

专题 13 定积分几何应用的解题方法（紧密）

本专题的题目不多，但涵盖了定积分几何应用中几乎所有的重要考法——**吃透，高分！**

考法一、平面图形的面积.....	1
(一) 有限区域.....	1
(二) 无限区域.....	1
考法二、旋转体的体积.....	1
(一) 绕着水平轴或竖直轴.....	1
(二) 绕着斜直线旋转（二重积分法）.....	2
考法三、平面曲线的弧长和旋转曲面的面积（数一、数二）.....	2

注：定积分几何应用考得并不难，大家一定要把**3月的基础讲义**和**4月的进阶讲义**，结合起来学！基础讲义里，已经把所有的公式推导了一遍，并且每个公式都设置了例题，所以这里只讲综合题。

考法一、平面图形的面积

(一) 有限区域

例题 1 求两椭圆 $x^2 + \frac{1}{3}y^2 = 1$ 和 $\frac{1}{3}x^2 + y^2 = 1$ 所围成的公共部分 D 的面积。

例题 2 求心形线 $r = 1 + \cos\theta$ 与 $r = 3\cos\theta$ 所围成公共部分图形的面积。

(二) 无限区域

例题 3 设 $x \geq 0$, $f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{xt}$, $g(x) = \int_0^x f(u) du$.

(1) 求 $y = g(x)$ 在 $x \geq 0$ 部分的水平渐近线；

(2) 求 $y = g(x)$ 与其水平渐近线及 y 轴在 $x \geq 0$ 部分所围成的图形的面积 A 。

例题 4 (2023 年) 已知平面区域 $D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}, x \geq 1 \right\}$.

(1) 求 D 的面积； (2) 求 D 绕 x 轴旋转所成的旋转体体积。

例题 5 求曲线 $y = e^{-x} \sin x (x \geq 0)$ 与 x 轴之间图形的面积。

考法二、旋转体的体积

(一) 绕着水平轴或竖直轴

例题 6 (2024 年) 设 $t > 0$, 平面区域 D 由曲线 $y = \sqrt{x} e^{-x}$ 与直线 $x = t$, $x = 2t$ 及 x 轴围成, D 绕 x 轴旋转

一周所成旋转体的体积为 $V(t)$, 求 $V(t)$ 的最大值。

例题 7 摆线 $L: \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0)$. 设 L 与 x 轴围成的图形为 D .

求 D 绕着 x 轴旋转一周而成的旋转体体积 V_x 和绕着 y 轴旋转一周而成的旋转体体积 V_y .

例题 8 由曲线 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 与 $y \geq x$ 确定的平面图形绕直线 $x = 2$ 旋转而成的体积.

类题 求曲线 $y = 3 - |x^2 - 1|$ 与 x 轴围成的封闭图形绕 $y = 3$ 旋转所得的旋转体体积.

例题 9 设圆周 $x^2 + y^2 = 16$ 与直线 $L: \sqrt{3}x + y = 4$ 围成的较小的那块弓形状的图形为 D , 求 D 绕直线 L 旋转一周生成的旋转体的表面积.

(二) 绕着斜直线旋转 (二重积分法)

涉及到二重积分, 以后再讲.

考法三、平面曲线的弧长和旋转曲面的面积 (数一、数二)

例题 10 摆线的参数方程为 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi, a > 0$. 求:

- (1) 该弧段的长度;
- (2) 该弧段绕 x 轴旋转一周所成的旋转曲面的面积;
- (3) 该弧段绕 y 轴旋转一周所成的旋转曲面的面积.

类题 设星形线的方程为 $L: \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} (a > 0)$, 求:

- (1) 它围成的面积;
- (2) 它的弧长;
- (3) 它绕着 x 轴旋转一周围成的旋转体的体积和侧面积.