

第一章 函数 极限 连续

一、理论框架

二、考试大纲

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的在关系.
6. 掌握极限的性质及四则运算法则.
7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.
8. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限.
9. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并会应用这些性质.

三、知识体系

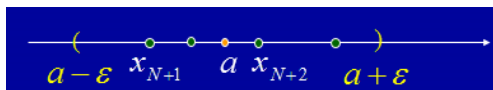
专题一 数列极限的概念

数列极限的定义 若存在常数 a ，对给定的任意小的正数 ε ，存在正整数 N ，当 $n > N$ 时， $|x_n - a| < \varepsilon$ ，

则称 $\{x_n\}$ 极限为 a 或 $\{x_n\}$ 收敛于 a ，记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 。

数列极限可以简单的表达为： $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ 正整数 N ，当 $n > N$ 时， $|x_n - a| < \varepsilon$ 。

数列极限的几何意义 当 $n > N$ 时，所有的 x_n 都落在区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 内，只有有限项（至多 N 项）在区间外。



【例 1.1】(1999, 数二) “任意给定 $\varepsilon \in (0, 1)$, 存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$ ” 是 $\{x_n\}$

收敛于 a 的【 】

- (A) 充分条件但非必要条件 (B) 必要条件但非充分条件
(C) 充要条件 (D) 既非充分条件又非必要条件

【详解】

【例 1.2】(2014, 数三) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a (a \neq 0)$, 则当 n 充分大时有【 】

- (A) $|a_n| > \frac{|a|}{2}$ (B) $|a_n| < \frac{|a|}{2}$ (C) $a_n > a - \frac{1}{n}$ (D) $a_n < a + \frac{1}{n}$

【详解】

数列极限的性质

(1) (唯一性) 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则极限唯一;

(2) (有界性) 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 有界;

(3) (局部保号性) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 且 $a > 0$ (或 $a < 0$), 则存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, $x_n > 0$

(或 $x_n < 0$).

推论: 若存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, $x_n > 0$ (或 $x_n < 0$), 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $a \geq 0$ (或 $a \leq 0$).

数列极限的充要条件 $\{x_n\}$ 收敛于 $a \Leftrightarrow \{x_n\}$ 的任意子列均收敛于 a .

【例 1.3】(2015, 数三) 设 $\{x_n\}$ 为数列, 则下列命题错误的是【 】

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$

(B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

(C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$

(D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

【例 1.4】(2006, 数三) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【详解】

专题二 函数极限的概念

函数极限的定义

(1) $x \rightarrow x_0$ 的极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, } |f(x) - A| < \varepsilon;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } x_0 < x < x_0 + \delta \text{ 时, } |f(x) - A| < \varepsilon;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } x_0 - \delta < x < x_0 \text{ 时, } |f(x) - A| < \varepsilon;$$

(2) $x \rightarrow \infty$ 的极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{ 当 } |x| > X \text{ 时, } |f(x) - A| < \varepsilon;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{ 当 } x > X \text{ 时, } |f(x) - A| < \varepsilon;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{ 当 } x < -X \text{ 时, } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

函数极限的性质 (以 $x \rightarrow x_0$ 为例)

(1) (唯一性) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则极限唯一;

(2) (局部有界性) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则存在 $M > 0$ 和 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x)| \leq M$;

(3) (局部保号性) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$);

推论: 若存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$), 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

(4) (Heine 定理) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\{x_n\}$ 为 $f(x)$ 的定义域内任意收敛于 x_0 的数列, 且

$x_n \neq x_0 (n=1, 2, \dots)$, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

【例 1.5】设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 均存在, 则下列命题错误的是【 】

- (A) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, 则存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) > g(x)$
- (B) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, 则存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) \geq g(x)$
- (C) 若存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) > g(x)$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- (D) 若存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) \geq g(x)$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

函数极限的充要条件

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$$

【例 1.6】(2021, 数三) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\alpha \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|)^{\frac{1}{x}} \right]$ 存在, 求 α 的值.

【详解】



极限的四则运算法则 (以 $x \rightarrow x_0$ 为例) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = AB;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0).$$

推论: (1) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$;

(2) (提非零因子) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = A \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$;

(3) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$;

(4) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

【例 1.7】(1997, 数一) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【详解】

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$$

【例 1.8】(2010, 数三) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - a \right) e^x \right] = 1$, 则 $a = \underline{\hspace{1cm}} \text{ 【 } \quad \text{ 】}$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【详解】

专题三 无穷小与无穷大

(一) 无穷小 (以 $x \rightarrow x_0$ 为例)

无穷小的定义 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则称 $f(x)$ 为 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

无穷小的性质

- (1) 有限个无穷小的和为无穷小;
- (2) 有限个无穷小的积为无穷小;
- (3) 无穷小与有界函数的积为无穷小;
- (4) (极限与无穷小的关系) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$, 其中 α 为 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

无穷小阶的比较 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$.

- (1) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$, 则称 $\beta(x)$ 为 $\alpha(x)$ 的高阶无穷小, 记作 $\beta(x) = o(\alpha(x))$;
- (2) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = c \neq 0$, 则称 $\beta(x)$ 为 $\alpha(x)$ 的同阶无穷小;

特别的, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$, 则称 $\beta(x)$ 为 $\alpha(x)$ 的等价无穷小, 记作 $\beta(x) \sim \alpha(x)$;

(3) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha^k(x)} = c \neq 0$, 则称 $\beta(x)$ 为 $\alpha(x)$ 的 k 阶无穷小.

高阶无穷小的性质 (当 $x \rightarrow 0$ 时)

(1) $o(x^m) + o(x^n) = o(x^l)$, 其中 $l = \min\{m, n\}$, 特别的, $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$;

(2) $k \cdot o(x^n) = o(x^n)$;

(3) $o(x^m) \cdot x^n = x^m \cdot o(x^n) = o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$;

(4) $\frac{o(x^m)}{x^n} = o(x^{m-n}) (m > n)$.

【例 1.9】(2013, 数三) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列式子错误的是 【 】

(A) $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$

(B) $o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$

(C) $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$

(D) $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$

等价无穷小的充要条件 $\beta(x) \sim \alpha(x) \Leftrightarrow \beta(x) = \alpha(x) + o(\alpha(x))$

【例 1.10】(2022, 数二、三) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x), \beta(x)$ 为非零无穷小, 则下列命题

①若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, 则 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$

②若 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$, 则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$

③若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, 则 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$

④若 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$, 则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$

真命题的序号是 【 】

(A) ①③

(B) ①④

(C) ①③④

(D) ②③④

【详解】

(二) 无穷大 (以 $x \rightarrow \infty$ 为例)

无穷大的定义 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X > 0, \text{当 } |x| > X \text{ 时, } |f(x)| > M$.

无穷大的性质

(1) 无穷大的倒数是无穷小, 非零无穷小的倒数是无穷大;

(2) 无穷大一定是无界函数, 但无界函数不一定是无穷大.

例如: 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x) = x \sin x$ 是无界函数, 但不是无穷大.

无穷大阶的比较

(1) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\ln^\alpha x \ll x^\beta \ll a^x \ll x^x (\alpha > 0, \beta > 0, a > 1)$;

(2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\ln^\alpha n \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n (\alpha > 0, \beta > 0, a > 1)$.

【例1.11】(2010, 数三) 设 $f(x) = \ln^{10} x$, $g(x) = x$, $h(x) = e^{\frac{x}{10}}$, 则当 x 充分大时有 【 】

(A) $g(x) < h(x) < f(x)$

(B) $h(x) < g(x) < f(x)$

(C) $f(x) < g(x) < h(x)$

(D) $g(x) < f(x) < h(x)$

+ 专题四 洛必达法则

洛必达法则 (以 $x \rightarrow x_0$ 为例) 设 $f(x), g(x)$ 满足:

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ (或 ∞);

(2) $f(x), g(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内可导, 且 $g'(x) \neq 0$;

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或 ∞).

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

【例 1.12】设 $\alpha > 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = \underline{\hspace{2cm}}$.

【详解】

【总结】设 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln^\beta x = 0$.

【例 1.13】(1998, 数一、二) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【详解】

+ 专题五 等价代换

当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$(1) x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x), (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, a^x - 1 \sim x \ln a;$$

$$(2) e^x - 1 - x \sim x - \ln(1+x) \sim 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2};$$

$$(3) x - \sin x \sim \arcsin x - x \sim \frac{x^3}{6}, \tan x - x \sim x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}.$$

【评注】 等价代换求极限:

(1) 乘除可以代换, 加减最简形式不抵消时可以代换;

例如: $1 - \cos x + x^2 \sim \frac{x^2}{2} + x^2 = \frac{3}{2}x^2.$

(2) $x \rightarrow 0$ 可以推广为 $\square \rightarrow 0$.

例如: $\sin x - \sin \sin x \sim \frac{1}{6} \sin^3 x \sim \frac{x^3}{6}.$

【例 1.14】 (2008, 数一、二) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - \sin \sin x) \sin x}{x^4}.$

【详解】

补例 (2000, 数二) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

补例 (2024, 数一) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax^2)^{\sin x} - 1}{x^3} = 6$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

补例 (2025, 数一) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{\ln x \cdot \ln(1-x)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【例 1.15】 (2015, 数一、三) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【详解】

【例 1.16】 (2008, 数三) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}.$

【详解】

【例 1.17】(2009, 数三) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【详解】

【例 1.18】(1999, 数二) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2}.$

【详解】

专题六 Taylor 公式

Taylor 公式 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处 n 阶可导, 则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o(x-x_0)^n$$

称其为带 Peano 余项的 Taylor 公式.

特别的, 当 $x_0 = 0$ 时,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

称其为带 Peano 余项的 Maclaurin 公式.

八个常见函数的 Taylor 公式

(1) $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + o(x^2);$

(2) $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3);$

(3) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + o(x^2),$ 特别的, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2);$

(4) $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4);$

$$(5) \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3);$$

$$(6) \arcsin x = x + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3);$$

$$(7) \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3);$$

$$(8) \arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

【评注】Taylor 公式求极限:

(1) 分子阶数不低于分母阶数, 加减不抵消;

(2) $x \rightarrow 0$ 可以推广为 $\square \rightarrow 0$.

例如: $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + o(x^4)$.

【例 1.19】(2012, 数三) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4}$.

【详解】

中国大学MOOC · 网易有道考研

【例 1.20】当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{-x^2} - \cos \sqrt{2}x \sim cx^k$, 求 c, k .

【详解】

【例 1.21】(2015, 数一、二、三) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x \sim cx^3$, 求 a, b, c .

【详解】

【例 1.22】(2013, 数二、数三) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \sim ax^n$, 求 a 与 n 的值.

【详解】

专题七 七类未定式

(一) $\frac{0}{0}$ 型

方法：洛必达、等价代换、或 Taylor 公式

【例 1.23】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{1 - \sqrt{1 - x^2}}$.

【详解】

【例 1.24】求下列极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan 2x - \arctan x}{\frac{\pi}{2} - \arctan x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\arctan 2x - \arctan x}{\frac{\pi}{2} + \arctan x}.$$

【详解】(1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan 2x - \arctan x}{\frac{\pi}{2} - \arctan x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{2x}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}\right)}{\arctan \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2x}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\arctan 2x - \arctan x}{\frac{\pi}{2} + \arctan x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(-\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{2x}\right) - \left(-\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}\right)}{-\arctan \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2x}}{-\frac{1}{x}} = -\frac{1}{2}$$

(二) $\frac{\infty}{\infty}$ 型

方法：洛必达或抓大头

【例 1.25】(1997, 数二) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【详解】

【例 1.26】(2007, 数三) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} (\sin x + \cos x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【详解】

【例 1.27】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln(1+2^x)}{x + \ln(1+3^x)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【详解】

(三) $0 \cdot \infty$ 型

方法: 同除简单因式, 转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型

【例 1.28】计算下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\frac{\pi}{2} - \arctan 2x^2 \right) = \underline{\hspace{2cm}};$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{1+x} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【详解】

中国大学MOOC · 网易有道考研

(四) $\infty - \infty$ 型

方法: 通分、有理化或倒代换, 转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型

【例 1.29】(2020, 数一) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$

【详解】

【例 1.30】(北京市 1997 年竞赛题) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【详解】

【例 1.31】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$

【详解】

(五) 0^0 或 ∞^0 型 (以 $x \rightarrow x_0$ 为例)

方法: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$ (或 ∞), $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) \ln u(x)}$.

【例 1.32】 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x})^{\tan x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【详解】

【例 1.33】 计算下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}};$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{\ln x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【详解】

(六) 1^∞ 型 (以 $x \rightarrow x_0$ 为例)

方法: (1) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = \infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} [1 + u(x)]^{v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)v(x)}$;

(2) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = \infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} v(x)[u(x)-1]}$.

【例 1.34】 (2022, 数二、三) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+e^x}{2} \right)^{\cot x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【详解】

【例 1.35】(2010, 数一) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x = \text{【 】}$

- (A) 1 (B) e (C) e^{a-b} (D) e^{b-a}

【详解】

【例 1.36】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \tan \frac{1}{n} \right)^{n^2}$.

【详解】



夹逼准则

(1) 若存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, $y_n \leq x_n \leq z_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$;

(2) (以 $x \rightarrow x_0$ 为例) 若存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

【例 1.37】(2000, 数三) 设对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$,

则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 【 】

- (A) 存在且等于零 (B) 存在但不一定为零
(C) 一定不存在 (D) 不一定存在

【详解】

【例 1.38】设 $a_1, a_2, \dots, a_m \geq 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【详解】

补例 设 $a > b > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^{-n} + b^{-n}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

补例 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{3n}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

补例 设 $x \geq 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = \underline{\hspace{2cm}}$.

专题九 单调有界定理

单调有界定理 设 $\{x_n\}$ 单调递增有上界或单调递减有下界, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

递推数列 $x_{n+1} = f(x_n)$ 极限的求法

- (1) 放缩, 证明有界性;
- (2) 作差、作商或求导证明单调性;
- (3) 若 $\{x_n\}$ 单调, 由单调有界定理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 等式 $x_{n+1} = f(x_n)$ 两端取极限, 得 $a = f(a)$, 解得 a .

若 $\{x_n\}$ 不单调, 先设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 再利用夹逼准则证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

【例 1.39】(2002, 数二) 设 $0 < x_1 < 3$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)} (n=1, 2, \dots)$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

【详解】

【例 1.40】(2006, 数一、二) 设 $0 < x_1 < \pi$, $x_{n+1} = \sin x_n (n=1, 2, \cdots)$.

(I) 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限;

(II) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

【详解】

(北京市 1997 年竞赛题) 设 $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sin x_n (n=1, 2, \cdots)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$ _____.

专题十 定积分定义

定积分定义求 n 项和的极限

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \frac{1}{n} = \int_0^1 f(x) dx$, 其中 $\xi_i \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right]$.

特别的, 区间 $[0, 1]$, n 等分, 取端点, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} = \int_0^1 f(x) dx$.

【例 1.41】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) =$ _____.

【详解】

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2$$

【例 1.42】(2012, 数二) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right) =$ _____.

【详解】

(同济大学 2011) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right) =$ _____.

【例 1.43】(2016, 数二、三) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + \cdots + n \sin \frac{n}{n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【详解】

(浙江省 2009 年竞赛题) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i \sin \frac{i\pi}{n} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(同济大学 2010) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \cos \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \cos \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n}{n} \cos \frac{n}{n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2025, 数二) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left[\ln \frac{1}{n} + 2 \ln \frac{2}{n} + \cdots + (n-1) \ln \frac{n-1}{n} \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$

二重积分定义求 n 项和的极限

设 $f(x, y)$ 在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上连续, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \frac{1}{n^2} = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$, 其中

$$\xi_i \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right], \eta_j \in \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right].$$

特别的, 区域 $[0, 1] \times [0, 1]$, n 等分, 取端点, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) \frac{1}{n^2} = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$.

【例 1.44】(2010, 数一、二) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} = \underline{\hspace{2cm}}$

(A) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$

(B) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$

(C) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$

(D) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$

【详解】

补例 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{ij}{n^4} = \underline{\hspace{2cm}}.$

专题十一 连续

连续的定义 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 或 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$, 则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处

连续.

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处右连续.

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处左连续.

若 $f(x)$ 在 (a, b) 内每个点都连续, 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续.

若 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 在 $x = a$ 处右连续, 在 $x = b$ 处左连续, 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

连续的性质

- (1) 连续函数经过有限次四则运算或复合运算得到的函数仍连续;
- (2) 基本初等函数在定义域内均连续, 初等函数在定义区间内均连续.

例如: $f(x) = \sqrt{x^2(x-1)^3}$ 在 $[1, +\infty)$ 上连续.

【例 1.45】 (2000, 数二) 设 $f(x) = \frac{x}{a + e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, 则 a, b 满足 **【 】**

- (A) $a < 0, b < 0$ (B) $a > 0, b > 0$
 (C) $a \leq 0, b > 0$ (D) $a \geq 0, b < 0$

【详解】

连续的充要条件 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 $x = x_0$ 处既左连续又右连续.

【例 1.46】 (2018, 数二) 设 $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2 - ax, & x \leq -1 \\ x, & -1 < x < 0 \\ x - b, & x \geq 0 \end{cases}$. 若 $f(x) + g(x)$ 在 R 上

连续, 则 **【 】**

- (A) $a = 3, b = 1$ (B) $a = 3, b = 2$
 (C) $a = -3, b = 1$ (D) $a = -3, b = 2$

【详解】

闭区间连续函数的定理

(1) (最值定理) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 存在最大值 M 与最小值 m ;

推论: (有界定理) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 有界.

(2) (介值定理) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 最大值为 M , 最小值为 m , 则对任意 $m \leq \mu \leq M$, 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = \mu$;

推论: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则对任意 $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$, 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

(3) (零点定理) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)f(b) < 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

【例 1.47】(北京市 2008 年竞赛题) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(0) = f(1)$. 证明: 对任意 $n \geq 2$,

存在 $\xi \in [0, 1]$, 使得 $f\left(\xi + \frac{1}{n}\right) = f(\xi)$.

【详解】



专题十二 间断点

间断点的定义 若 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义, 且 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处不连续, 则称点 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

第一类间断点的定义 左右极限均存在的间断点.

- (1) 可去间断点: 左右极限均存在且相等的间断点;
- (2) 跳跃间断点: 左右极限均存在但不相等的间断点.

第二类间断点的定义 左右极限至少有一个不存在的间断点.

- (1) 无穷间断点: 左右极限至少有一个为无穷的间断点;

例如: $x = 0$ 为 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的无穷间断点.

- (2) 震荡间断点: 左右极限至少有一个不存在, 但不是无穷的间断点.

例如: $x=0$ 为 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 的震荡间断点.

【例 1.48】(2008, 数二) 设 $f(x)=\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$, 则 $f(x)$ 有【 】

- (A) 1 个可去间断点, 1 个跳跃间断点
- (B) 1 个可去间断点, 1 个无穷间断点
- (C) 2 个跳跃间断点
- (D) 2 个无穷间断点

【详解】

