周周清 3.10-3.16

-by 可爱因子大橙子 可爱因子章鱼烧

1.（数一二三）设 $k>0$，若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan kx^2+kx^2f(x)}{x^6}=0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+f(x)}{x^4}=1$，则 $k=$ ____ .

2.（数一二三）当 $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^n x+\cos^n x}=$ ____ .

3.（数一二三）已知 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 存在，且 $f(x)=x^2+e^x\lim\limits_{x\to 1}f(x)$，则 $f(x)=$ ____ .

4.（数一二三）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{99}}{n^{100}-(n-1)^{100}}=$ ____

5.（数一二三）设 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 存在,且有 $f(x)=\mathrm{e}^{-2x}+x^{\frac{2}{1-x}}\lim\limits_{x\to 1}f(x)$,则 $f(x)=$ ______.

6.（数一二三）设 $x_0=0,x_n=\frac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}}(n=1,2,3,\cdots)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$ ______.。

7.（数一二三）设 3 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 3 维列向量,若 $|A|=\frac{1}{2}$,则 $|\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1|=$ _____.

周周清 3.10-3.16

-by 可爱因子大橙子 可爱因子章鱼烧

1.（数一二三）设 $k>0$，若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan kx^2+kx^2f(x)}{x^6}=0$，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+f(x)}{x^4}=1$，则 $k=$_____.

[知识点]：泰勒公式在极限中的应用

[解析]：答案：$k=\sqrt{3}$

考虑 $\arctan kx^2$ 的六阶泰勒公式，有，

$$\arctan kx^2=kx^2-\frac{(kx^2)^3}{3}+o(x^6)=kx^2-\frac{k^3x^6}{3}+o(x^6)$$

代入到 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan kx^2+kx^2f(x)}{x^6}=0$ 中可得，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\arctan kx^2+kx^2f(x)}{x^6}&=\lim_{x\to0}\frac{kx^2+kx^2f(x)-\frac{k^3x^6}{3}+o(x^6)}{x^6}\\&=k\lim_{x\to0}\frac{1+f(x)}{x^4}+\lim_{x\to0}\frac{-\frac{k^3x^6}{3}+o(x^6)}{x^6}\\&=k-\frac{k^3}{3}=0\end{aligned}$$

由于 $k>0$，故由 $k-\dfrac{k^3}{3}=0$ 可得 $\dfrac{k^2}{3}=1$，即 $k^2=3$，进一步可得 $k=\sqrt{3}$.

[易错点]：本题需要通过给定的两个极限算出参数的值，在极限的处理上泰勒公式是非常便捷的选择，同学们要熟练掌握常见函数的泰勒展开。

2.（数一二三）当$0\le x\le\frac{\pi}{2}$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^n x+\cos^n x}=$_____.

[知识点]：数列极限

[解析]：答案：$\begin{cases}\cos x, & x\in[0,\frac{\pi}{4})\\ \sin x, & x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]\end{cases}$

由于当$x\in[0,\frac{\pi}{4})$时，$\cos x>\sin x$；$x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$时，$\sin x\ge\cos x$，

故$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^n x+\cos^n x}=\begin{cases}\cos x, & x\in[0,\frac{\pi}{4})\\ \sin x, & x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]\end{cases}$

本题实际上涉及到一个常用结论：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}，其中(a_i\ge0,i=1,2,\cdots,k)$$

下面给出该结论的证明：

不妨设$a=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，则有

$$a=\sqrt[n]{a^n}\le\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}\le\sqrt[n]{ka^n}=k^{\frac{1}{n}}a$$

两边取极限，可知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}k^{\frac{1}{n}}a=a$，由夹逼准则可知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=a$，

证毕！

[易错点]：不熟悉一些常用结论导致无从下手。

3.（数一二三）已知 $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ 存在，且 $f(x)=x^2+e^x\lim\limits_{x\to1} f(x)$，则 $f(x)=$____.

[知识点]：极限的计算

[解析]：答案：$f(x)=x^2+\dfrac{1}{1-e}e^x$

既然极限 $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ 存在，那么它就是一个常数，不妨记 $A=\lim\limits_{x\to1} f(x)$，

则方程可化为 $f(x)=x^2+Ae^x$.

对方程两边取极限，得到：$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}(x^2+Ae^x)$

也即 $A=1+A\lim\limits_{x\to1} e^x=1+Ae$，解得 $A=\dfrac{1}{1-e}$，故 $f(x)=x^2+\dfrac{1}{1-e}e^x$.

[易错点]：未能把极限当成一个已知常数进行计算从而陷入死胡同里。

4. （数一二三）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{99}}{n^{100}-(n-1)^{100}}=$ ______

[知识点]：数列极限

[解析]：答案：$\dfrac{1}{100}$

分母属于指数相同的相减类型，通常可采用提出其中一项的做法，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{99}}{n^{100}-(n-1)^{100}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{99}}{n^{100}\left[1-\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{100}\right]}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\left[1-\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{100}\right]}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}}{1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{100}}$$

由于当□$\to 0$时，$(1+□)^{\alpha}-1\sim\alpha□$，对应此处的□$=-\dfrac{1}{n}$，有

$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}}{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{100}-1}$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}}{100\left(-\dfrac{1}{n}\right)}=\frac{1}{100}$$

[易错点]：对常用的等价无穷小和等式的处理不熟练。

5.（数一二三）设$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 存在,且有 $f(x)=\mathrm{e}^{-2x}+x^{\frac{2}{1-x}}\lim\limits_{x\to 1} f(x)$,则 $f(x)=$ ______.

[知识点]： 指数与幂函数极限计算、洛必达法则应用以及极限值方程求解。

[答案]： $\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{\mathrm{e}^2-1}x^{\frac{2}{1-x}}$.

[解析]： 题目中给出$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$存在这一关键条件，由于函数$f(x)$的表达式中包含$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$这一未知量，所以我们先记$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=A$, 这样做的目的是将未知的极限值用一个字母表示，以便后续在等式中进行运算和求解.

于是有 $f(x)=e^{-2x}+x^{\frac{2}{1-x}}A$ ，

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x\to 1} f(x) \\ &= e^{-2}+A\lim_{x\to 1} x^{\frac{2}{1-x}} \\ &= e^{-2}+A\lim_{x\to 1} e^{\left(\frac{2\ln x}{1-x}\right)} \end{aligned}$$

而

$$\lim_{x\to 1}\frac{2\ln x}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2}{x}}{-1}=-2,$$

所以 $A=e^{-2}+Ae^{-2}$,

解得 $A=\frac{e^{-2}}{1-e^{-2}}=\frac{1}{e^2-1}$.

故 $f(x)=e^{-2x}+\frac{1}{e^2-1}x^{\frac{2}{1-x}}$.

[易错点]： 计算$\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{2}{1-x}}$时，取对数转化及洛必达法则应用易出错，求解关于极限值A的方程$A=e^{-2}+Ae^{-2}$时，移项和化简可能出现计算错误。

6.（数一二三）设 $x_0=0,x_n=\frac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}}(n=1,2,3,\cdots)$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$ ______.。

[知识点]：数列极限的求解，涉及数列的有界性与单调性判断。

[答案]：$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

[解析]：要求数列$\{x_n\}$的极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，首先要判断数列是否收敛．如果数列收敛，才能通过对递推公式取极限来求解极限值．而判断数列收敛，常从数列的有界性和单调性入手.

显然$0<x_n=\frac{2(1+x_{n-1})-1}{1+x_{n-1}}=2-\frac{1}{1+x_{n-1}}<2\quad(n=1,2,3,\cdots)$

即$\{x_n\}$有界.

令$f(x)=2-\frac{1}{1+x}$可知，$f(x)$在$x\geq 0$时单调上升，从而$x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,3,\cdots)$单调.

因此$\{x_n\}$ 收敛,记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

对递归方程 $x_n=\frac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$两边取极限得 $a=\frac{1+2a}{1+a}$,即 $a^2-a-1=0$

解得 $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

[易错点]：在判断$f(x)=2-\frac{1}{1+x}$单调性及由此得出数列$\{x_n\}$单调性时，可能因对函数求导或分析错误导致结论错误；在推导数列有界性时，对$\{x_n\}$表达式变形和范围推导不准确。

7.（数一二三）设 3 阶矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, 其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 3 维列向量, 若 $|A|=\frac{1}{2}$, 则 $|\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1|=$ ______.

[知识点]: 行列式的计算，涉及利用矩阵乘法将向量组的变换转化为矩阵形式来计算行列式。

[答案]: 1.

[解析]: 已知 3 阶矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$的行列式$|A|$的值，要求$|\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1|$，需要找到两者之间的联系。可以通过矩阵乘法将$(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)$表示成$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$与某个矩阵相乘的形式，或者利用行列式的性质对$(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)$进行化简.

由于$(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$, 所以:

$$|\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot 2=1.$$

也可以用行列式的性质来求解:

将第 2 列的(-1)倍加到第 1 列, 再将第 3 列的 1 倍加到第 1 列得

$|\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1|=|\alpha_1-\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1|=|2\alpha_1,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1|$.

将第 1 列的$\left(-\frac{1}{2}\right)$倍加到第 3 列, 再将第 3 列的$(-1)$倍加到第 2 列得

$|\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1|=|2\alpha_1,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3|=|2\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=2|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=1$.

[易错点]: 在使用行列式的性质进行化简时，如行（列）的倍加操作，可能出现符号错误或操作顺序错误，导致计算结果出错。