专题 8 不定积分的解题方法（紧密）

以下的 7 个考法，涵盖了过去 39 年考研数学的不定积分中几乎所有的重要考法——**吃透，高分**！

注：凯哥的不定积分讲义（含基础部分），共接近 100 道题，由易到难，面面俱到，完全可以涵盖“真题+习题集+模拟卷”里的不定积分.

B站昵称：考研竞赛凯哥

一、分段函数的不定积分

例题 1 (2016 年) 设 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1\\ \ln x, & x\geqslant 1\end{cases}$，求 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

二、有理函数的积分

（一）常规方法：待定系数法裂项（基础阶段讲过，略）

（二）其它巧妙方法

1. 根据分母的形式，改造分子，从而快速裂项

例题 2 $\int \frac{1}{x^6(1+x^2)}\mathrm{d}x$

类题 1 $\int \frac{1+2x^4}{x^3(1+x^4)^2}\mathrm{d}x$

类题 2 $\int \frac{1+x^4}{1+x^6}\mathrm{d}x$

2. 倒代换，简化运算（适用于分母次数远高于分子）

例题 3 $\int \frac{1}{x^6(1+x^2)}\mathrm{d}x$

类题 $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x^3(1-x)}}\mathrm{d}x$

（三）与 $\int \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$ 相关的积分

例题 4 $\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$ 与 $\int \frac{1-x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$

注 1：本题第一次遇到确实很难想，但通过这个题目，可以解决所有形如 $\int \frac{1\pm x^2}{1+kx^2+x^4}\mathrm{d}x$ 的积分；

注 2：也可因式分解，$1+x^4=(1+x^2)^2-2x^2=\left(1+x^2+\sqrt{2}x\right)\left(1+x^2-\sqrt{2}x\right)$，但计算量大.

注 3：利用以上两题，我们可求出积分 $\int \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x+\int \frac{1-x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x\right]=\cdots$

类题 $\int \frac{1}{1+x^6}\mathrm{d}x$

例题 5 $\int \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x$

B站昵称：考研竞赛凯哥

三、换元法与分部积分（重要）

（一）如何去掉根号？（方法不唯一）

不必拘泥于“见到 $\sqrt{\text{一次函数}}$、$\sqrt{\dfrac{\text{一次函数}}{\text{一次函数}}}$、$\sqrt{a\cdot e^x+b}$、$\sqrt{\dfrac{a\cdot e^x+b}{c\cdot e^x+d}}\Rightarrow$ 令整个根号等于 t”

例题 6 $\displaystyle\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$

例题 7 $\displaystyle\int\frac{\ln x}{\sqrt{x^3(1-x)}}\mathrm{d}x$

例题 8 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$

例题 9 (教材) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}\mathrm{d}x$（所有形如 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt[n]{(x+a)^{n-1}(x+b)^{n+1}}}\mathrm{d}x$ 的题都可以这样做）

（二）在 d 后加上恰当的常数，简化分部积分的计算

例题 10 $\displaystyle\int x\cdot\ln(1+x^2)\cdot\arctan x\ \mathrm{d}x$

（三）既要换元、又要分部积分（最重要）

例题 11 (2018 年) $\displaystyle\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$

类题 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$

例题 12 (2009 年) $\displaystyle\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x\ (x>0)$（克服肌肉记忆!）

类题 $\displaystyle\int\arctan\sqrt{\frac{x}{1+4x}}\mathrm{d}x\ \ (x>0)$

（四）利用分部积分，对分母降阶

该方法的核心就是“将分母凑到 d 后面，然后分部积分”（基础阶段其实讲过一个类似的题）.

例题 14 $\displaystyle\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

类题 $\displaystyle\int\frac{x^2e^x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$

考研竞赛凯哥 B站昵称：

（五）利用分部积分，实现“积分抵消”

$I=I_1+I_2$，其中I_1暂时不动，对I_2使用分部积分，而I_2分部积分后得到的新积分，刚好和I_1抵消.

例题 15 $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

类题 1 $\int \frac{x^2\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$

类题 2 $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

注：以上三题的背景是$\int \mathrm{e}^x[f(x)+f'(x)]\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x f(x)+C$，但“积分抵消”的思想应用范围很广.

例题 16 (教材) $\int \mathrm{e}^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

注：有时候需要对两个积分同时使用分部积分，使得分部积分以后的两个新的积分相互抵消.

类题 $\int \left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$

例题 17 $\int \left(\ln\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)\mathrm{d}x$

类题 $\int \frac{\ln(1+x)-\ln x}{x(1+x)}\mathrm{d}x$

例题 18 $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x$

五、对复杂部分求导，期待刚好是分子（选学，类似于积分因子）

例题 19 $\int \frac{\ln x}{\sqrt{1+[x(\ln x-1)]^2}}\mathrm{d}x$

例题 20 $\int \frac{x+1}{x(1+x\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}x$

类题 $\int \frac{1+x\cos x}{x(1+x\mathrm{e}^{\sin x})}\mathrm{d}x$

注：其实通过上面的几个题，我们甚至可以自己总结出一个**出题模板**，如下——

$$\int \frac{1+xf'(x)}{x(1+x\mathrm{e}^{f(x)})}\mathrm{d}x=\int \frac{[1+xf'(x)]\mathrm{e}^{f(x)}}{x\mathrm{e}^{f(x)}(1+x\mathrm{e}^{f(x)})}\mathrm{d}x=\int \frac{[x\mathrm{e}^{f(x)}]'}{x\mathrm{e}^{f(x)}(1+x\mathrm{e}^{f(x)})}\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{x\mathrm{e}^{f(x)}}{1+x\mathrm{e}^{f(x)}}\right|+C$$

如果取$f(x)=\arctan x$，代入出题模板，稍作变形，即可原创一道题目$\int \frac{1+x+x^2}{(1+x^2)(x+x^2\mathrm{e}^{\arctan x})}\mathrm{d}x$，

例题 21 $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x$

类题 1 $\int \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{(x-\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x$

类题 2 $\int \frac{x+\sin x\cdot\cos x}{(\cos x-x\cdot\sin x)^2}\mathrm{d}x$

考研竞赛凯哥
B站昵称：

六、三角有理函数的积分（数三原则上不要求）

（一） 万能方法：利用万能公式将三角有理函数化为有理函数

所谓三角有理函数，可以通俗的理解为“三角函数经过有限次加减乘除运算得到的函数”.

从理论上来说，一切三角有理函数的积分，只需利用万能公式$\tan\frac{x}{2}=t$，就能化为有理函数积分.

由于$\tan\frac{x}{2}=t$，故反解得$x=2\arctan t$, $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$，且——

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1}=\frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{2t}{1-t^2}.$$

将这些代入原积分，就能化成有理函数积分（万能解法虽然万能，但并不一定是最快解法）

例题 22 $\displaystyle\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}\mathrm{d}x$

类题 $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

（二） 三角有理函数积分的特殊解法

1. 形如$\displaystyle\int\frac{A\sin x+B\cos x}{C\sin x+D\cos x}\mathrm{d}x$的积分，一般假设“分子$=p\cdot$分母$+q\cdot$(分母)$'$”，解出$p,q$即可；

例题 23 $\displaystyle\int\frac{5}{3x+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

2. 对于形如$\displaystyle\int\sin ax\cdot\sin bx\,\mathrm{d}x\,(a\neq b)$之类的题，我们可以直接采用积化和差公式，一步秒杀.

例题 24 $\displaystyle\int\sin 3x\cdot\cos 4x\,\mathrm{d}x$

3. 对于$\displaystyle\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$，若$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则将$\cos x$凑到$\mathrm{d}$后面，变出$\mathrm{d}\sin x$.

例题 25 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-3)\sqrt{1+x^2}}$

4. 对于$\displaystyle\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$，若$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则可将$\sin x$凑到$\mathrm{d}$后面，变出$\mathrm{d}\cos x$.

例题 26 $\displaystyle\int\frac{\tan^5 x}{\cos x}\mathrm{d}x$

类题 $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x+\tan x}\mathrm{d}x$

B站昵称：考研竞赛凯哥

5. 对于 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$，若 $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$，则可制造出 $\sec^2 x\mathrm{d}x$，然后凑成 $\mathrm{d}\tan x$.

例题 27 $\int \frac{1}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$

类题 1 $\int \frac{1}{(3\sin x+2\cos x)^2}\mathrm{d}x$

类题 2 $\int \frac{\ln\tan x}{\sin 2x}\mathrm{d}x$

例题 28 $\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

类题 1 $\int \frac{1}{\sin^6 x+\cos^6 x}\mathrm{d}x$

类题 2 $\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x$

6. 擅于使用**“缩分母”**技巧

分母项数太多就很难积分，但分子项数再多也不怕（可以拆成多个积分之和）．当分母项数太多，需要想办法“缩分母”，比如分母为 $1+\cos x$，可以分子分母乘以 $1-\cos x$（也可以用二倍角公式）

例题 29 $\int \frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x$

类题 1 $\int \frac{1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

类题 2 $\int \frac{1}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}\mathrm{d}x$

缩分母的思想，不仅适用于三角有理函数的积分，比如下面这道题也适用——

例题 30 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

7. 当被积函数中出现不同角度的三角函数时，我们一般先用倍角公式统一角度；

例题 31 (1994 年) $\int \frac{1}{\sin(2x)+2\sin x}\mathrm{d}x$

例题 32 $\int \frac{\cos 2x-\sin 2x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

例题 33 $\int \frac{e^{-\sin x}\cdot\sin 2x}{\sin^4\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}\mathrm{d}x$

注：本题十分综合，但相信你们已经成长了，现在的你们做这道题应该不成问题.

再次强调，吃透我的讲义（含基础部分的讲义），**足够你应付任何考研习题集中的不定积分计算题**.

七、隐函数的不定积分（选学，真题没考过，很多辅导书里都有）

例题 34 设函数 $x=x(y)$ 由方程 $x(y-x)^2=y$ 所确定，求 $\int \frac{1}{y-x}\mathrm{d}x$.

考研竞赛凯哥 B站昵称：