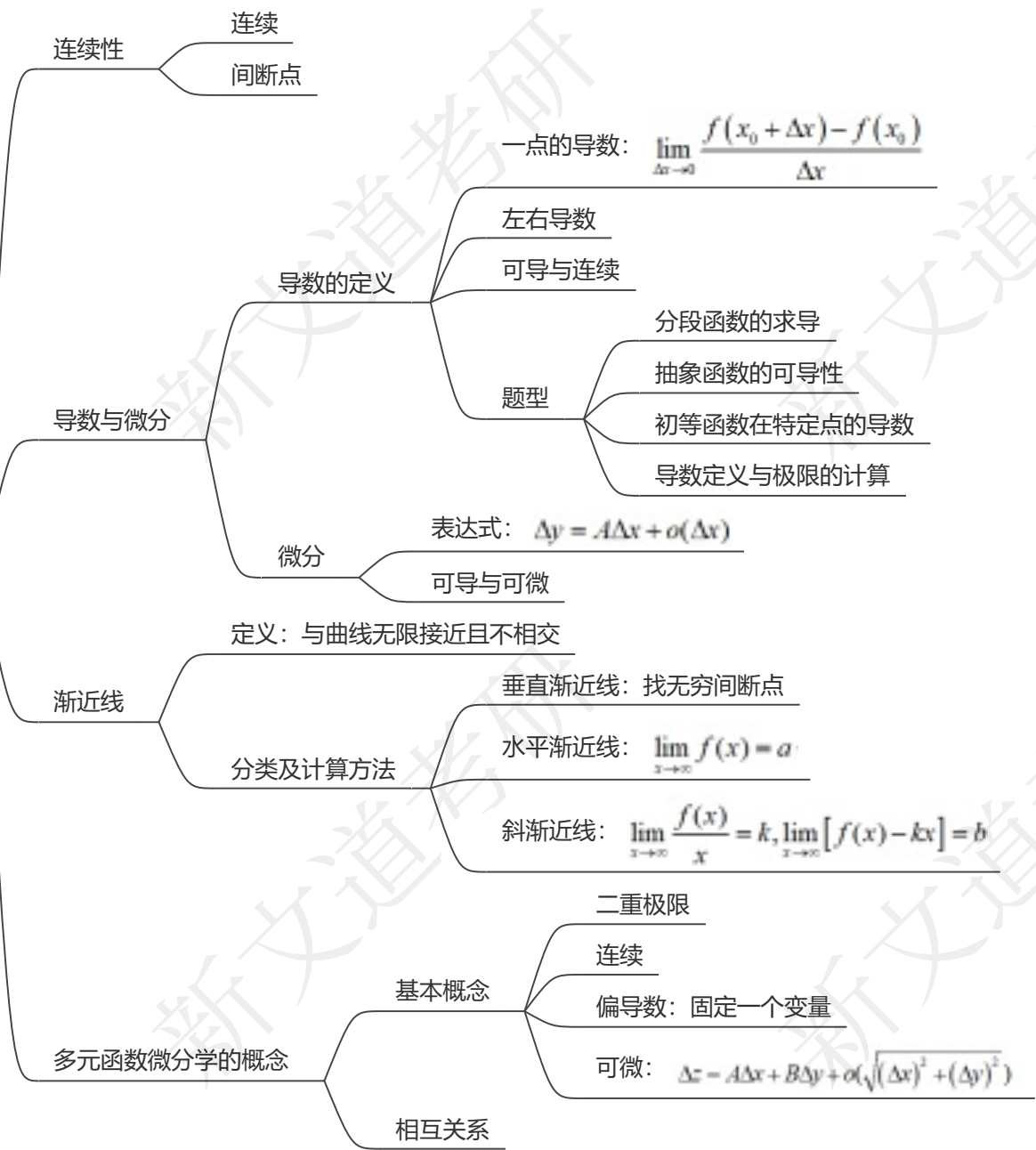
函数极限的计算



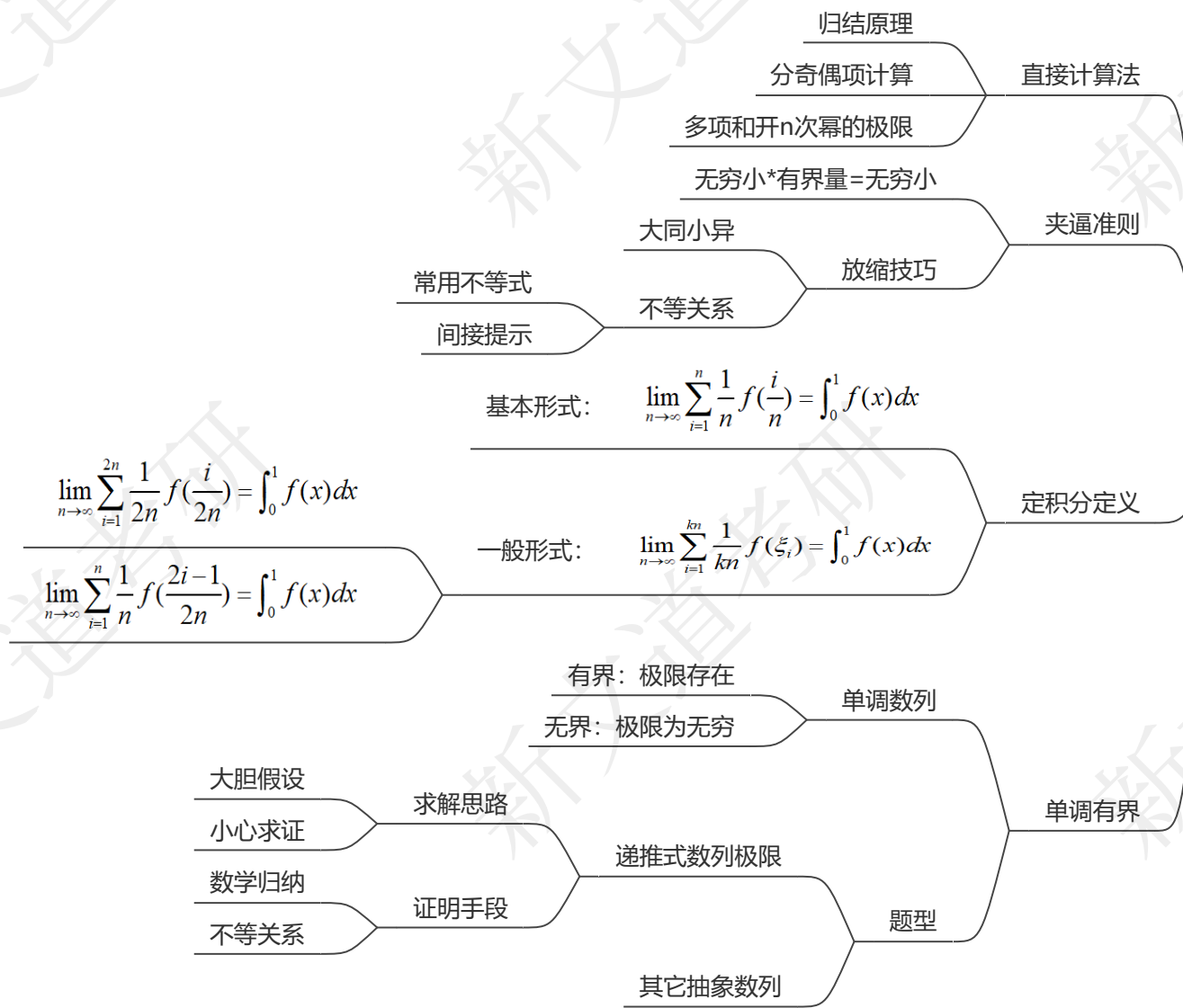
概念与性质



极限的应用

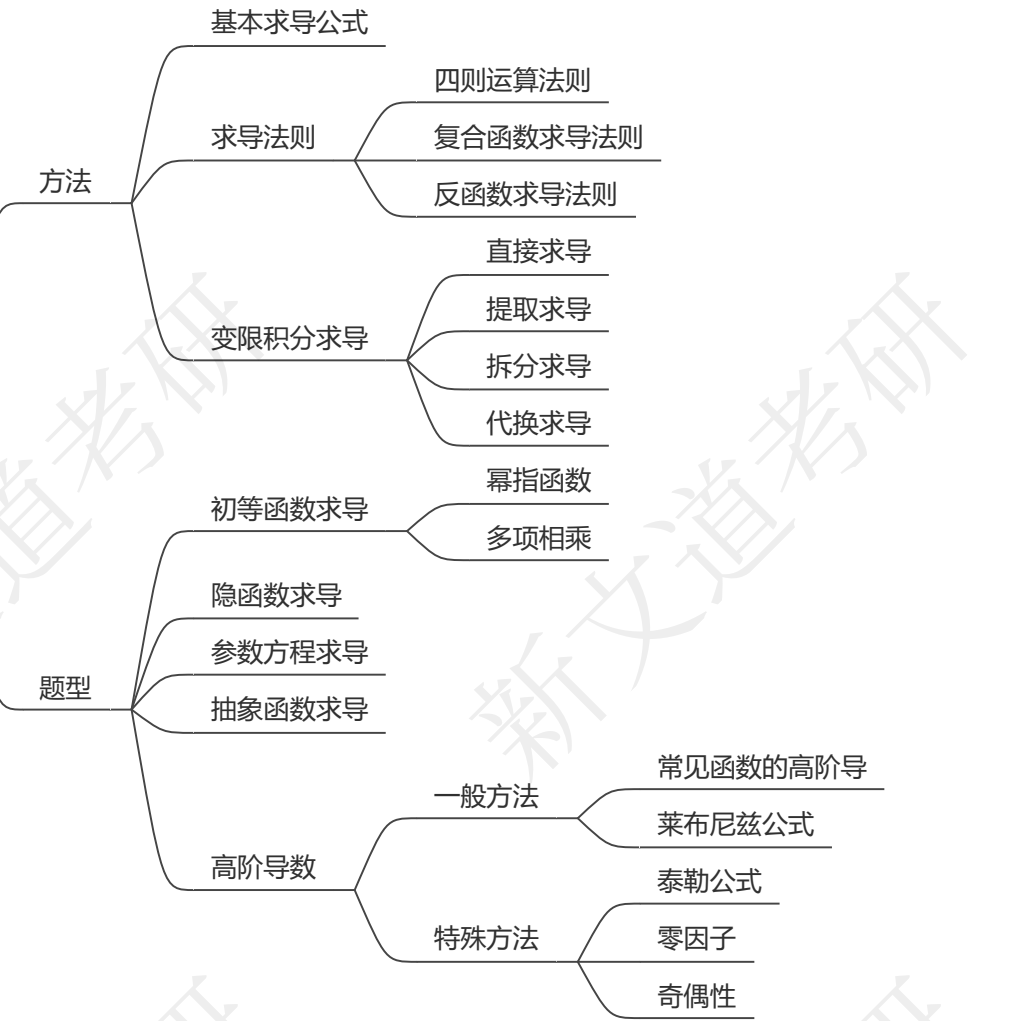


数列极限的计算

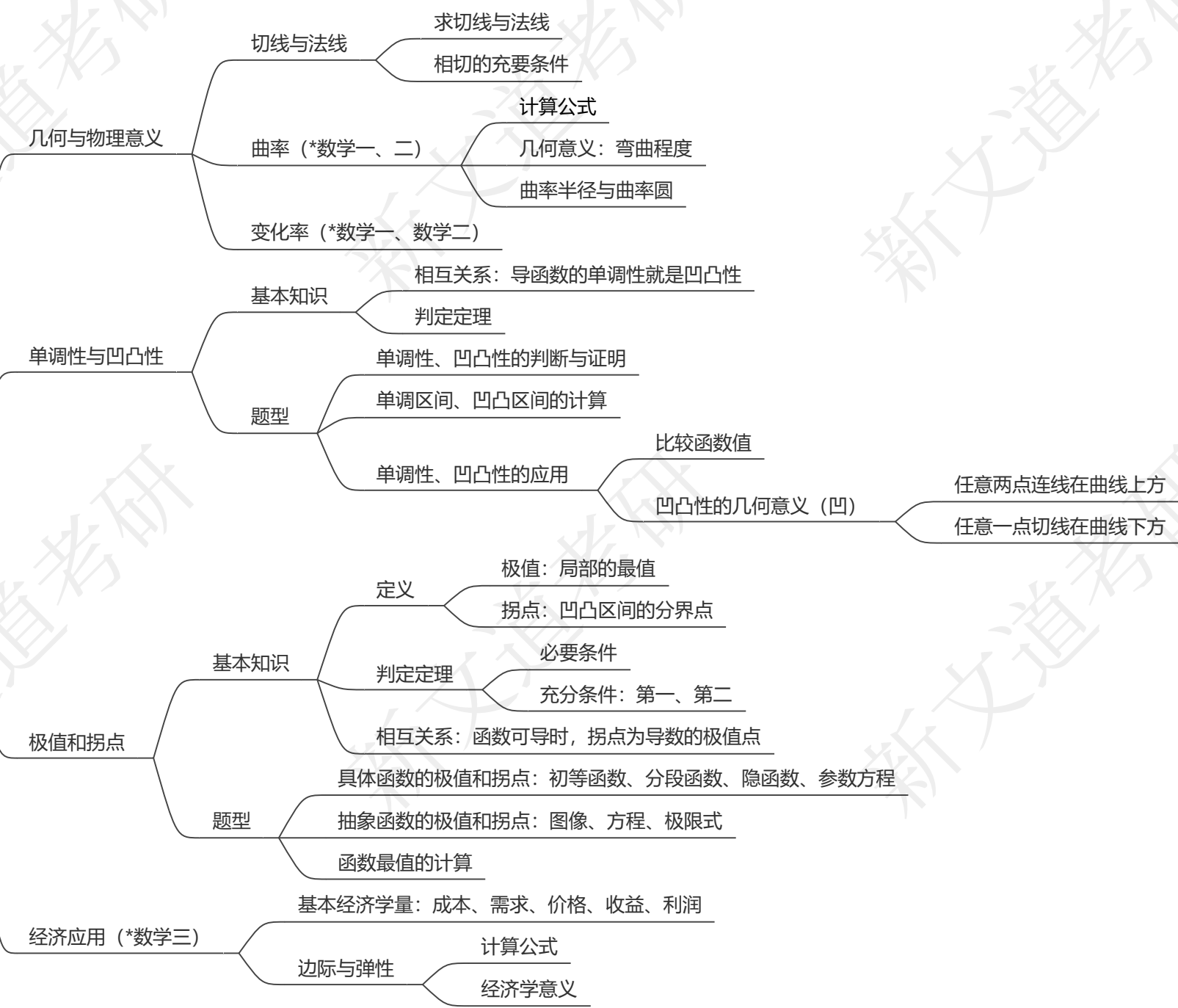


一元函数微分学

导数的计算

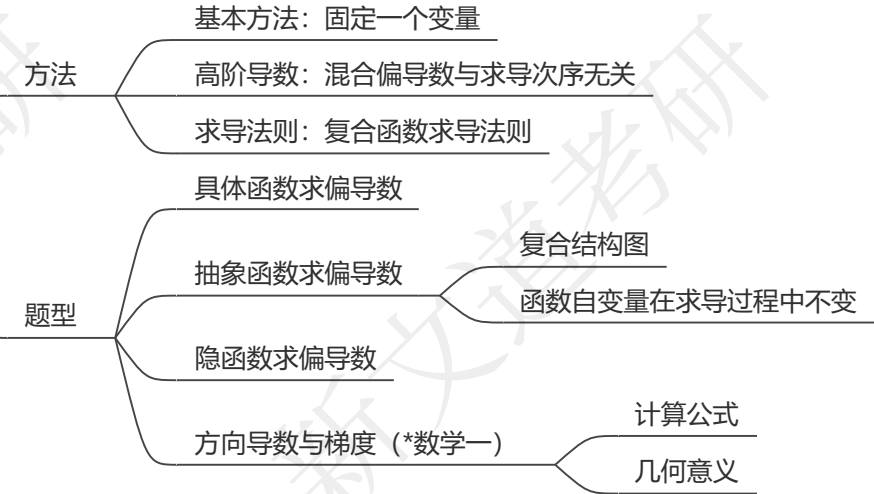


导数的应用



多元函数微分学

计算

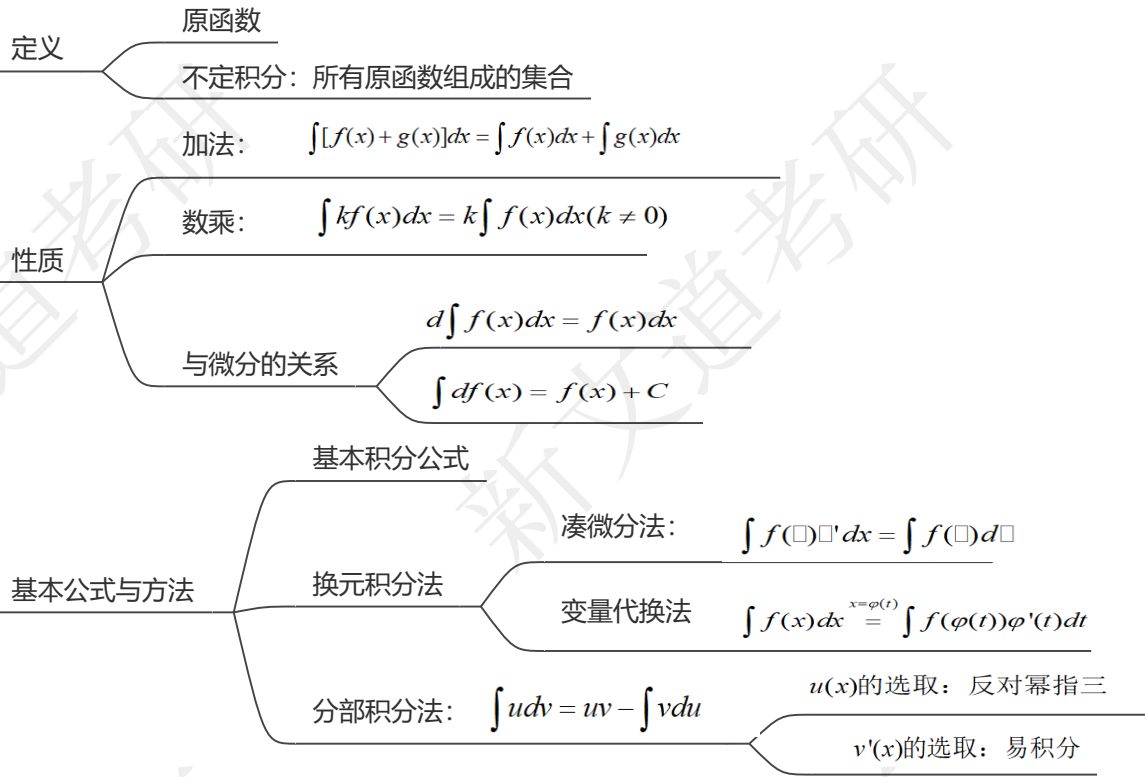


应用

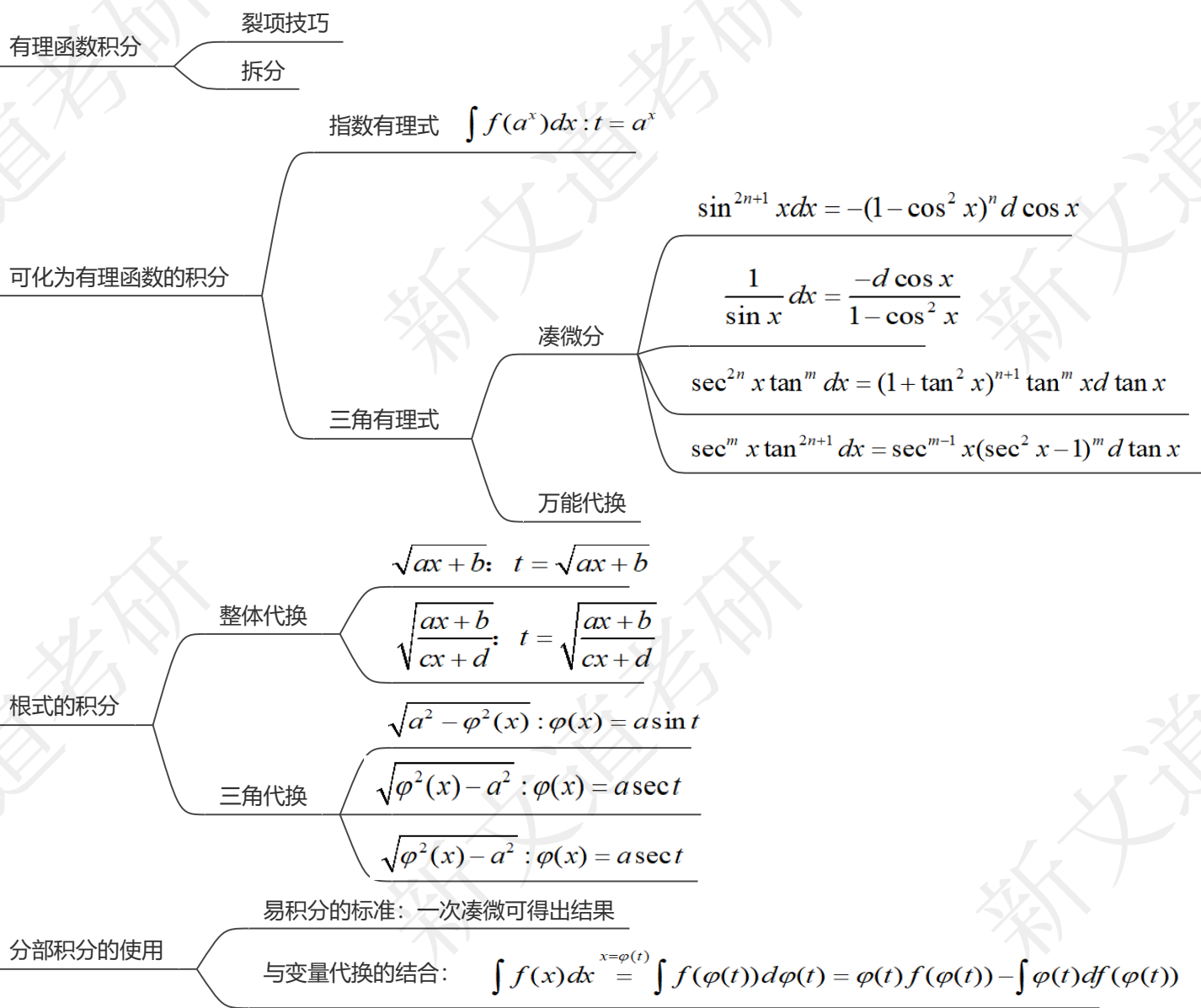


不定积分

基本知识

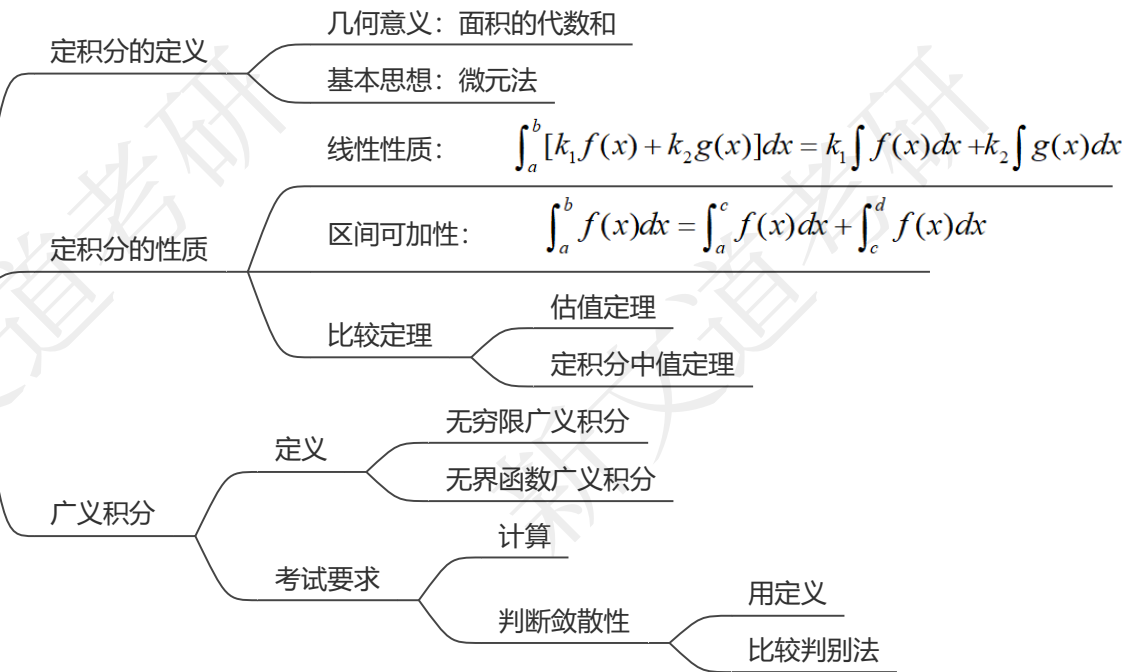


基本题型

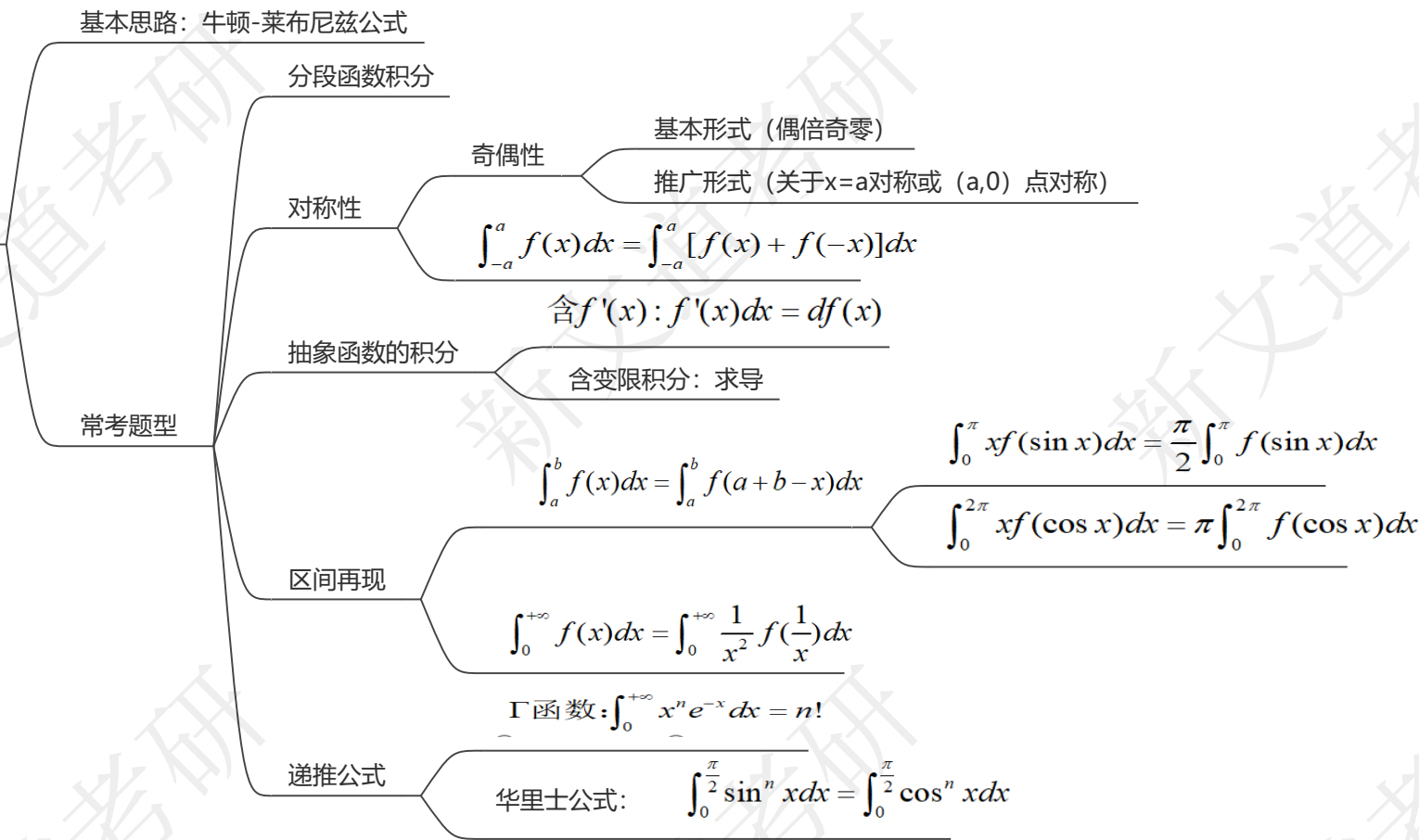


定积分

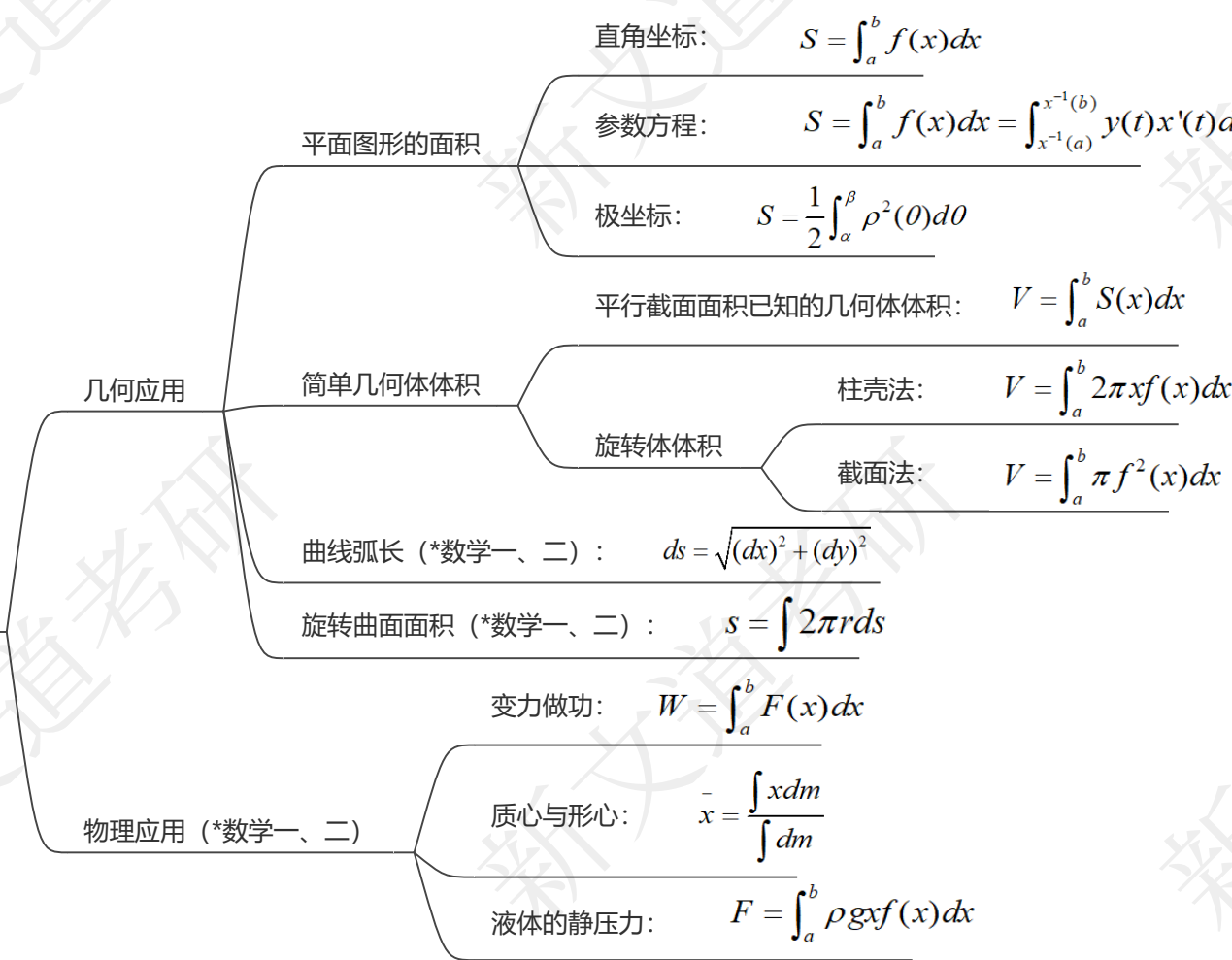
概念与性质



定积分的计算



定积分的应用



二重积分

概念与性质

- 定义
 - 几何意义：体积的代数和
 - 思想：微元法
- 性质
 - 线性性质：
$$\iint_D [k_1 f(x, y) + k_2 g(x, y)] d\sigma = k_1 \iint_D f(x, y) d\sigma + k_2 \iint_D g(x, y) d\sigma$$
 - 可加性：
$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x, y) dxdy = \iint_{D_1} f(x, y) dxdy + \iint_{D_2} f(x, y) dxdy, (D_1 \cap D_2 = \emptyset)$$
 - 比较定理
 - 估值定理
 - 二重积分中值定理

计算方法

- 直角坐标
 - 核心考点
 - 定限方法
 - 积分次序的选择
 - 看区域：便于定限
 - 看函数：让第一步简单
 - 考查方式
 - 求二重积分
 - 交换积分次序
- 极坐标
 - 核心考点
 - 转换公式：
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, dxdy = r dr d\theta$$
 - 适用范围
 - 区域：含圆或其它极坐标曲线
 - 函数：含 $x^2 + y^2$
 - 定限方法
 - 考查方式
 - 求二重积分
 - 坐标系的转换
- 对称性
 - 奇偶性（偶倍奇零）
 - 轮换对称性
 - 对区域
 - 对函数

微分方程与差分方程

方程的求解

微分方程

一阶方程

可分离变量的微分方程

标准形式: $y' = f(x)g(y)$

识别要点: 变量可分离

求解步骤: 先分离变量, 再积分

齐次方程

标准形式: $y' = f(\frac{y}{x})$

识别要点: 齐次 (每项的总次数都相同)

求解步骤: 令 $u = \frac{y}{x}$, 化为可分离变量的微分方程

一阶线性微分方程

标准形式: $y' + P(x)y = Q(x)$

识别要点: 线性 (关于y和y'都是一次的)

配凑法: 将等式左边凑成 $u(x)$ 的导数

公式法: $y = e^{-\int P(x)dx} (\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C)$

伯努利方程 (*数学一)

标准形式: $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ 或 $y^{n-1}y' + P(x)y^n = Q(x)$

求解步骤: 化为 $y^{n-1}y' + P(x)y^n = Q(x)$ 再令 $u = y^n$

全微分方程 (*数学一)

标准形式: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 (\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x})$

- 求解步骤
- 1、 求出二元函数 $u(x, y)$ 使得 $du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$
 - 2、 写出通解 $u(x, y) = C$

高阶方程

可降阶的高阶微分方程 (*数学一、数学二)

缺y型: 令 $y' = p, y'' = p'$

缺x型: $y' = p, y'' = p \frac{dp}{dy}$

线性微分方程

解的结构

齐次

解的任意线性组合仍为解

二阶通解: $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$

非齐次

叠加原理

齐+非=非

非-非=齐

通解: 齐通+非特

常系数方程的求解

齐次

特征根: $r_1(k重) \rightarrow e^{r_1x}, ..., x^{k-1}e^{r_1x}$

特征根: $\alpha \pm \beta i \rightarrow e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$

非齐次特解的设法

与自由项同类型且项数补齐

与齐次的解对比

sin, cos成对设

欧拉方程 (*数学一)

标准形式: $x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$

求解方法: 令 $x = e^t$, 化为常系数线性微分方程

积分方程

基本思路: 求导消去积分号, 化为微分方程

需关注的细节

可导性的说明

初始条件

差分方程

基本概念: $\Delta y_t = y_{t+1} - y_t = f(t+1) - f(t)$

一阶常系数线性差分方程

标准形式: $y_{t+1} - ay_t = f(t)$

通解结构: $y = C a^t + y^*(t)$

$y^*(t)$ 的设法

与自由项同类型且项数补齐

与齐次的解对比

方程的应用

运用极限或导数的定义列方程

求导公式

切线与法线

曲率 (*数学一、数学二)

边际与弹性 (*数学三)

微分的定义

运用积分学的知识列方程

曲边梯形的面积

旋转体的体积

弧长 (*数学一、数学二)

旋转曲面面积 (*数学一、数学二)

运用物理规律列方程 (*数学一、数学二)

变化率

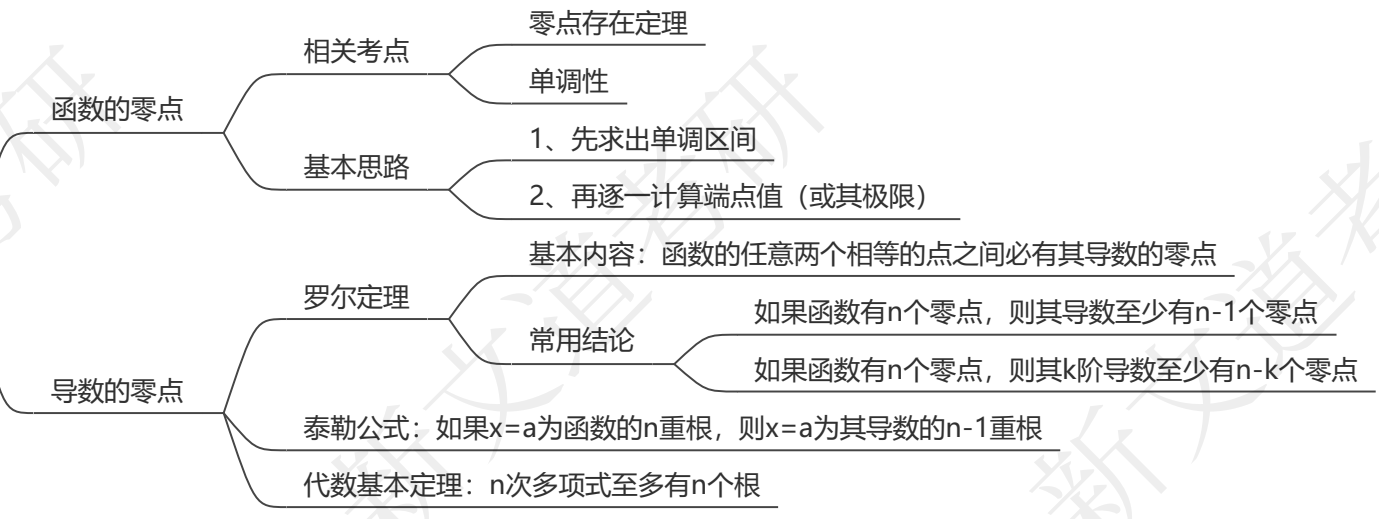
牛顿第二运动定律

做功

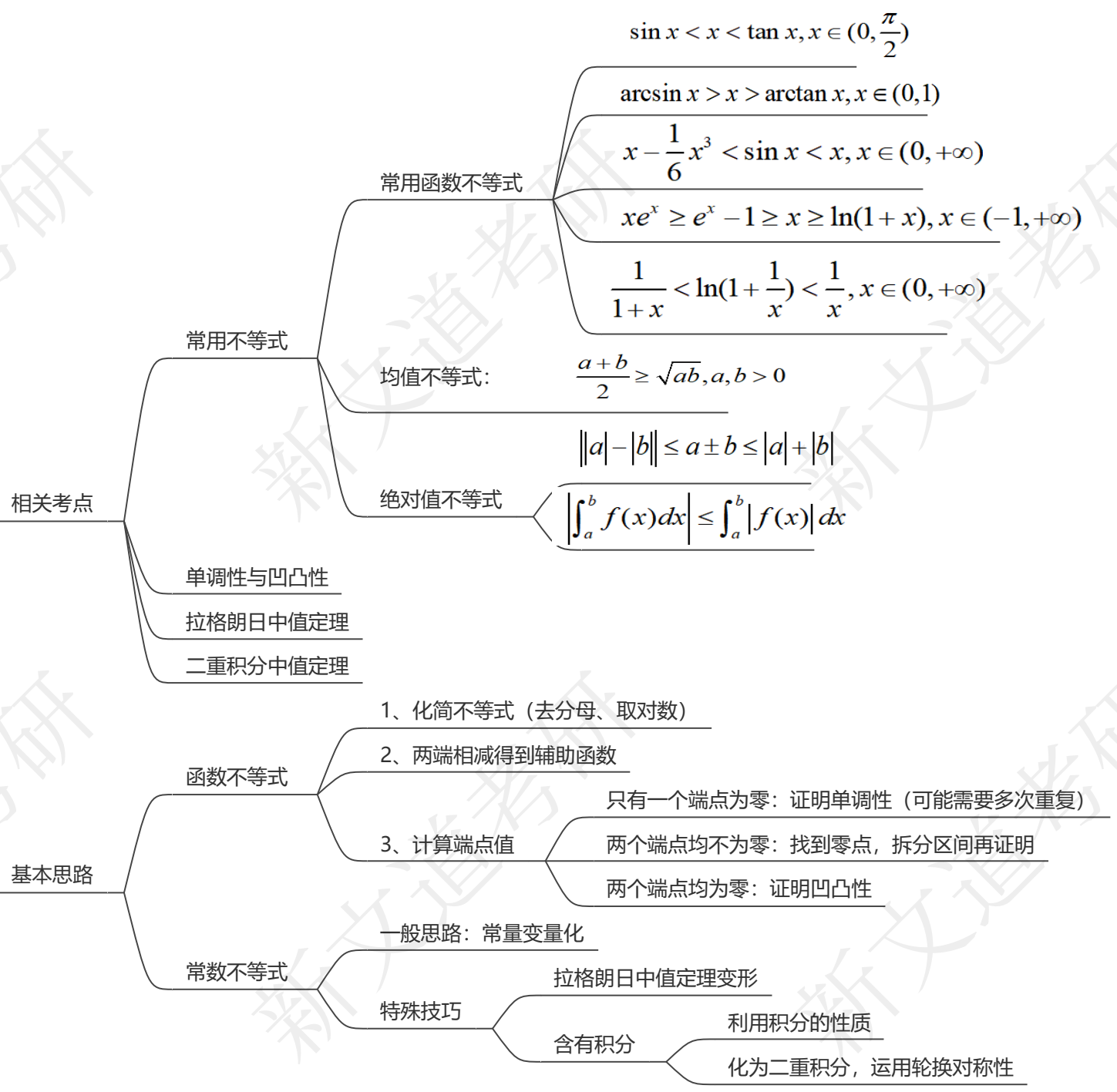
质心与形心

证明题

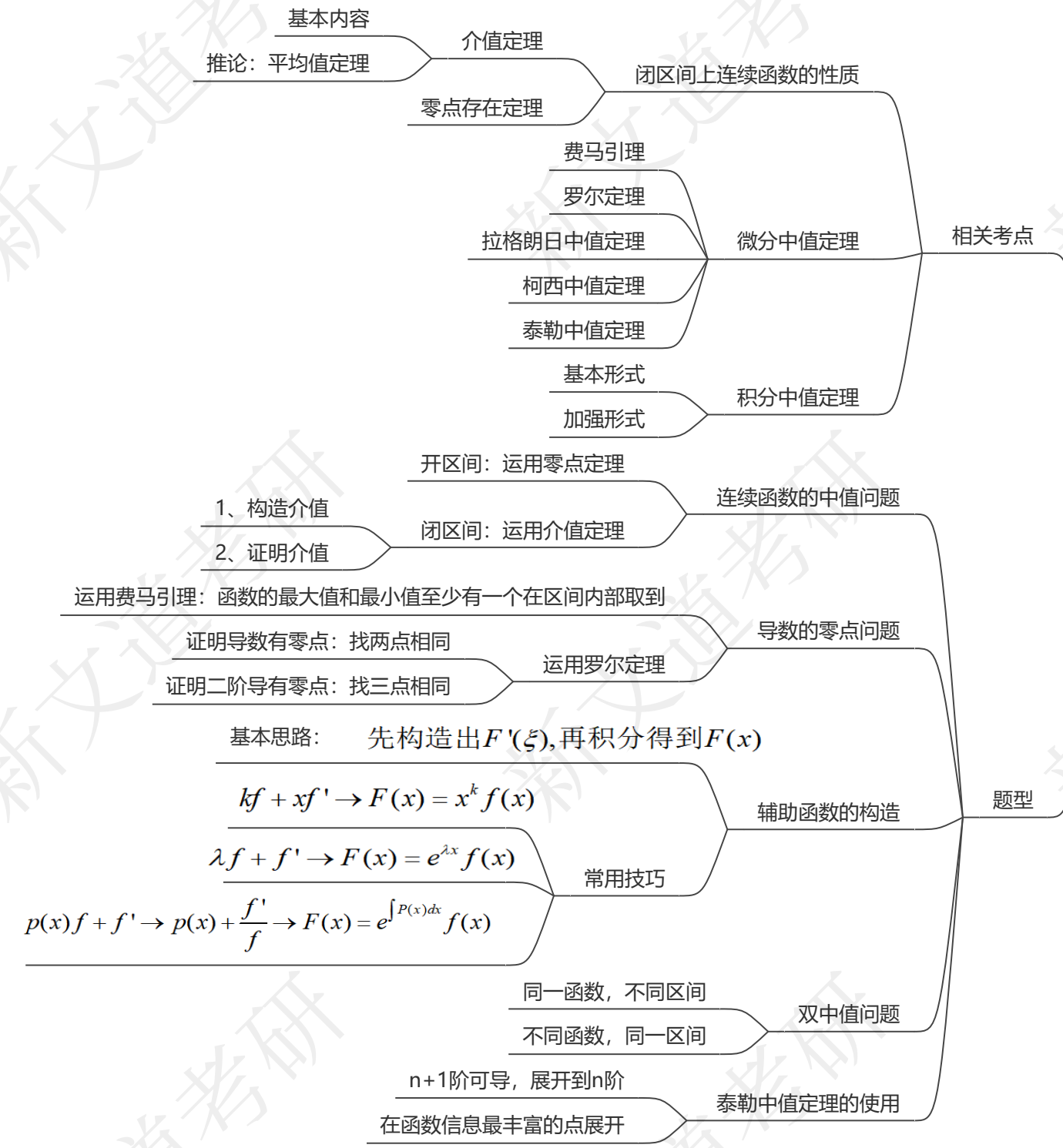
零点问题



不等式



中值定理



常数项级数

基本概念

基本性质

判别法

基本概念: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 其中 $u_n \geq 0$, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数

充要条件: 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界

两个比较标尺

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln^q n} \begin{cases} p > 1, \text{收敛} \\ p < 1, \text{发散} \\ p = 1, q > 1, \text{收敛} \\ p = 1, q \leq 1, \text{发散} \end{cases}$$

$$\text{几何级数: } \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \begin{cases} \text{收敛, } |q| < 1 \\ \text{发散, } |q| \geq 1 \end{cases}$$

正项级数判别法

比较判别法

比大小: 大收 $\Rightarrow$ 小收

常用结论

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \text{ 均收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 \text{ 均收敛}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \text{ 收敛}$$

使用关键

确保正项

不等关系识别

比阶数: 同阶 $\Rightarrow$ 同敛散

常用结论

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n \text{ 存在, 且 } p > 1, \text{ 则 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n \neq 0, \text{ 且 } p \leq 1, \text{ 则 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 发散}$$

使用关键: 确保收敛的级数绝对收敛

比阶数: 低收 $\Rightarrow$ 高收

常用结论

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{k+p} \text{ 收敛}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 绝对收敛, } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ 收敛}$$

使用关键

识别乘法

确保低阶绝对收敛

比值与根值

比值判别法

基本内容: 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

$$l < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛}$$

$$l > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 发散}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 发散}$$

$$-1 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛}$$

使用关键

出现阶乘时使用

确保正项

根值判别法

基本内容: 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

$$\rho < 1 \text{ 时, } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛}$$

$$\text{当 } \rho > 1 \text{ 或 } \infty \text{ 时, } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散}$$

使用关键

出现n次幂时使用

确保正项

一般项级数判别法

基本概念

一般项级数: 正项和负项都有无穷多项的级数

绝对收敛与条件收敛

绝对收敛: $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛

条件收敛: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 不收敛

相互关系

绝对收敛必收敛

绝对收敛与条件收敛无交集

收敛的级数要么绝对收敛要么条件收敛

判断步骤

- 1、先加绝对值判断是否绝对收敛
- 2、如果非绝对收敛再判断级数本身是否收敛

莱布尼兹判别法

若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 满足

1、 $u_n > u_{n+1}$

2、 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n \text{ 收敛}$$

背景: 无穷多个数求和

1、先求部分和 $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$

2、再求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

若存在, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

若不存在, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

常用结论: 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 收敛

基本内容

收敛+收敛=收敛

收敛+发散=发散

发散+发散=?

加法

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 绝对收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) \text{ 收敛}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 条件收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) \text{ 发散}$$

常用结论

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 发散, } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \text{ 均发散}$$

数乘: 乘以非零常数不影响级数的敛散性

基本内容: 级数去掉有限项敛散性不变

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+p} \text{ 收敛}$$

改变有限项

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 绝对收敛} \Rightarrow \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n \text{ 收敛}$$

常用结论

基本内容: 收敛的级数任意加括号仍收敛

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n+1} + a_{2n}) \text{ 收敛}$$

加括号

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n}) \text{ 收敛}$$

常用结论

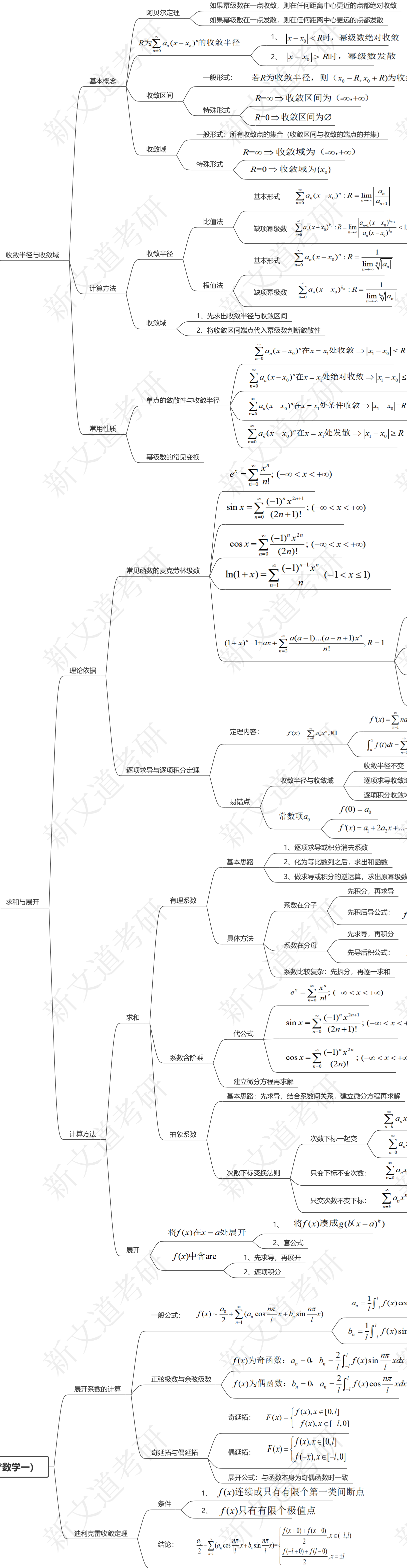
基本内容: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

必要条件

常用结论: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 不存在或存在但不为0, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

函数项级数

幂级数



傅里叶级数 (*数学一)

三重积分

概念与性质

- 定义
 - 物理意义：三维物体质量的代数和
 - 思想：微元法
- 线性性质：
$$\iiint_{\Omega} [k_1 f(x, y, z) + k_2 g(x, y, z)] dv = k_1 \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv + k_2 \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dv$$
- 性质
 - 可加性：
$$\iiint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv + \iiint_{\Omega_2} f(x, y, z) dv (\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset)$$
 - 比较定理
 - 估值定理
 - 三重积分中值定理

计算方法

- 直角坐标
 - 先一后二
 - 以先对z积分为例
 - 1、画一条和z轴平行的直线穿过区域，找出相交的部分
 - 2、相交部分上交点和下交点的z值分别为第一步积分的上限和下限
 - 3、将区域在xoy平面内投影，投影区域即为第二步二重积分的积分区域
 - 先二后一
 - 适用范围
 - 被积函数只含一个变量（先对另外两个变量积分）
 - 先一后二定限不方便，但平行于坐标平面的截面比较好找
 - 计算步骤
 - 以先对x, y积分为例
 - 1、画一个和xoy平面平行且和积分区域相交的平面
 - 2、所得截面为 D_z ，计算 D_z 上的二重积分 $\iint_{D_z} f(x, y, z) d\sigma$
 - 3、将平面上下移动，使之和积分区域有交点的z的范围就是第二步积分的积分区间
- 球面坐标
 - 转换公式：
$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, dv = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$$
 - 适用范围
 - 区域：含球面或以原点为顶点的锥面
 - 函数：含 $x^2 + y^2 + z^2$ 或形如 $f(z), f(x^2 + y^2)$
 - 定限方法
 - 1、从原点出发画一条穿过积分区域的射线，找出相交的部分
 - 2、相交部分到原点距离的范围即为r的积分区间
 - 3、转动射线，找到射线和积分区域有交点的 φ 和 θ 的范围，得到对应的积分区间
- 对称性
 - 奇偶性
 - 使用条件：当积分区域关于某一坐标平面对称时，可对另一变量讨论奇偶性
 - 使用规则：偶倍奇零
 - 轮换对称性
 - 公式内容：若积分区域关于 $y = x$ 对称，则有 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega} f(y, x, z) dv$
 - 使用技巧
 - 区域识别：如果在积分区域方程中交换x,y，方程不变，则积分区域关于y=x对称
 - 常用结论：若 Ω 关于 $y = x, y = z, z = x$ 对称，则
$$\iiint_{\Omega} f(x) dv = \iiint_{\Omega} f(y) dv = \iiint_{\Omega} f(z) dv = \iiint_{\Omega} \frac{f(x) + f(y) + f(z)}{3} dv$$

第一类曲线积分

概念和性质

物理意义：曲线型物体质量的代数和

线性性质：
$$\int_L [k_1 f(x, y, z) + k_2 g(x, y, z)] ds = k_1 \int_L f(x, y, z) ds + k_2 \int_L g(x, y, z) ds$$

性质

可加性：
$$\int_{L_1 \cup L_2} f(x, y, z) ds = \int_{L_1} f(x, y, z) ds + \int_{L_2} f(x, y, z) ds, (L_1 \cap L_2 = \emptyset)$$

比较定理

估值定理

第一类曲线积分中值定理

计算方法

化为定积分

代入

1、曲线方程代入积分式

2、
$$ds = \begin{cases} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}, \text{三维} \\ \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}, \text{二维} \end{cases}$$

定限：从小到大

对称性

奇偶性：偶倍奇零

公式内容：如果积分曲线关于 $y = x$ 对称，则有
$$\int_L f(x, y, z) ds = \int_L f(y, x, z) ds$$

轮换对称性

区域识别：如果在积分曲线方程中交换 x, y ，方程不变，则积分区域关于 $y = x$ 对称

使用技巧

当 L 关于 $x = y, y = z, z = x$ 均对称，则

常用结论：
$$\int_L f(x) ds = \int_L f(y) ds = \int_L f(z) ds = \int_L \frac{f(x) + f(y) + f(z)}{3} ds$$

第一类曲面积分

概念和性质

物理意义：曲面型物体质量的代数和

线性性质：
$$\iint_{\Sigma} [k_1 f(x, y, z) + k_2 g(x, y, z)] dS = k_1 \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS + k_2 \iint_{\Sigma} g(x, y, z) dS$$

可加性：
$$\iint_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS, (\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset)$$

比较定理

估值定理

第一类曲线积分中值定理

计算方法

化为二重积分

1、先将曲面化为关于一个变量的单值函数（以 $z = z(x, y), (x, y) \in D$ 为例）

(1) 将 $z = z(x, y)$ 代入被积函数

设曲面的单位法向量为 $\mathbf{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$,

(2) 则
$$dS = \frac{dxdy}{|\cos \gamma|} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

3、投影：求积分曲面在xoy平面内的投影区域D,作为二重积分的积分区域

对称性

奇偶性：偶倍奇零

公式内容：如果积分曲面关于 $y = x$ 对称，则有
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma} f(y, x, z) dS$$

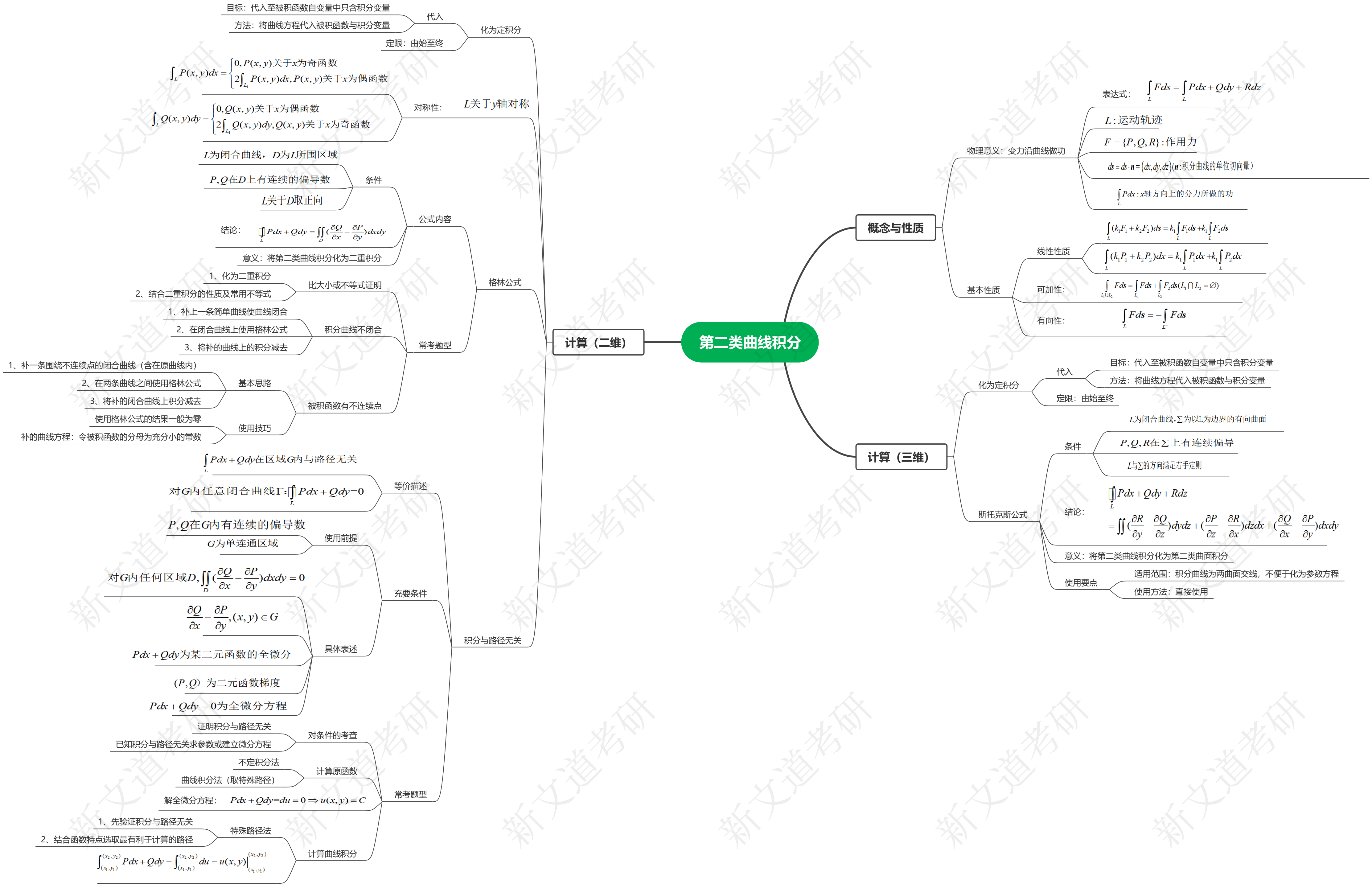
轮换对称性

区域识别：如果在积分曲面方程中交换x,y, 方程不变，则积分区域关于y=x对称

使用技巧

当 Σ 关于 $x = y, y = z, z = x$ 均对称，则

常用结论：
$$\iint_{\Sigma} f(x) dS = \iint_{\Sigma} f(y) dS = \iint_{\Sigma} f(z) dS = \iint_{\Sigma} \frac{f(x) + f(y) + f(z)}{3} dS$$



第二类曲面积分

概念与性质

物理意义：单位时间内穿过曲面的流体体积

表达式： $\iint_{\Sigma} \mathbf{v} d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy$

Σ ：有向曲面

$\mathbf{v} = \{P, Q, R\}$ ：速度

$d\mathbf{S} = dS \cdot \mathbf{n} = \{dydz, dzdx, dxdy\}$ ($\mathbf{n}$ ：积分曲线的单位切向量)

线性性质： $\iint_{\Sigma} (k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2) d\mathbf{S} = k_1 \iint_{\Sigma} \mathbf{v}_1 d\mathbf{S} + k_2 \iint_{\Sigma} \mathbf{v}_2 d\mathbf{S}$

$\iint_{\Sigma} (k_1 P_1 + k_2 P_2) dydz = k_1 \iint_{\Sigma} P_1 dydz + k_2 \iint_{\Sigma} P_2 dydz$

基本性质

可加性： $\iint_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} \mathbf{v} d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} d\mathbf{S} + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} d\mathbf{S} (\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset)$

有向性： $\iint_{\Sigma^-} \mathbf{v} d\mathbf{S} = -\iint_{\Sigma} \mathbf{v} d\mathbf{S}$

计算方法

化为二重积分

直接投影法 (以计算 $\iint_{\Sigma} R dxdy$ 为例)

1、代入

(1) 先将曲面化为z的单值函数： $z = z(x, y), (x, y \in D)$

(2) 将 $z = z(x, y)$ 代入被积函数

2、投影

(1) 求出曲面在xoy平面内的投影区域D，作为二重积分的积分区域

(2) 考虑曲面的侧

与z轴正方向成锐角，加正号

与z轴正方向成钝角，加负号

转换投影法

1、求出曲面的法向量 $\mathbf{n}$ (不一定要单位化)

2、根据 $d\mathbf{S}$ 平行于 $\mathbf{n}$ 找出 $dydz, dzdx, dxdy$ 之间的比例关系

3、将三个面积微元转化为同一个，再用直接投影法计算

对称性：当曲面 Σ 关于 xoy 平面对称

$\iint_{\Sigma} R dxdy = \begin{cases} 0, R \text{ 关于 } z \text{ 为偶} \\ 2 \iint_{\Sigma_1} R dxdy, R \text{ 关于 } z \text{ 为奇} \end{cases}$

$\iint_{\Sigma} P dydz = \begin{cases} 0, P \text{ 关于 } z \text{ 为奇} \\ 2 \iint_{\Sigma_1} P dydz, P \text{ 关于 } z \text{ 为偶} \end{cases}$

高斯公式

公式内容

条件

Σ 为闭合曲面， Ω 为 Σ 所围的区域

P, Q, R 在 Ω 内具有连续偏导数

Σ 关于 Ω 取外侧

结论： $\iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iiint_{\Omega} (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) dv$

意义：将第二类曲面积分化为三重积分

常考题型

积分曲面不闭合

1、补上一个简单曲面 (一般为平面) 使曲面闭合

2、在闭合曲面上使用高斯公式

3、将补的曲面上的积分减去

被积函数有不连续点

基本思路

1、补一条围绕不连续点的闭合曲面 (含在原曲面内)

2、在两个曲面之间使用高斯公式

3、将补的闭合曲面上积分减去

使用技巧

使用高斯公式的结果一般为零

补的曲面方程：令被积函数的分母为充分小的常数