

周周清 6.9-6.15

-by 可爱因子小橘子 可爱因子章鱼烧

1. (数一二三) 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处 _____.

(A) 连续, 但偏导数 $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$ 不存在.

(B) 连续且偏导数 $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$ 都存在, 但不可微.

(C) 可微但 f'_x 和 f'_y 不连续.

(D) 可微且 f'_x 和 f'_y 连续.

2. (数一二三) 数列极限 $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \tan(\pi\sqrt{n^2 + 1}) =$ _____.

3. (数一二三) 已知向量 $\beta = (1, a, -1)^T$ 可以由 $\alpha_1 = (a + 2, 7, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, -1, 2)^T$ 线性表出, 则 $a =$ _____.

4. (数一二三) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $\sin xy + y \ln z - xz = 1$ 确定, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \Big|_{(0, 1)} =$ _____.

5. (数一二三) 设函数 $f(x) = k - xe^{-kx^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上没有零点, 则 k 的取值范围是 _____.

6. (数一二三) 设平面有界区域 D 位于第一象限, 由曲线 $(x^2 + y^2)^4 = x^6 + y^6$ 与

$4(x^2 + y^2)^4 = x^6 + y^6$ 以及坐标轴围成, 计算 $\iint_D \frac{\sqrt{x^6 + y^6}}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$

7. (数一三) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 总体 X 的分布律为

X	0	1	2
P	$1 - \frac{3p}{2}$	p	$\frac{p}{2}$

已知利用中心极限定理可得 $P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 150\right\}$ 的近似值为 $\Phi(10\sqrt{2})$, 其中 $\Phi(x)$ 表示标准正态分布的分布函数, 则 $p =$ _____.



周周清 6.9-6.15

-by 可爱因子小橘子 可爱因子章鱼烧

1. (数一二三) 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处 _____.

(A) 连续, 但偏导数 $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$ 不存在.

(B) 连续且偏导数 $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$ 都存在, 但不可微.

(C) 可微但 f'_x 和 f'_y 不连续.

(D) 可微且 f'_x 和 f'_y 连续.

[知识点]: 通过求偏导数、判断偏导数在原点的极限及连续性, 依据可微判定条件 (偏导数连续则可微), 分析函数在原点的连续性、偏导数存在性与可微性.

[答案]: D.

[解析]: 先求 f'_x 和 f'_y .

当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时

$$f'_x = \frac{4x^3(x^2 + y^2) - 2x(x^4 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f'_y = \frac{-4y^3(x^2 + y^2) - 2y(x^4 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$$

由

$$f(x, 0) = x^2 (\forall x), \quad f(0, y) = -y^2 (\forall y)$$

$\Rightarrow$

$$f'_x(0, 0) = 0, \quad f'_y(0, 0) = 0$$

注意

$$\left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq 1$$

$\Rightarrow$

$$|f'_x| \leq 4|x| + 2|x| + 2|x| = 8|x|$$

$$|f'_y| \leq 4|y| + 2|y| + 2|y| = 8|y|$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f'_x = 0 = f'_x(0, 0), \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f'_y = 0 = f'_y(0, 0)$$

因此 $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 连续, 从而 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 可微. 选(D).

[易错点]: 求偏导数时运算易出错; 判断偏导数连续性时, 对极限计算和不等式放缩把握不准, 或混淆可微判定条件.



2. (数一二三) 数列极限 $I = \lim_{n \rightarrow \infty} n \tan(\pi \sqrt{n^2 + 1}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

[知识点]: 利用正切函数周期性、恒等变形(如根式有理化)、等价无穷小替换, 计算数列极限。

[答案]: $\frac{\pi}{2}$.

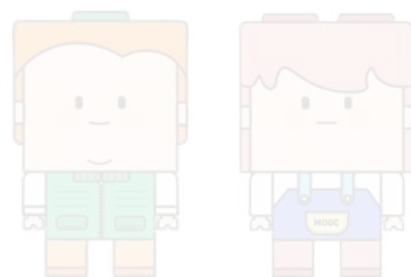
[解析]: $I = \lim_{n \rightarrow \infty} n \tan(\pi \sqrt{n^2 + 1} - n\pi)$ (周期性)

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \tan\left(n\pi \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - n\pi\right) \quad (\text{恒等变形})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \tan\left[n\pi \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1}\right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \cdot \frac{\frac{\pi}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} \right] = \frac{\pi}{2} \quad (\text{等价无穷小因子替换})$$

[易错点]: 变形时对周期性和根式处理不当, 等价无穷小替换时机或对象错误, 导致计算出错。



3.(数一二三)已知向量 $\beta = (1, a, -1)^T$ 可以由 $\alpha_1 = (a+2, 7, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, -1, 2)^T$ 线性表出, 则 $a =$ _____.

[知识点]: 向量线性表出与线性相关的关系, 利用三阶向量组线性相关的充要条件(行列式为0)求解参数。

[答案]: 3 或 -4.

[解析]: 因为对任何 a , α_1, α_2 分量不成比例, 故线性无关, 所以 β 可由 α_1, α_2 线性表出的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ 线性相关. 又因 $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ 是3个三维向量, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ 线性相关的充分必要条件是行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \beta| = 0$.

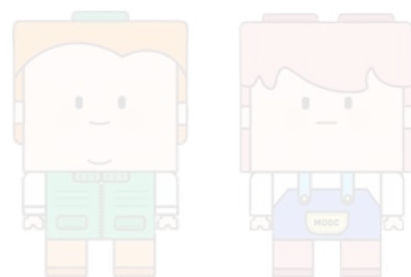
由于

$$|\alpha_1, \alpha_2, \beta| = \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & a \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+2 & -2a-3 & a+3 \\ 7 & -15 & a+7 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2(a^2 + a - 12).$$

所以 $a = 3$ 或 $a = -4$.

[易错点]: 计算行列式时易出错, 或对线性表出与线性相关的关系理解不透彻, 导致参数求解错误。



4. (数一二三) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $\sin xy + y \ln z - xz = 1$ 确定, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \Big|_{(0,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

[知识点]: 多元隐函数的求导

[解析]: 答案: $e - 3e^2$

将 $x = 0, y = 1$ 代入方程 $\sin xy + y \ln z - xz = 1$ 可得 $\ln z = 1$, 解得 $z = e$.

对已知方程两端分别关于 x 和关于 y 求偏导数, 可得

$$y \cos xy + \frac{y}{z} \frac{\partial z}{\partial x} - z - x \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad x \cos xy + \ln z + \frac{y}{z} \frac{\partial z}{\partial y} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

将 $x = 0, y = 1, z = e$ 代入上述两式, 可得 $1 + \frac{1}{e} \frac{\partial z}{\partial x} - e = 0, \quad 1 + \frac{1}{e} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, 解得

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,1)} = e^2 - e, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(0,1)} = -e$$

对 $x \cos xy + \ln z + \frac{y}{z} \frac{\partial z}{\partial y} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ 两端关于 x 求偏导数, 可得

$$\cos xy - xy \sin xy + \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{y}{z^2} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{y}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} - x \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0$$

将 $x = 0, y = 1, z = e, \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,1)} = e^2 - e, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(0,1)} = -e$ 代入上式, 可得

$$3e - 1 + \frac{1}{e} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0$$

解得 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \Big|_{(0,1)} = e - 3e^2$.

[易错点]: 对于没法解出显函数的多元函数, 二阶导数的求法可参考上述思路。



5. (数一二三) 设函数 $f(x) = k - xe^{-kx^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上没有零点, 则 k 的取值范围是 ____.

[知识点]: 函数的零点求参数问题

[解析]: 答案: $k \leq 0$ 或 $k > (2e)^{\frac{1}{3}}$

计算 $f'(x)$ 得 $f'(x) = -e^{-kx^2} + (-x)(-2kx)e^{-kx^2} = (2kx^2 - 1)e^{-kx^2}$.

可知, 当 $k \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) < f(0) = k \leq 0$,

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上没有零点, 故 $k \leq 0$ 符合要求.

当 $k > 0$ 时, $x = \frac{1}{\sqrt{2k}}$ 为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的唯一驻点. 当 $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2k}}$ 时, $f'(x) < 0$,

$f(x)$ 单调递减; 当 $x > \frac{1}{\sqrt{2k}}$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增. 故 $f(\frac{1}{\sqrt{2k}})$ 为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$

上的最小值, 且

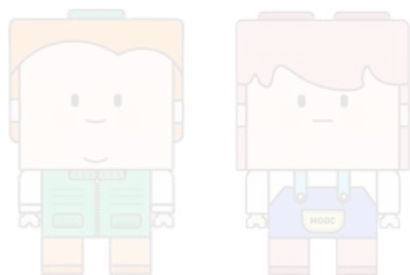
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = k > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{kx^2}} = k > 0$$

于是, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上没有零点当且仅当 $f(\frac{1}{\sqrt{2k}}) > 0$

由 $f(\frac{1}{\sqrt{2k}}) = k - \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-\frac{1}{2}} > 0$, 可得 $k^{\frac{3}{2}} > (2e)^{-\frac{1}{2}}$, 即 $k > (2e)^{-\frac{1}{3}}$

综上所述, $k \leq 0$ 或 $k > (2e)^{-\frac{1}{3}}$

[易错点]: 对于函数本身直接进行的讨论, 更像是高中题型, 但考研也会涉及, 需要同学们的耐心。



6. (数一二三) 设平面有界区域 D 位于第一象限, 由曲线 $(x^2 + y^2)^4 = x^6 + y^6$ 与

$4(x^2 + y^2)^4 = x^6 + y^6$ 以及坐标轴围成, 计算 $\iint_D \frac{\sqrt{x^6 + y^6}}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$

[知识点]: 极坐标系下二重积分的计算, 华里士公式

[解析]: 答案: $\frac{5\pi}{32}$

在极坐标系下, 曲线 $(x^2 + y^2)^4 = x^6 + y^6$ 与 $4(x^2 + y^2)^4 = x^6 + y^6$ 的极坐标方程分别为

$$r^8 = r^6 \cos^6 \theta + r^6 \sin^6 \theta, \quad 4r^8 = r^6 \cos^6 \theta + r^6 \sin^6 \theta$$

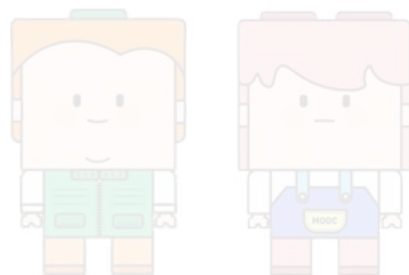
即 $r = \sqrt{\cos^6 \theta + \sin^6 \theta}, r = \frac{1}{2} \sqrt{\cos^6 \theta + \sin^6 \theta}$. 区域 D 在极坐标系下的表示为

$$D = \left\{ (r, \theta) \mid \frac{1}{2} \sqrt{\cos^6 \theta + \sin^6 \theta} \leq r \leq \sqrt{\cos^6 \theta + \sin^6 \theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

因此,

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\sqrt{x^6 + y^6}}{(x^2 + y^2)^2} dx dy & \stackrel{\text{极坐标}}{=} \iint_D \frac{r^3 \sqrt{\cos^6 \theta + \sin^6 \theta}}{r^4} \cdot r dr d\theta = \iint_D \sqrt{\cos^6 \theta + \sin^6 \theta} dr d\theta \\ & = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^6 \theta + \sin^6 \theta} d\theta \int_{\frac{1}{2}\sqrt{\cos^6 \theta + \sin^6 \theta}}^{\sqrt{\cos^6 \theta + \sin^6 \theta}} dr \\ & = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^6 \theta + \sin^6 \theta} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\cos^6 \theta + \sin^6 \theta} d\theta \\ & = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^6 \theta + \sin^6 \theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \theta d\theta \\ & = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{32} \end{aligned}$$

[易错点]: 弄清楚积分区域, 以及华里士公式要牢固掌握, 否则现推会非常费时。



7. (数一三) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 总体 X 的分布律为

X	0	1	2
P	$1 - \frac{3p}{2}$	p	$\frac{p}{2}$

已知利用中心极限定理可得 $P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 150\right\}$ 的近似值为 $\Phi(10\sqrt{2})$, 其中 $\Phi(x)$ 表示标准正态分布的分布函数, 则 $p = \underline{\hspace{2cm}}$.

[知识点]: 中心极限定理

[解析]: 答案: $\frac{1}{4}$

分别计算 EX, DX

$$E(X) = 0 \cdot \left(1 - \frac{3p}{2}\right) + 1 \cdot p + 2 \cdot \frac{p}{2} = 2p$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0^2 \cdot \left(1 - \frac{3p}{2}\right) + 1^2 \cdot p + 2^2 \cdot \frac{p}{2} - (2p)^2 = 3p - 4p^2$$

由已知条件, $n = 100$. 根据列维-林德伯格中心极限定理, $\sum_{i=1}^{100} X_i$ 近似服从均值为 $200p$,

方差为 $100(3p - 4p^2)$ 的正态分布, 于是 $\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 200p}{10\sqrt{3p - 4p^2}}$ 近似服从 $N(0, 1)$, 从而

$$P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 150\right\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 200p}{10\sqrt{3p - 4p^2}} \leq \frac{150 - 200p}{10\sqrt{3p - 4p^2}}\right\} = \Phi(10\sqrt{2})$$

由此可得 $\frac{150 - 200p}{10\sqrt{3p - 4p^2}} = 10\sqrt{2}$, 化简可得 $48p^2 - 48p + 9 = 0$, 配方可得

$$\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}, \text{ 解得 } p = \frac{1}{4} \text{ 或 } p = \frac{3}{4}. \text{ 由于 } P\{X = 0\} = 1 - \frac{3p}{2} \geq 0, \text{ 故 } p \leq \frac{2}{3}, \text{ 因此 } p = \frac{1}{4}$$

[易错点]: 掌握中心极限定理的使用规则, 正确解出一元二次方程并根据具体情况对根做出取舍。

