

周周清 4.28-5.04

-by 可爱因子大橙子 可爱因子章鱼烧

1. (数一二三) 设函数 $f(x)$ 满足 $f''(x) > 0$, 且 $f(0) = 0$, $f(2) = 1$, $f(4) = 6$, 则 $f(1) + f(3)$ 可能为 _____

(A).1 (B).2 (C).3 (D).5

2. (数一二三) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} \arctan \sqrt{\frac{k}{n}} =$ _____

3. (数一二三) 将长度为 k 的细棒置于区间 $[0, k]$ 上, 此时, 细棒的线密度为 $\rho(x) = 2 + \frac{x}{3}$, 则细棒的质心坐标 $\bar{x} =$ _____.

4. (数一三) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0, 1)$, Y 服从正态分布 $N(1, 4)$, 对给定的 α ($0 < \alpha < 1$), 数 u_α 满足 $P\{Y > u_\alpha\} = \alpha$. 若 $P\{|X| < x\} = \alpha$, 则 x 等于 _____.

(A). $u_{\frac{\alpha}{2}}$ (B). $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$ (C). $\frac{1}{2}(u_{\frac{\alpha}{2}} - 1)$ (D). $\frac{1}{2}(u_{\frac{1-\alpha}{2}} - 1)$

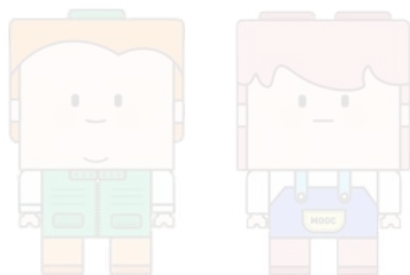
5. (数一二三) 设函数 $F(u, v)$ 可微, 且 $F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$ 确定隐函数 $z = z(x, y)$, 则 $z - x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

6. (数一二三) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) \right]^n + \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right) \right]^n \right\} =$ _____.

(A) -1. (B) 1. (C) e . (D) $e^{\frac{\pi}{4}}$.

7. (数一二三) 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \end{bmatrix}$, A^* 是 A 的伴随矩阵, 若 $r(A^*) = 1$, 则 $a =$ _____.

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 1 或 3.



周周清 4.28-5.04

-by 可爱因子大橙子 可爱因子章鱼烧

1. (数一二三) 设函数 $f(x)$ 满足 $f''(x) > 0$ ，且 $f(0) = 0$ ， $f(2) = 1$ ， $f(4) = 6$ ，则 $f(1) + f(3)$ 可能为 _____
- (A).1 (B).2 (C).3 (D).5

[知识点]: 函数的性质

[解析]: 答案: (C).3

由于函数 $f(x)$ 满足 $f''(x) > 0$ ，故 $f(x)$ 为凹函数，从而由凹函数的定义可知，对任意不同的两点 x_1, x_2 ，都有 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ 。于是，

$$f(1) + f(3) > 2f\left(\frac{1+3}{2}\right) = 2f(2) = 2$$

另一方面，由凹函数的定义可得

$$f(1) = f\left(\frac{0+2}{2}\right) < \frac{f(0) + f(2)}{2} = \frac{1}{2}$$

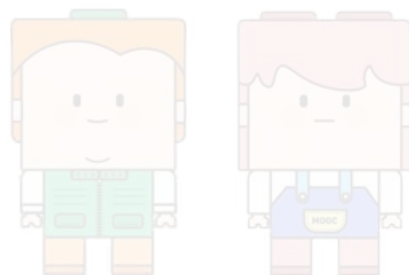
$$f(3) = f\left(\frac{2+4}{2}\right) < \frac{f(2) + f(4)}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\text{故 } f(1) + f(3) < \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4.$$

因此， $2 < f(1) + f(3) < 4$ ，只有 (C).3 符合条件。

[易错点]: 对于凹凸函数的性质掌握不牢，不会熟练运用。

2. (数一二三) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} \arctan \sqrt{\frac{k}{n}} = \underline{\hspace{2cm}}$



[知识点]: 定积分定义求极限

[解析]: 答案: $\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} + \frac{\ln 2}{3}$

根据定积分定义, 整理原极限, 并提出“可爱因子” $\frac{1}{n}$,

$$\begin{aligned} \text{原极限} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \arctan \sqrt{\frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x} \arctan \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \int_0^1 \arctan \sqrt{x} d(x^{3/2}) \\ &= \frac{2}{3} \left(x^{\frac{3}{2}} \arctan \sqrt{x} \Big|_0^1 - \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln(1+x) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} + \frac{\ln 2}{3} \end{aligned}$$

[易错点]: 对于定积分定义求极限的套路不熟练。



3. (数一二三) 将长度为 k 的细棒置于区间 $[0, k]$ 上, 此时, 细棒的线密度为 $\rho(x) = 2 + \frac{x}{3}$,



则细棒的质心坐标 $\bar{x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

[知识点]: 一元函数积分的物理应用

[解析]: 答案: $\frac{2k(9+k)}{3(12+k)}$

由于

$$\int_0^k x \left(2 + \frac{x}{3} \right) dx = \left(x^2 + \frac{x^3}{9} \right) \Big|_0^k = k^2 \left(1 + \frac{k}{9} \right)$$

$$\int_0^k \left(2 + \frac{x}{3} \right) dx = \left(2x + \frac{x^2}{6} \right) \Big|_0^k = k \left(2 + \frac{k}{6} \right)$$

$$\text{故 } \bar{x} = \frac{k^2 \left(1 + \frac{k}{9} \right)}{k \left(2 + \frac{k}{6} \right)} = \frac{2k(9+k)}{3(12+k)} .$$

[易错点]: 对形心公式掌握不牢, 不会熟练运用。



4. (数一三) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$, Y 服从正态分布 $N(1,4)$, 对给定的 α ($0 < \alpha < 1$), 数 u_α 满足 $P\{Y > u_\alpha\} = \alpha$. 若 $P\{|X| < x\} = \alpha$, 则 x 等于 ____.

- (A). $u_{\frac{\alpha}{2}}$ (B). $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$ (C). $\frac{1}{2}(u_{\frac{\alpha}{2}} - 1)$ (D). $\frac{1}{2}(u_{\frac{1-\alpha}{2}} - 1)$

[知识点]: 上分位点的概念

[解析]: 答案: (D). $\frac{1}{2}(u_{\frac{1-\alpha}{2}} - 1)$

由于 $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(1,4)$, 故 $\frac{Y-1}{2}$ 与 X 同分布. 进一步, 由 $Y \sim N(1,4)$ 以及

$$P\{Y > u_\alpha\} = \alpha \text{ 可得, } P\left\{\frac{Y-1}{2} > \frac{u_\alpha-1}{2}\right\} = \alpha, \text{ 于是 } P\left\{X > \frac{u_\alpha-1}{2}\right\} = \alpha, \text{ 记 } v_\alpha = \frac{u_\alpha-1}{2},$$

则 $P\{X > v_\alpha\} = \alpha$.

由标准正态分布的性质, 可知 $P\{X \leq -x\} = P\{X \geq x\}$, 则

$$\begin{aligned}
 P\{|X| < x\} &= P\{-x < X < x\} = P\{X < x\} - P\{X \leq -x\} \\
 &= 1 - P\{X \geq x\} - P\{X \geq x\}
 \end{aligned}$$

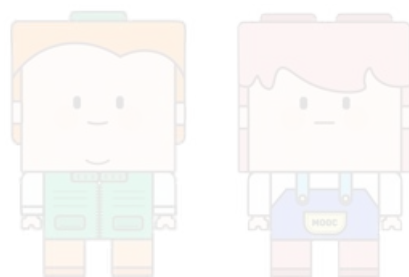
由连续性可知,

$$= 1 - 2P\{X > x\}$$

于是, $1 - 2P\{X > x\} = \alpha$, $P\{X > x\} = \frac{1-\alpha}{2}$

因此, $x = v_{\frac{1-\alpha}{2}} = \frac{1}{2}(u_{\frac{1-\alpha}{2}} - 1)$.

[易错点]: 对正态分布的性质以及上分位点相关知识的掌握不牢固。



5. (数一二三) 设函数 $F(u, v)$ 可微, 且 $F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$ 确定隐函数 $z = z(x, y)$, 则 $z -$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

[知识点]: 利用隐函数求导, 通过将方程看成关于自变量 x 、 y 的恒等式求一阶全微分, 进而求解偏导数。

[答案]: xy .

[解析]: 将题设的方程看成关于自变量 x , y 的恒等式并求一阶全微分即得

$$\begin{aligned} 0 &= F'_1 \cdot \left(dx + \frac{1}{y} dz - \frac{z}{y^2} dy \right) + F'_2 \cdot \left(dy + \frac{1}{x} dz - \frac{z}{x^2} dx \right) \\ &= \left(F'_1 - \frac{z}{x^2} F'_2 \right) dx + \left(F'_2 - \frac{z}{y^2} F'_1 \right) dy + \left(\frac{1}{y} F'_1 + \frac{1}{x} F'_2 \right) dz \\ &= \frac{1}{x^2} (x^2 F'_1 - z F'_2) dx + \frac{1}{y^2} (y^2 F'_2 - z F'_1) dy + \frac{1}{xy} (z F'_1 + y F'_2) dz \end{aligned}$$

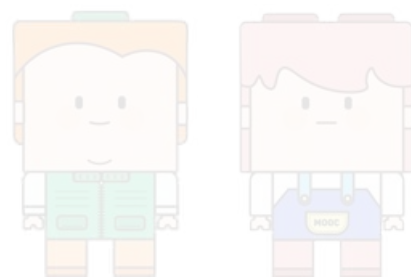
由此可解出隐函数 $z = z(x, y)$ 的一阶全微分

$$\begin{aligned} dz &= -\frac{xy}{x^2} \frac{(x^2 F'_1 - z F'_2)}{(x F'_1 + y F'_2)} dx - \frac{xy}{y^2} \frac{(y^2 F'_2 - z F'_1)}{(x F'_1 + y F'_2)} dy \\ &= \frac{y(z F'_2 - x^2 F'_1)}{x(x F'_1 + y F'_2)} dx + \frac{x(z F'_1 - y^2 F'_2)}{y(x F'_1 + y F'_2)} dy. \end{aligned}$$

故

$$z - x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = z - \frac{y(z F'_2 - x^2 F'_1)}{x F'_1 + y F'_2} - \frac{x(z F'_1 - y^2 F'_2)}{x F'_1 + y F'_2} = xy.$$

[易错点]: 在对复合函数求全微分以及整理求解偏导数过程中, 容易出现计算错误。



6. (数一二三) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[\sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right) \right]^n + \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} \right) \right]^n \right\} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(A) -1 .

(B) 1 .

(C) e .

(D) $e^{\frac{\pi}{4}}$.

[知识点]: 利用三角函数取值范围判断数列极限。

[答案]: B.

[解析]: 先求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right) \right]^n$. 当 $n > 4$ 时, $\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} < \frac{\pi}{3}$, 所以 $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right) <$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right) \right]^n = 0.$$

再求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} \right) \right]^n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} \right) \right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\cos \frac{1}{n} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{\cos \frac{1}{n} - 1} \cdot n \left(\cos \frac{1}{n} - 1 \right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\cos \frac{1}{n} - 1 \right)}$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\cos \frac{1}{n} - 1 \right) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{n}} = 0,$$

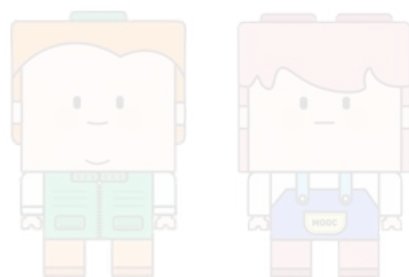
所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} \right) \right]^n = 1,$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[\sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right) \right]^n + \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} \right) \right]^n \right\} = 1.$$

[易错点]: 易忽略根据三角函数值范围判断其极限为 0, 运用重要极限公式变形和等价无穷小替换过程中容易出现计算错误。



7. (数一二三) 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \end{bmatrix}$, A^* 是 A 的伴随矩阵, 若 $r(A^*) = 1$, 则

$a = \underline{\hspace{2cm}}$.

(A) 3.

(B) 2.

(C) 1.

(D) 1 或 3.

[知识点]: 伴随矩阵秩与原矩阵秩的关系。

[答案]: D.

[解析]: A 是四阶矩阵, 那么由伴随矩阵秩的公式

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n - 1 \\ 0, & r(A) < n - 1 \end{cases}$$

可见, $r(A^*) = 1 \Leftrightarrow r(A) = 3$.

对矩阵 A 作初等变换, 有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & a-2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & a-1 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 6-2a \end{bmatrix}$$

若 $a = 3$, 则 $A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 秩 $r(A) = 3$.

若 $a = 2$, 则 $A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 秩 $r(A) = 4$.

若 $a = 1$, 则 $A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 秩 $r(A) = 3$.

所以, $a = 1$ 或 $a = 3$ 时均有 $r(A^*) = 1$.

应该选 D.

[易错点]: 在利用伴随矩阵秩与原矩阵秩的关系时, 易记错公式; 对矩阵进行初等行变换求秩过程中, 计算错误或判断秩的大小时出错。

