专题 7 微分不等式的解题方法（紧密）

以下的 3 个考法，涵盖了过去 39 年考研数学的微分不等式中几乎所有的重要考法——**吃透，高分**！

一、利用单调性证明不等式

这是最常用的方法，其实就是构造函数求导即可. 遇到不等式证明，先考虑这个基本方法!

（一）直接构造函数求导

例题 1 当 $x>0$ 时，$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$.

注 1: 本题可推出“$x>0$，$x\neq 1$，则 $\dfrac{\ln x}{x-1}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$”也成立，想想怎么推导的? .

注 2: 本题可推出“$x>0$，则 $\ln^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)<\dfrac{1}{x(1+x)}$”也成立，想想怎么推导的?

注 3: 本题对例题 7 的证明也有帮助，你能看出来吗?

例题 2 (2012 年) 证明：$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\dfrac{1}{2}x^2$，其中 $-1\leq x\leq 1$.

（二）变形后构造函数（取对数、去分母、约分、分离函数类型等）

有些不等式被出题人故意“复杂化”，目的是麻痹考生，使我们构造出来的函数不便于求导，增大计算量! 所以，我们需要先对欲证不等式恒等变形，简化结论以后再构造函数!

例题 3 证明：$(1+x)^{1+\frac{1}{x}}<e^{1+\frac{x}{2}}$，其中 $x>0$.

类题 1 设 $x>0$，证明：$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x(1+x)^{\frac{1}{x}}\leq 4$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立.

类题 2 证明：$\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}<\dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$，其中 $0<x<1$.

例题 4 (2018 年) 已知常数 $k>\ln 2-1$，证明：$(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)\geq 0$.

例题 5 设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，证明：$\cos x<\dfrac{\sin x}{2x-\sin x}$.

例题 6 设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，证明：$\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3>\cos x$.

（三）形如 $A\leq f(x)\leq B$ 的不等式

这种题目，首要问题就是分析常数 A,B 与函数 $f(x)$ 的关系——根据经验，“一般而言”，这类题中的函数 $f(x)$ 都是单调函数，而常数 A,B 恰好是 $f(x)$ 在定义域端点处的函数值（当然，若要证的结论为 $A<f(x)<B$，那么 A,B 一般都是 $f(x)$ 在端点处的极限值）.

例题 7 (1998 年) 证明：$\dfrac{1}{\ln 2}-1<\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{2}$，其中 $0<x<1$.

类题 1 设 $0<x<1$，证明：$\dfrac{2}{e}<x^{\frac{x}{1-x}}+x^{\frac{1}{1-x}}<1$.

类题 2 设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，证明：$\dfrac{4}{\pi^2}<\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}<\dfrac{2}{3}$. （本题难度较大，目标 130 以下可跳过）

二、利用凹凸性证明不等式（利用泰勒展开）

若$f''(x)$恒正或恒负，则可以将$f(x)$泰勒展开并扔掉拉格朗日余项$\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$，得到不等式.

再比如，已知$f^{(4)}(x)>0$，那么泰勒展开以后，扔掉拉格朗日余项$\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^4$，得到不等式.

利用这个方法，可以证明$e^x\geqslant 1+x$、$e^x\geqslant 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$、$\cos x\geqslant 1-\dfrac{x^2}{2}$、$\cos x\leqslant 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4!}$等.

例题 8 (1995 年) 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，且$f''(x)>0$，证明：$f(x)\geqslant x$.

例题 9 设$f''(x)>0$，证明：(1) $f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$；(2) $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.(背)

推广 设$f''(x)>0$，常数$k_i>0(i=1,2,\cdots)$，且$k_1+k_2+\cdots+k_n=1$，证明：

$$f(k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n)\leqslant k_1f(x_1)+k_2f(x_2)+\cdots+k_nf(x_n).$$

例题 10 设$a>0,b>0$，请利用上题的结论证明下列不等式：

(1) $a^p+b^p\geqslant 2^{1-p}(a+b)^p\ (p>1)$；　(2) $a^p+b^p\leqslant 2^{1-p}(a+b)^p\ (0<p<1)$；

例题 11 设$f(x)$二阶可导，$f(x)>0$，$f''(x)f(x)-[f'(x)]^2>0$.

(1) 证明：对任意的x_1,x_2，均有$f(x_1)f(x_2)\geqslant f^2\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$；

(2) 若$f(0)=1$，证明：$f(x)\geqslant e^{f'(0)x}$.

例题 12 (2006 年) 设$y=f(x)$二阶可导，$f'(x)>0$，$f''(x)>0$，Δx为自变量x在点x_0处的增量，Δy与dy分别为$f(x)$在点x_0处的增量与微分. 若$\Delta x>0$，则(　)

A. $0<dy<\Delta y$　B. $0<\Delta y<dy$　C. $\Delta y<dy<\Delta x$　D. $dy<\Delta y<0$

想到一个有趣的题——下面这三排步骤，相信任何人都能看懂：

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$.

若$|f''(x)|\leqslant M$，则$|f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)|=\left|\dfrac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2\right|\leqslant\dfrac{M}{2}(x-x_0)^2$，

两边除以$|x-x_0|$，得到$\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|\leqslant\dfrac{M}{2}|x-x_0|$，但若$f(x)=\sin x$，很多人反而不会了！

例题 13 证明不等式：$\left|\dfrac{\sin x-\sin y}{x-y}-\cos y\right|\leqslant\dfrac{1}{2}|x-y|$，其中$x,y\in(-\infty,+\infty)$.

例题 14 (2025 年) 设$f(x)$在(a,b)内可导，证明：$f'(x)$在(a,b)内严格单调增加的充要条件是“对(a,b)内的任意的x_1,x_2,x_3，当$x_1<x_2<x_3$时，有$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$”.

三、利用中值定理证明不等式

（一）利用拉格朗日中值定理，证明不等式

例题 15 (2004 年) 设$e<a<b<e^2$，证明：$\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$.

例题 16 证明：$(1+a)\ln(1+a)+(1+b)\ln(1+b)<(1+a+b)\ln(1+a+b)$，其中$a,b>0$.

例题 17 (2002 年) 设$0<a<b$，证明：$\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.

析：若对中间项使用拉格朗日中值定理，故相当于证明$\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$，其中$0<a<\xi<b$.

要证明$\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{1}{\xi}$，只需证明$\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{1}{b}$即可，由均值不等式$a^2+b^2\geq 2ab$即可，故左边成立；

但是，$\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$却证不出来. 因为要证明$\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$，需要证明$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$，即证$a>b$，矛盾.

本题表明——**利用中值定理证明函数不等式，虽然偶尔会事半功倍，但也可能会失效，证不出来！**.

所以，对于函数不等式的证明，学会“构造函数，求导判断单调性”，才是我们的复习重心！

右边不等式可以这样分析——要证$\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$，即证$\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)<\dfrac{b-a}{\sqrt{ab}}=\dfrac{\frac{b}{a}-1}{\sqrt{\frac{b}{a}}}$.

由于$b>a>0$，令$\dfrac{b}{a}=x$，故等价于证明$\ln x<\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}\ (x>1)$. 而这不就是我们前面的...例题 1 吗？

例题 18 设$f(x)$在$[a,b]$二阶可导，$|f''(x)|\leq M$，$f(x)$在(a,b)内取到最小值.

证明：$|f'(a)|+|f'(b)|\leq M(b-a)$.

（二）利用柯西中值定理，证明不等式

例题 19 证明：$\dfrac{\arctan x}{\ln(1+x)}\leq\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$，其中$x>0$.

类题 证明：$\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}<\dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$，其中$0<x<1$.

（三）构造辅助函数，证明不等式（选学，与中值定理证明题类似）

例题 20 设$f(x)$满足$f(0)=0$，$f'(x)+f(x)>0$，证明：$x\geq 0$时，$f(x)\geq 0$.

类题 设$f(x)$二阶可导，且对$\forall x\geq 0$，均有$f''(x)-5f'(x)+6f(x)\geq 0$成立.

若$f(0)=1$, $f'(0)=0$，证明：$f(x)\geq 3e^{2x}-2e^{3x}\ (x\geq 0)$.