

周周清 6.2-6.8

-by 可爱因子小橘子 可爱因子章鱼烧

- (数一二三) 设 $\alpha > 1$, 反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$ 收敛, 则 β 的取值范围是 _____.
- (数一二三) 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $x = x_0$ 可导, $F(x) = g(x)|f(x)|$, 又 $f(x_0) = 0$, 则 $F'(x_0)$ 存在的充要条件是: _____.
(A) $f'(x_0) = 0$. (B) $g(x_0) = 0$. (C) $g(x_0)f'(x_0) = 0$. (D) 以上均不对.
- (数一二三) 下列矩阵中, A 和 B 相似的是
(A) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (B) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
(C) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (D) $A = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$.
- (数一二三) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, $f(x)$ 单调递增, 且 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. 证明: 在 $(0, 1)$ 内存在三个不同的点 ξ_1, ξ_2, ξ_3 , 使得 $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{2}{f'(\xi_2)} + \frac{3}{f'(\xi_3)} = 6$.
- (数一二三) 设函数 $f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\tan t}{\tan x} \right)^{\frac{\ln(1+x)}{\tan t - \tan x}}$, 则 _____.
(A) $f(x)$ 只有一个可去间断点, 有无穷多个跳跃间断点.
(B) $f(x)$ 只有一个可去间断点, 有无穷多个无穷间断点.
(C) $f(x)$ 有无穷多个可去间断点和跳跃间断点.
(D) $f(x)$ 有无穷多个可去间断点和无穷间断点.
- (数一二三) 已知 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos x)^n dx$ ($n = 1, 2, \dots$), 则当 $n = 1, 2, \dots$ 时 _____.
(A) $\{a_{2n}\}$ 有最小值, 没有最大值;
(B) $\{a_{2n-1}\}$ 有最大值, 没有最小值;
(C) $\{a_n\}$ 有最大值, 也有最小值;
(D) $\{a_n\}$ 既没有最大值, 也没有最小值.



7. (数一三) 设总体 X 的分布律为 $P\{X = (-1)^n + p\} = \frac{1}{n(n+1)}, n=1, 2, \dots$, 其中 p 为未知参数,

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, $\bar{X}$ 为样本均值, 则 p 的矩估计量

$\hat{p} = \underline{\hspace{2cm}}$

(A). $\bar{X} - \ln 2$

(B). $\bar{X} + \ln 2$

(C). $\bar{X} - \ln 2 + 1$

(D). $\bar{X} + \ln 2 - 1$



可爱因子



周周清 6.2-6.8

-by 可爱因子小橘子 可爱因子章鱼烧

1. (数一二三) 设 $\alpha > 1$, 反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha} \ln^{\beta} x}$ 收敛, 则 β 的取值范围是 _____.

[知识点]: 用比较判别法极限形式, 分析无穷积分与瑕积分的敛散性, 确定参数范围。

[答案]: $(-\infty, 1)$.

[解析]: 这是无穷积分, 当 $\beta > 0$ 时又是瑕积分, $x = 1$ 是瑕点.

记 $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha} \ln^{\beta} x}$, 取 $A > 1$,

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^A f(x) dx + \int_A^{+\infty} f(x) dx,$$

先考察 $\int_A^{+\infty} f(x) dx$. 因 $\alpha > 1$, 可取 $\varepsilon > 0$ 充分小使 $\alpha - \varepsilon > 1$

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{x^{\alpha-\varepsilon}}} = x^{\alpha-\varepsilon} f(x) = \frac{1}{x^{\varepsilon} \ln^{\beta} x} \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty),$$

又 $\int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha-\varepsilon}} (\alpha - \varepsilon > 1)$ 收敛, 由比较判别法的极限形式 $\Rightarrow \int_A^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 即 $\alpha > 1$ 时

对任意实数 β , $\int_A^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.

再考察 $\int_1^A f(x) dx$. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{(x-1)^{\beta}}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x-1}{\ln x} \right)^{\beta} \cdot \frac{1}{x^{\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{x-1}{\ln(1+(x-1))} \right]^{\beta} = 1,$$

又 $\int_1^A \frac{dx}{(x-1)^{\beta}} \begin{cases} \text{收敛} (\beta < 1) \\ \text{发散} (\beta \geq 1) \end{cases}$, 由比较判别法极限形式 $\Rightarrow \int_1^A f(x) dx$ 与 $\int_1^A \frac{dx}{(x-1)^{\beta}}$ 有相同敛散

性, 即对任意实数 α , 当 $\beta < 1$ 时 $\int_1^A f(x) dx$ 收敛, 当 $\beta \geq 1$ 时 $\int_1^A f(x) dx$ 发散.

综上, 当 $\alpha > 1$ 时 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha} \ln^{\beta} x} \begin{cases} \text{收敛} (\beta < 1) \\ \text{发散} (\beta \geq 1) \end{cases}$.

因此, β 的取值范围是 $(-\infty, 1)$.



[易错点]: 拆分积分、判断瑕点及运用判别法时，易混淆条件或计算失误，导致敛散性判断错误。

2. (数一二三) 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $x = x_0$ 可导, $F(x) = g(x)|f(x)|$, 又 $f(x_0) = 0$, 则 $F'(x_0)$ 存在的充要条件是: _____.

(A) $f'(x_0) = 0$. (B) $g(x_0) = 0$. (C) $g(x_0)f'(x_0) = 0$. (D) 以上均不对.

[知识点]: 根据导数定义, 分别求左右导数, 通过左右导数存在且相等, 推导某一点导数存在的充要条件。

[答案]: C.

[解析]: 分别考察

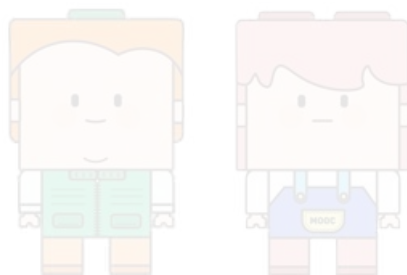
$$\begin{aligned} F'_+(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) \frac{|f(x)|}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} = g(x_0)|f'(x_0)|, \\ F'_-(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) \frac{|f(x)|}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) \lim_{x \rightarrow x_0^-} \left(- \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \right) = -g(x_0)|f'(x_0)|, \end{aligned}$$

于是

$$F'(x_0) \text{ 存在} \Leftrightarrow F'_+(x_0) = F'_-(x_0) \text{ 存在} \Leftrightarrow g(x_0)|f'(x_0)| = -g(x_0)|f'(x_0)|.$$

所以选(C).

[易错点]: 求左右导数时, 对绝对值函数的处理、极限运算易出错, 或在推导充要条件时逻辑不清晰。



3. (数一二三) 下列矩阵中, A 和 B 相似的是

$$(A) A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(B) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$(C) A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(D) A = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & -2 \end{bmatrix}.$$

[知识点]: 矩阵相似的必要条件 (秩、行列式、特征值、迹相等), 及可对角化矩阵相似的判定 (特征值及对应线性无关特征向量情况)。

[答案]: C.

[解析]: 根据 A 和 B 相似的必要条件:

$$(1) r(A) = r(B)$$

$$(2) |A| = |B|$$

$$(3) \lambda_A = \lambda_B$$

$$(4) \sum a_{ij} = \sum b_{ij}$$

易见(A)秩不等, (B)主对角线之和不等, (D)行列式、主对角线之和及特征值不等. 故均不相似, 所以应选 (C).

实际上, 对于(C), 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 2),$$

知: 矩阵 A 的特征值为 $2, 0, 0$. 又因秩 $r(0E - A) = 1$, 有 $n - r(0E - A) = 2$.

齐次方程组 $(0E - A)x = 0$ 有 2 个线性无关的解, 即 $\lambda=0$ 有两个线性无关的特征向量. 从而

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix},$$

类似地

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix},$$

因此

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

[易错点]: 易漏用相似必要条件判断, 或对可对角化矩阵相似判定中特征向量等条件分析不清。



4. (数一二三) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, $f(x)$ 单调递增, 且 $f(0)=0$,

$f(1)=1$. 证明: 在 $(0,1)$ 内存在三个不同的点 ξ_1, ξ_2, ξ_3 , 使得 $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{2}{f'(\xi_2)} + \frac{3}{f'(\xi_3)} = 6$.

[知识点]: 微分中值定理

[解析]: 答案: 证明如下:

由于严格规定了 ξ_1, ξ_2, ξ_3 为 $(0,1)$ 内三个不同的点, 考虑将 $[0,1]$ 划分为三个区间:

$[0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, 1]$.

分别对 $[0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, 1]$ 上的 $f(x)$ 使用拉格朗日中值定理, 可得存在 $\xi_1 \in (0, x_1)$,

$\xi_2 \in (x_1, x_2)$, $\xi_3 \in (x_2, 1)$, 使得

$$f(x_1) - f(0) = f'(\xi_1)(x_1 - 0),$$

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi_2)(x_2 - x_1),$$

$$f(1) - f(x_2) = f'(\xi_3)(1 - x_2),$$

结合 $f(0)=0$, $f(1)=1$ 可得,

$$\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{2}{f'(\xi_2)} + \frac{3}{f'(\xi_3)} = \frac{1}{\frac{f(x_1)}{x_1}} + \frac{2}{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}} + \frac{3}{\frac{1 - f(x_2)}{1 - x_2}} \quad (1)$$

若能使得 $f(x_1) = \frac{1}{6}$, $f(x_2) = \frac{1}{2}$, 则由(1)式可得

$$\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{2}{f'(\xi_2)} + \frac{3}{f'(\xi_3)} = \frac{x_1}{\frac{1}{6}} + \frac{2(x_2 - x_1)}{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}} + \frac{3(1 - x_2)}{1 - \frac{1}{2}}.$$

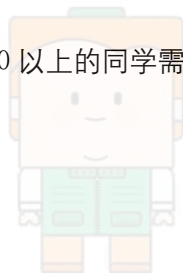
整理可得 $6x_1 + 6(x_2 - x_1) + 6(1 - x_2) = 6$, 即 $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{2}{f'(\xi_2)} + \frac{3}{f'(\xi_3)} = 6$.

由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调递增, $f(0)=0$, $f(1)=1$. 故由介值定理可知, 可取

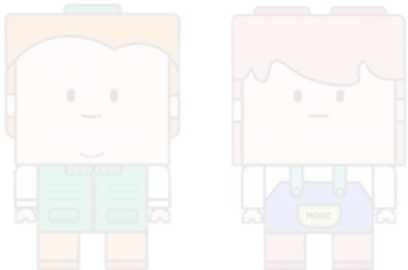
到 $0 < x_1 < x_2 < 1$, 使得 $f(x_1) = \frac{1}{6}$, $f(x_2) = \frac{1}{2}$.

由前面的分析可知, 命题得证!

[易错点]: 微分中值定理这块需要多做题, 多总结, 本就是难点, 想考 140 以上的同学需要



多留意一下。



5. (数一二三) 设函数 $f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\tan t}{\tan x} \right)^{\frac{\ln(1+x)}{\tan t - \tan x}}$, 则 ____.

(A). $f(x)$ 只有一个可去间断点, 有无穷多个跳跃间断点.

(B). $f(x)$ 只有一个可去间断点, 有无穷多个无穷间断点.

(C). $f(x)$ 有无穷多个可去间断点和跳跃间断点.

(D). $f(x)$ 有无穷多个可去间断点和无穷间断点.

[知识点]: 间断点的判定

[解析]: 答案: (D). $f(x)$ 有无穷多个可去间断点和无穷间断点.

由 $f(x)$ 的表达式可知, $f(x)$ 的定义域为 $x \in (-1, +\infty)$ 且 $x \neq \frac{k\pi}{2}$, 其中 k 为非负整数.

当 $x \in (-1, +\infty)$ 且 $x \neq \frac{k\pi}{2}$ 时,

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\tan t}{\tan x} \right)^{\frac{\ln(1+x)}{\tan t - \tan x}} = \lim_{t \rightarrow x} \left(1 + \frac{\tan t - \tan x}{\tan x} \right)^{\frac{\tan x}{\tan t - \tan x} \cdot \frac{\tan t - \tan x}{\tan x} \cdot \frac{\ln(1+x)}{\tan t - \tan x}} \\ &= \lim_{t \rightarrow x} \left(1 + \frac{\tan t - \tan x}{\tan x} \right)^{\frac{\tan x}{\tan t - \tan x} \cdot \frac{\ln(1+x)}{\tan x}} \\ &= e^{\frac{\ln(1+x)}{\tan x}} \end{aligned}$$

于是, $f(x) = e^{\frac{\ln(1+x)}{\tan x}}$.

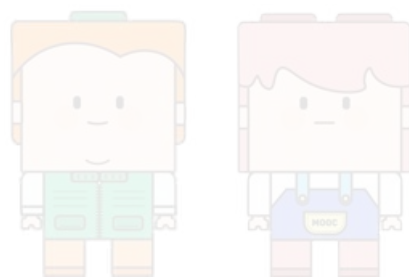
由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\tan x} \stackrel{\ln(1+x) \sim x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e$, 从而 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

点.

当 k 为正奇数时, $\lim_{x \rightarrow \frac{k\pi}{2}^-} \frac{\ln(1+x)}{\tan x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \frac{k\pi}{2}^+} f(x) = 1$, 从而 $x = \frac{k\pi}{2}$ (k 为正奇数) 为 $f(x)$

的可去间断点.

当 k 为正偶数时, $\lim_{x \rightarrow \frac{k\pi}{2}^-} \frac{\ln(1+x)}{\tan x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \frac{k\pi}{2}^+} \frac{\ln(1+x)}{\tan x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$,



$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, 从而 $x = \frac{k\pi}{2}$ (k 为正偶数) 为 $f(x)$ 的无穷间断点.

因此, 应选 (D)

[易错点]: 函数形式较复杂, 要有良好的解题习惯, 按部就班进行讨论。



可爱因子



6. (数一二三) 已知 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos x)^n dx$ ($n=1, 2, \dots$), 则当 $n=1, 2, \dots$ 时 ____.

- (A). $\{a_{2n}\}$ 有最小值, 没有最大值;
 (B). $\{a_{2n-1}\}$ 有最大值, 没有最小值;
 (C). $\{a_n\}$ 有最大值, 也有最小值;
 (D). $\{a_n\}$ 既没有最大值, 也没有最小值.

[知识点]: 数列极限, 有界性的判定

[解析]: 答案: (C). $\{a_n\}$ 有最大值, 也有最小值

当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, $(\sin x - \cos x)' = \cos x + \sin x > 0$, 故 $\sin x - \cos x$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调

递增, 从而 $-1 \leq \sin x - \cos x \leq 0$. 进一步可得,

$$0 \leq (\sin x - \cos x)^{2n+2} \leq (\sin x - \cos x)^{2n}, \quad (\sin x - \cos x)^{2n-1} \leq (\sin x - \cos x)^{2n+1} \leq 0.$$

从而由定积分的性质可得

$$0 < a_{2n+2} < a_{2n}, \quad a_{2n-1} < a_{2n+1} < 0$$

于是, $\{a_{2n}\}$ 单调递减且有下界 0, $\{a_{2n-1}\}$ 单调递增且有上界 0. 故由单调有界准则可知,

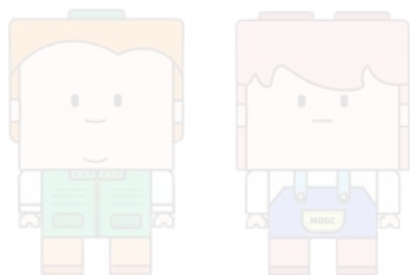
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1}$ 均存在.

记 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n}$, $b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1}$, 则 $b \leq 0 \leq a$. 由于 $\{a_{2n}\}$ 单调递减趋于 a , 故 $\{a_{2n}\}$ 的最大值为 a_2 , 取不到最小值. 由于 $\{a_{2n-1}\}$ 单调递增趋于 b , 故 $\{a_{2n-1}\}$ 的最小值为 a_1 , 取不到最大值. 可知选项 (A), (B) 均不正确.

另一方面, 由于 $a_{2n} > 0, a_{2n-1} < 0$, 故 $\{a_{2n}\}$ 的最大值也是 $\{a_n\}$ 的最大值, $\{a_{2n-1}\}$ 的最小值也是 $\{a_n\}$ 的最小值.

因此, $\{a_n\}$ 有最大值, 也有最小值, 应选 (C)

[易错点]: 讨论的思路比较新颖, 多积累, 与常规思维不太相同。



7. (数一三) 设总体 X 的分布律为 $P\{X = (-1)^n + p\} = \frac{1}{n(n+1)}, n=1, 2, \dots$, 其中 p 为未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, $\bar{X}$ 为样本均值, 则 p 的矩估计量

$\hat{p} = \underline{\hspace{2cm}}$

(A). $\bar{X} - \ln 2$ (B). $\bar{X} + \ln 2$ (C). $\bar{X} - \ln 2 + 1$ (D). $\bar{X} + \ln 2 - 1$

[知识点]: 矩估计

[解析]: 答案: (C). $\bar{X} - \ln 2 + 1$

计算 X 的数学期望

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n + p}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} + p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

由于 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, x \in (-1, 1]$, 故 $\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2 - 1$$

另一方面, 由于 $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 的前 N 项和

$$S_N = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = 1 - \frac{1}{N+1}$$

$$\text{从而 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{N+1} \right) = 1$$

因此, $E(X) = \ln 2 - 1 + p$, 解得 $p = E(X) - \ln 2 + 1$, 用 $\bar{X}$ 代替 $E(X)$ 可得 p 的矩估

计量 $\hat{p} = \bar{X} - \ln 2 + 1$.

[易错点]: 级数求和这块的基本功不够牢固。

