专题 5 中值定理的解题方法（紧密）

以下的 7 个考法，涵盖了过去 39 年考研数学的中值定理中几乎所有的重要题型——**吃透，高分**！

考法一、基本定理及其证明 2
考法二、如何构造辅助函数？ 2
（一）观察法 2
（二）公式法（积分因子法） 3
（三）微分方程反解 C 法 4
考法三、双中值问题 4
（一）未要求两个中值不同 4
（二）要求两个中值不同 4
情形一：两个区间上，各产生一个中值 4
情形二：区间分段点成为了第一个中值，然后再在子区间上产生第 2、3 个中值 5
考法四、泰勒中值定理的相关证明（用于出现高阶导时） 5
考法五、计算中值 ξ 中参数 θ 的极限（核心：再展开一次，并剥离 θ ） 6
考法六、辅助多项式法（选学，核心就是多项式拟合） 7
考法七、广义罗尔定理（选学，核心就是补充定义） 7
（一）有限区间的广义罗尔定理 7
（二）无限区间的广义罗尔定理 7

考法一、基本定理及其证明

例题 1 (教材) 叙述并证明**罗尔定理**.

例题 2 (2009 年) 叙述并证明**拉格朗日中值定理**.（这只是当年的第 1 问，第 2 问是证明导数极限定理）

类题 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导. 证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$.

例题 3 (2008 年) 叙述并证明**积分中值定理**.

注：用介值定理证明积分中值定理，只能得到 ξ 属于闭区间 $[a,b]$；但用拉格朗日中值定理证明，可以把 ξ 的范围加强到开区间 (a,b). 开区间更小、更精确，所以凯哥以后一律默认 ξ 在开区间 (a,b) 内.

类题 (2010 年) 设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 二阶可导，$2f(0)=\int_0^2 f(x)dx=f(2)+f(3)$，

证明：$\exists\xi\in(0,3)$，s.t. $f''(\xi)=0$.

注：见到不同点处的函数值之和，往往可以使用介值定理，将它们合并为同一个点处的函数值.

例题 4 (教材) 叙述并证明**柯西中值定理**.

类题 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，$g'(x)\neq 0$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

注：后面我们会反复强调：构造辅助函数 $F(x)$ 的关键，在于“去思考你要证的东西是怎么来的”.

考法二、如何构造辅助函数？

初学者在学习中值定理证明题时会发现，参考答案的第一步，往往会“从天而降”一个神奇的 $F(x)$，然后对 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上使用罗尔定理，得到 $F'(\xi)=0$，对 $F'(\xi)=0$ 稍作变形，居然就能得到欲证结论

这个 $F(x)$ 就是所谓的“辅助函数”，比如要证明 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$，就需要构造 $F(x)=xf(x)$，但对于更复杂的证明题，我们该如何找到所需的辅助函数呢？凯哥在这里提出三个方法——

（一）观察法

请记住：构造辅助函数 $F(x)$ 的关键，在于“去思考你要证的东西是怎么来的”，也就是“倒推”!

例题 5 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导，$f(0)=f(2)$，证明：

(1) 存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $f'(\xi)=\xi-1$；

(2) 存在 $\eta\in(0,2)$，使得 $\eta f''(\eta)+f'(\eta)-2\eta+1=0$.

例题 6 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导，$f(0)=0$，$\forall x\in(0,1]$，$f(x)>0$. 证明：$\exists\xi\in(0,1)$，s.t. $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$.

例题 7 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内可导，且 $b-a\geq 4$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)<1+f^2(\xi)$.

例题 8 (1995 年) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导，$g''(x)\neq 0$，$g(a)=g(b)=f(a)=f(b)=0$，证明：

(1) 在 (a,b) 内，$g(x)\neq 0$；　　(2) $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

（二）公式法（积分因子法）

请思考例题 9 的辅助函数构造，和前面的几道题有什么明显区别——

例题 9 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)内可导，$f(a)=f(b)$，证明：

(1) 存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)+f(\xi)=0$；

(2) 存在$\eta\in(a,b)$，使得$\eta f'(\eta)+2f(\eta)=0$.

注： 本题的难点在于，无论是$f'(\xi)+f(\xi)=0$还是$\eta f'(\eta)+2f(\eta)=0$，都不是辅助函数用完罗尔定理以后的“第一形态”，而是对罗尔定理之后的式子约分以后的结果！

所以，为了从欲证结论中，探索出辅助函数$F(x)$的表达式，**我们需要把约掉的因子补回来！**

对于第(1)问，两边乘以e^{ξ}后可知，欲证结论恰好是$F(x)=\mathrm{e}^{x}f(x)$用完罗尔定理以后的结果；

对于第(2)问，两边乘以η后可知，欲证结论恰好是$G(x)=x^{2}f(x)$用完罗尔定理以后的结果.

但是，难道每次我们都需要“猜”，才能知道被约掉的是什么吗？不！可以算出来——

例题 10 请验证：所有形如“证明：$f'(\xi)+f(\xi)g(\xi)=0$”的题，都可以构造$F(x)=f(x)\mathrm{e}^{\int g(x)\mathrm{d}x}$，并用该结论验证例题 9 中的两个辅助函数.

注： 这个神奇的“$\mathrm{e}^{\int g(x)\mathrm{d}x}$”，叫做积分因子，寓意是“在$f'(x)+f(x)g(x)$上乘以$\mathrm{e}^{\int g(x)\mathrm{d}x}$后，得到的$f'(x)\cdot\mathrm{e}^{\int g(x)\mathrm{d}x}+f(x)\cdot g(x)\mathrm{e}^{\int g(x)\mathrm{d}x}$，恰好可以直接积分变成$f(x)\mathrm{e}^{\int g(x)\mathrm{d}x}$”.

例题 11 设$f(x)$在$[0,1]$可导，$f(0)f(1)<0$. 证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$\xi f'(\xi)+(4-\xi)^{2}f(\xi)=0$.

例题 12 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，$f(0)=0,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=2,\ f(1)=1$.

证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)-f(\xi)+\xi=0$.

例题 13 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$f(a)=f(b)=0$，证：$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)+f^{2}(\xi)=0$.

注： 若公式中的$g(x)$是一个抽象函数，则需要将公式修改为$F(x)=f(x)\mathrm{e}^{\int_a^x g(t)\mathrm{d}t}$，写成变限积分的目的是为了方便带值计算！现在你能理解“不定积分”中的“不定”是什么意思了吗？$\int g(x)\mathrm{d}x$不是一个具体函数，而是一簇函数，不方便带值，但$\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$就是具体函数了！

例题 14 设$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，$f(0)=f(1)$，证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=(\mathrm{e}^{-\xi}-1)f''(\xi)$.

类题 设$f(x)$在$[0,1]$二阶可导，$f(0)=0,\ f(1)=1$. 证：$\exists\xi\in(0,1),\ \xi f''(\xi)+(1+\xi)f'(\xi)=1+\xi$.

例题 15 (1999 年) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导，$f(0)=f(1)=0$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$.

证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

例题 16 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=f(b)=0$，证明：

(1) 存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)-3f'(\xi)+2f(\xi)=0$；

(2) 存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $f''(\eta)=f(\eta)$.

例题 17 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 $n+1$ 阶可导，且 $f^{(i)}(0)=f^{(i)}(1)=0\ (i=0,1,2,\cdots,n)$.

证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f^{(n+1)}(\xi)=f(\xi)$.

（三）微分方程反解 C 法

将 ξ 改为 x，解微分方程，将通解里的任意常数 C 反解出来，放到等号左边，则右边就是辅助函数.

例题 18 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, (a,b) 可导, $a>0$，$f(a)=0$. 证明: $\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$.

考法三、双中值问题

（一）未要求两个中值不同

如果欲证结论中含有两个中值 ξ 和 η，但是未要求 $\xi\neq\eta$，这种题非常简单，只需以下三步——

(1) 将欲证结论中，ξ 和 η 里相对更复杂的那个中值单独拎出来分析，去思考它是由哪个函数用完拉格朗日中值定理以后或者由哪一对函数用完柯西中值定理以后的结果，然后将其还原；

(2) 将还原以后的式子，稍作变形（或者将题干条件代入），变形以后，重新使用一次中值定理，便可出现另一个中值了；

(3) 最后，根据等式的传递性，即可证出欲证结论.

例题 19 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，$f(a)=f(b)=1$. 证明：$\exists\xi,\eta\in(a,b)$，s.t. $e^{\eta-\xi}[f'(\eta)+f(\eta)]=1$.

例题 20 (1998 年) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, (a,b) 可导, $f'(x)\neq0$. 证: $\exists\xi,\eta\in(a,b)$, s.t. $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$.

（二）要求两个中值不同

情形一：两个区间上，各产生一个中值

如果题目中还明确要求了 $\xi\neq\eta$，那么就不能在同一个区间使用两次中值定理了（否则 ξ 可能等于 η）

所以，我们的解决方法就是引入一个分割点，将区间 $[a,b]$ 拆分成 $[a,c]$ 和 $[c,b]$，然后在区间 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上各使用一次中值定理，使得 $\xi\in(a,c)$，$\eta\in(c,b)$，由于两个区间没有交集，那么自然就保证了 $\xi\neq\eta$.

很显然，这种题型中，分段点 $x=c$ 的选取是核心，我们一般都采用“待定法”去倒推！

该思想完全适用于 3 个中值甚至 n 个中值的题目.

例题 21 (2010 年) 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$(0,1)$ 可导，且 $f(0)=0,\ f(1)=\dfrac{1}{3}$.

证明：$\exists\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right),\ \eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

例题 22 (2005 年) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$(0,1)$ 可导，$f(0)=0,\ f(1)=1$. 证明：

(1) $\exists c\in(0,1)$，使得 $f(c)=1-c$；　　(2) $\exists\xi,\eta\in(0,1)$ 且 $\xi\neq\eta$，使得 $f'(\xi)f'(\eta)=1$.

类题 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可导，$f(0)=0,\ f(1)=1$. 证明：

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=2-3\xi$；

(2) 存在两个不同的点 $\theta,\eta\in(0,1)$，使得 $[1+f'(\eta)][1+f'(\theta)]=4$.

例题 23 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：$\exists\xi\neq\eta$，s.t. $\dfrac{1}{f'(\xi)}+\dfrac{1}{f'(\eta)}=2$.

例题 24 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导. $f'(x)\neq0$，$f(a)=0$，$f(b)=2$.

证明：$\exists\xi,\eta\in(a,b)$ 且 $\xi\neq\eta$，使得 $f'(\eta)[f(\xi)+\xi f'(\xi)]=f'(\xi)[bf'(\eta)-1]$.

情形二：区间分段点成为了第一个中值，然后再在子区间上产生第 2、3 个中值

例题 25 证明：在区间 $(0,2)$ 内存在三个不同的点 x_1,x_2,x_3，使得 $\dfrac{1-\ln(1+x_1)}{(1+x_1)^2}x_3=\dfrac{1-\ln(1+x_2)}{(1+x_2)^2}(2-x_3)$

类题 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\neq0$，证明：存在互异的三个数 $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(0,1)$，使得

$$\frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{1+\xi_1^2}\int_0^{\xi_1}f(x)\mathrm{d}x+f(\xi_1)\arctan\xi_1\right]\xi_3=\left[\frac{1}{1+\xi_2^2}\int_0^{\xi_2}f(x)\mathrm{d}x+f(\xi_2)\arctan\xi_2\right](1-\xi_3)$$

考法四、泰勒中值定理的相关证明（用于出现高阶导时）

1. 带佩亚诺余项的泰勒展开（用于计算函数极限）——

若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处 n 阶可导，则对于 $x=x_0$ 的邻域内的任何一个 x，均有如下泰勒展开：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\boldsymbol{o}[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})^{\boldsymbol{n}}]$$

其中 $o[(x-x_0)^n]$ 叫做佩亚诺余项，它不够精确，只能确定出余项是 $(x-x_0)^n$ 的高阶无穷小.

2. 带拉格朗日余项的泰勒展开（用于证明中值定理问题）——

若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的邻域内 $n+1$ 阶可导，则对该邻域内的任何一个 x，均有如下泰勒展开：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\boldsymbol{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

其中 ξ 介于 x 和 x_0 之间，且 $\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 叫做拉格朗日余项. 显然，拉格朗日余项更精确！

拉格朗日余项，不仅也能表明余项是 $(x-x_0)^n$ 的高阶无穷小，还给出了余项的具体形式.

当然，拉格朗日余项虽然更精确，但它所需的条件也更加苛刻，同样都是展开到 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 佩亚诺余项只需要 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导即可，而拉格朗日余项需要 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的邻域内 $n+1$ 阶可导.

观察 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，就不难发现，

选取 x 和 x_0 的**原则为：“选导数信息多的点作为 x_0；只知道函数值信息，不知道导数信息的点作为 x”**.

其它展开方式：端点在中点处展开、中点在端点处展开、在极值点处展开、在任意点处展开，等等⋯

例题 26 (1999 年) 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，$f(-1)=0$, $f(1)=1$, $f'(0)=0$.

证明：存在 $\xi\in(-1,1)$，使得 $f'''(\xi)=3$.（**注**：由导数介值定理可知，条件可弱化为“三阶可导”）

类题 1 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三阶连续可导，证：存在 $\xi\in(-1,1)$，使得 $\frac{f'''(\xi)}{6}=\frac{f(1)-f(-1)}{2}-f'(0)$.

类题 2 已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 三阶连续可导.

证明：$\exists\xi\in(a,b)$，$f(b)=f(a)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{(b-a)^3}{24}f'''(\xi)$.

类题 3 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导，$f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.

类题 4 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在 n 阶导数，且 $f^{(i)}(a)=f^{(i)}(b)=0$, $i=1,2,\cdots,n-1$.

证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $|f^{(n)}(\xi)|\geqslant\frac{2^{n-1}n!}{(b-a)^n}|f(b)-f(a)|$.

例题 27 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，$[f(x)]_{\min}=-1$. 证明：$\exists\xi\in(0,1)$，s.t. $f''(\xi)\geqslant 8$.

例题 28 (2024 年) 设 $f(x)$ 二阶可导，$f'(0)=f'(1)$，$|f''(x)|\leqslant 1$，证明：

(1) 当 $x\in(0,1)$ 时，$|f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x|\leqslant\frac{x(1-x)}{2}$；

(2) $\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|\leqslant\frac{1}{12}$.

例题 29 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导，$|f(x)|\leqslant a$, $|f''(x)|\leqslant b$. 证明：$|f'(x)|\leqslant 2a+\frac{b}{2}$ 恒成立.

例题 30 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，$f(a)=f(b)=0$, $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|$. 证明：

(1) $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\frac{M}{8}(b-a)^2$；　　(2) $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|\leqslant\frac{M}{2}(b-a)$.

考法五、计算中值 ξ 中参数 θ 的极限（核心：再展开一次，并剥离 θ）

例题 31 设函数 $f(x)$ 有 $n+1$ 阶的连续导数，且满足以下的展开式——

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n$$

其中 $0<\theta<1$，且 $f^{(n+1)}(a)\neq 0$. 证明 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}$.

以下的两个内容，是锦上添花，作为选学内容！请同学们先把前面五个基本考法吃透再说！

考法六、辅助多项式法（选学，核心就是多项式拟合）

例题 32 设 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 二阶可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(4)=2$．证：存在 $\xi\in(0,4)$，使得 $f''(\xi)=-\dfrac{1}{3}$．

例题 33 (2019 年) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$．

证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)<-2$．

考法七、广义罗尔定理（选学，核心就是补充定义）

（一）有限区间的广义罗尔定理

例题 34 (定理) 设 $f(x)$ 在 (a,b) 可导，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=A$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$．

类题 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导，且 $f(a)=f(b)=f'(b)=f''(b)=0$．

证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $(\xi-b)^2f''(\xi)-2f(\xi)=0$．

（二）无限区间的广义罗尔定理

例题 35 (定理) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可导，且 $f(0)=f(+\infty)$，则存在 $\xi\in(0,+\infty)$，使得 $f'(\xi)=0$．

例题 36 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，在 $(0,+\infty)$ 可导，且 $0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{x}{1+x^2}$．

证明：存在 $\xi\in(0,+\infty)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$．

类题 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可导，且 $0\leqslant f(x)\leqslant\ln\dfrac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}$．

证明：存在 $\xi\in(0,+\infty)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{2}{2\xi+1}-\dfrac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$．