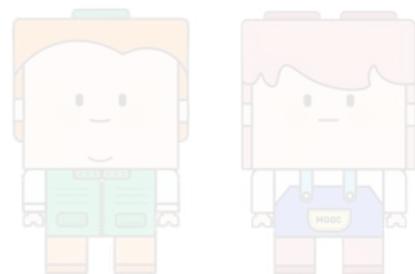


周周清 3.10-3.16

-by 可爱因子大橙子 可爱因子章鱼烧

1. (数一二三) 设 $k > 0$, 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan kx^2 + kx^2 f(x)}{x^6} = 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+f(x)}{x^4} = 1$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. (数一二三) 当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sin^n x + \cos^n x} = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. (数一二三) 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在, 且 $f(x) = x^2 + e^x \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. (数一二三) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{99}}{n^{100} - (n-1)^{100}} = \underline{\hspace{2cm}}$
5. (数一二三) 设 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在, 且有 $f(x) = e^{-2x} + x^{\frac{2}{1-x}} \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.
6. (数一二三) 设 $x_0 = 0, x_n = \frac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}} (n = 1, 2, 3, \dots)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\hspace{2cm}}$.
7. (数一二三) 设 3 阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 3 维列向量, 若 $|A| = \frac{1}{2}$, 则 $|\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1| = \underline{\hspace{2cm}}$.



周周清 3.10-3.16

-by 可爱因子大橙子 可爱因子章鱼烧

1. (数一二三) 设 $k > 0$, 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan kx^2 + kx^2 f(x)}{x^6} = 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+f(x)}{x^4} = 1$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

[知识点]: 泰勒公式在极限中的应用

[解析]: 答案: $k = \sqrt{3}$

考虑 $\arctan kx^2$ 的六阶泰勒公式, 有,

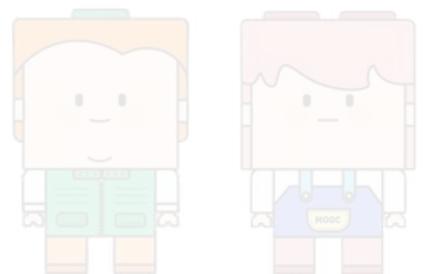
$$\arctan kx^2 = kx^2 - \frac{(kx^2)^3}{3} + o(x^6) = kx^2 - \frac{k^3 x^6}{3} + o(x^6)$$

代入到 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan kx^2 + kx^2 f(x)}{x^6} = 0$ 中可得,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan kx^2 + kx^2 f(x)}{x^6} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2 + kx^2 f(x) - \frac{k^3 x^6}{3} + o(x^6)}{x^6} \\ &= k \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+f(x)}{x^4} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{k^3 x^6}{3} + o(x^6)}{x^6} \\ &= k - \frac{k^3}{3} = 0 \end{aligned}$$

由于 $k > 0$, 故由 $k - \frac{k^3}{3} = 0$ 可得 $\frac{k^2}{3} = 1$, 即 $k^2 = 3$, 进一步可得 $k = \sqrt{3}$.

[易错点]: 本题需要通过给定的两个极限算出参数的值, 在极限的处理上泰勒公式是非常便捷的选择, 同学们要熟练掌握常见函数的泰勒展开。



2. (数一二三) 当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sin^n x + \cos^n x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

[知识点]: 数列极限

[解析]: 答案:
$$\begin{cases} \cos x, & x \in [0, \frac{\pi}{4}) \\ \sin x, & x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

由于当 $x \in [0, \frac{\pi}{4})$ 时, $\cos x > \sin x$; $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 时, $\sin x \geq \cos x$,

故
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sin^n x + \cos^n x} = \begin{cases} \cos x, & x \in [0, \frac{\pi}{4}) \\ \sin x, & x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

本题实际上涉及到一个常用结论:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}, \text{ 其中 } (a_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, k)$$

下面给出该结论的证明:

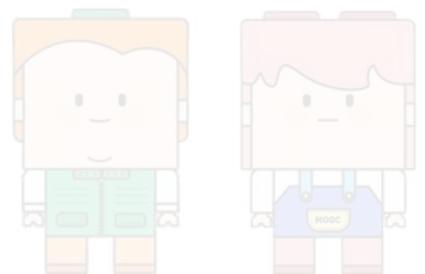
不妨设 $a = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$, 则有

$$a = \sqrt[n]{a^n} \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} \leq \sqrt[n]{ka^n} = k^{\frac{1}{n}} a$$

两边取极限, 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} k^{\frac{1}{n}} a = a$, 由夹逼准则可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = a$,

证毕!

[易错点]: 不熟悉一些常用结论导致无从下手。



3. (数一二三) 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在, 且 $f(x) = x^2 + e^x \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

[知识点]: 极限的计算

[解析]: 答案: $f(x) = x^2 + \frac{1}{1-e} e^x$

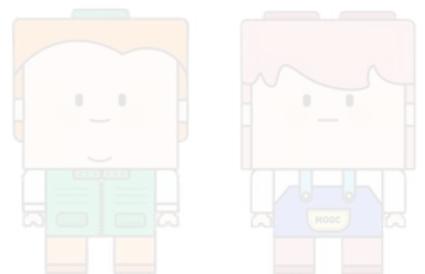
既然极限 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在, 那么它就是一个常数, 不妨记 $A = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$,

则方程可化为 $f(x) = x^2 + Ae^x$.

对方程两边取极限, 得到: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + Ae^x)$

也即 $A = 1 + A \lim_{x \rightarrow 1} e^x = 1 + Ae$, 解得 $A = \frac{1}{1-e}$, 故 $f(x) = x^2 + \frac{1}{1-e} e^x$.

[易错点]: 未能把极限当成一个已知常数进行计算从而陷入死胡同里。



4. (数一二三) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{99}}{n^{100} - (n-1)^{100}} = \underline{\hspace{2cm}}$

[知识点]: 数列极限

[解析]: 答案: $\frac{1}{100}$

分母属于指数相同的相减类型，通常可采用提出其中一项的做法，

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{99}}{n^{100} - (n-1)^{100}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{99}}{n^{100} \left[1 - \left(\frac{n-1}{n} \right)^{100} \right]} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \left[1 - \left(\frac{n-1}{n} \right)^{100} \right]} \end{aligned}$$

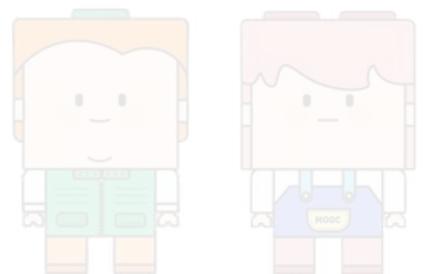
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{100}}$$

由于当 $\square \rightarrow 0$ 时， $(1+\square)^\alpha - 1 \sim \alpha \square$ ，对应此处的 $\square = -\frac{1}{n}$ ，有

$$= -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\left(1 - \frac{1}{n} \right)^{100} - 1}$$

$$= -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{100 \left(-\frac{1}{n} \right)} = \frac{1}{100}$$

[易错点]: 对常用的等价无穷小和等式的处理不熟练。



5. (数一二三) 设 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在, 且有 $f(x) = e^{-2x} + x^{\frac{2}{1-x}} \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, 则 $f(x) =$ _____.

[知识点]: 指数与幂函数极限计算、洛必达法则应用以及极限值方程求解。

[答案]: $e^{-2x} + \frac{1}{e^2-1} x^{\frac{2}{1-x}}$.

[解析]: 题目中给出 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在这一关键条件, 由于函数 $f(x)$ 的表达式中包含 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 这

一未知量, 所以我们先记 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = A$, 这样做的目的是将未知的极限值用一个字母表示,

以便后续在等式中进行运算和求解.

于是有 $f(x) = e^{-2x} + x^{\frac{2}{1-x}} A$,

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \\ &= e^{-2} + A \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{2}{1-x}} \\ &= e^{-2} + A \lim_{x \rightarrow 1} e^{\left(\frac{2 \ln x}{1-x}\right)} \end{aligned}$$

而



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \ln x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{x}}{-1} = -2,$$

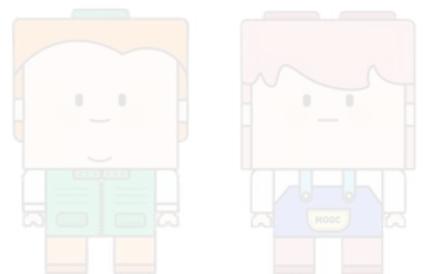
所以 $A = e^{-2} + Ae^{-2}$,

解得 $A = \frac{e^{-2}}{1-e^{-2}} = \frac{1}{e^2-1}$.

故 $f(x) = e^{-2x} + \frac{1}{e^2-1} x^{\frac{2}{1-x}}$.

[易错点]: 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{2}{1-x}}$ 时, 取对数转化及洛必达法则应用易出错, 求解关于极限值 A 的方程

$A = e^{-2} + Ae^{-2}$ 时, 移项和化简可能出现计算错误。



6. (数一二三) 设 $x_0 = 0, x_n = \frac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}} (n = 1, 2, 3, \dots)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

[知识点]: 数列极限的求解, 涉及数列的有界性与单调性判断。

[答案]: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 。

[解析]: 要求数列 $\{x_n\}$ 的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, 首先要判断数列是否收敛。如果数列收敛, 才能通过对递推公式取极限来求解极限值。而判断数列收敛, 常从数列的有界性和单调性入手。

$$\text{显然 } 0 < x_n = \frac{2(1+x_{n-1})-1}{1+x_{n-1}} = 2 - \frac{1}{1+x_{n-1}} < 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

即 $\{x_n\}$ 有界。

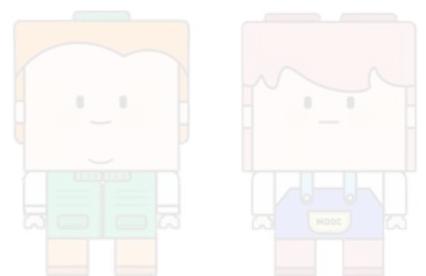
令 $f(x) = 2 - \frac{1}{1+x}$ 可知, $f(x)$ 在 $x \geq 0$ 时单调上升, 从而 $x_{n+1} = f(x_n) (n = 1, 2, 3, \dots)$ 单调。

因此 $\{x_n\}$ 收敛, 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 。

对递归方程 $x_n = \frac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ 两边取极限得 $a = \frac{1+2a}{1+a}$, 即 $a^2 - a - 1 = 0$

$$\text{解得 } a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

[易错点]: 在判断 $f(x) = 2 - \frac{1}{1+x}$ 单调性及由此得出数列 $\{x_n\}$ 单调性时, 可能因对函数求导或分析错误导致结论错误; 在推导数列有界性时, 对 $\{x_n\}$ 表达式变形和范围推导不准确。



7. (数一二三) 设 3 阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 3 维列向量, 若 $|A| = \frac{1}{2}$, 则 $|\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1| = \underline{\hspace{2cm}}$.

[知识点]: 行列式的计算, 涉及利用矩阵乘法将向量组的变换转化为矩阵形式来计算行列式。

[答案]: 1.

[解析]: 已知 3 阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的行列式 $|A|$ 的值, 要求 $|\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1|$, 需要找到两者之间的联系。可以通过矩阵乘法将 $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1)$ 表示成 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 与某个矩阵相乘的形式, 或者利用行列式的性质对 $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1)$ 进行化简。

由于 $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 所以:

$$|\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1| = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

也可以用行列式的性质来求解:

将第 2 列的 (-1) 倍加到第 1 列, 再将第 3 列的 1 倍加到第 1 列得

$$|\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1| = |\alpha_1 - \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1| = |2\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1|.$$

将第 1 列的 $(-\frac{1}{2})$ 倍加到第 3 列, 再将第 3 列的 (-1) 倍加到第 2 列得

$$|\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1| = |2\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3| = |2\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 2|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 1.$$

[易错点]: 在使用行列式的性质进行化简时, 如行(列)的倍加操作, 可能出现符号错误或操作顺序错误, 导致计算结果出错。

