

极限的定义与性质

主讲人: 凯哥

一、知识点

(一) 数列极限定义

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow$ 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 均 $\exists N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - A| < \varepsilon$. (抽象, 请认真听课!)

注: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 的几何意义, 是——对于任意的 $\varepsilon > 0$ (无论 ε 有多小), 一定存在 N , 使得当 $n > N$ (也即第 N 项以后) 时, 所有的 x_n 均落在区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 内, 只有有限个点会落在该区间之外.

(二) 函数极限定义

1. 自变量趋向于定点

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对 $\forall \varepsilon > 0$, 均 $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

2. 自变量趋向于无穷

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对 $\forall \varepsilon > 0$, 均 $\exists X > 0$, 使得当 $x > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对 $\forall \varepsilon > 0$, 均 $\exists X > 0$, 使得当 $x < -X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

(三) 极限的性质 (以函数极限为例, 数列极限同理)

1. 唯一性

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 A 具有唯一性.

2. 局部有界性

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的去心邻域内有界.

注 1: 取 $f(x) = \frac{1}{x}$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的极限为 ∞ , 显然在 $x = 0$ 的任何去心邻域都是无界的.

注 2: 无穷大可以推出无界, 但无界推不出无穷大! 因为有一种振荡叫做“无界振荡”!

如 $f(x) = \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, 现研究 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的极限——其中 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $[-1, 1]$ 振荡, 二者相乘后, $\frac{1}{x}$ 相当于成为了 $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 的“振幅放大器”, 让 $[-1, 1]$ 上的有界振荡升级为了“无界振荡”, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 显然不存在, 但并不是无穷大. 同理, $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) = x \sin x$ 也是“无界振荡”.

3. 局部保号性

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ——

(1) 若 $A > 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) > 0$; (极限正, 则去心邻域正)

(2) 若 $A < 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) < 0$. (极限负, 则去心邻域负)

注: 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, 导致极限值等于函数值, 则“极限正, 则邻域正; 极限负, 则邻域负”.

(四) 极限与无穷小的关系 (脱帽法)

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小量, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

注: 这里的 $\alpha(x)$ 并不是“任意一个无穷小”!! 否则你会根本想不通这个定理到底是怎么来的!!

事实上, $f(x) = A + [f(x) - A] = A + \alpha(x)$, 也就是说, 这里的 $\alpha(x) = f(x) - A$, 显然是无穷小.

这个定理最重要的作用, 是强行脱去了极限符号 $\lim$, 从“形式上”解出了 $f(x)$ 的表达式, 故也被戏称为“脱帽法”.

示例 (凯哥, 每日一题) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x f(x) + \sin x}{x^2} = 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \sin x}{x^2}$.

二、经典例题

例题 1 (1999 年) “对 $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 存在 $N \in \mathbb{N}^+$, 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$ ”是“ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ”的()

- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件 C. 充分必要条件 D. 既非充分也非必要条件

例题 2 (2014 年) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$, 则当 n 充分大时, 必有 ()

- A. $|a_n| > \frac{|a|}{2}$ B. $|a_n| < \frac{|a|}{2}$ C. $a_n > a - \frac{1}{n}$ D. $a_n < a + \frac{1}{n}$

例题 3 下列叙述正确的是 ()

- A. 若 $f(x)$ 在 x_0 的任意去心邻域无界, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$
 B. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则 $f(x)$ 在 x_0 的任意去心邻域无界
 C. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$
 D. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$

例题 4 设数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则 ()

- A. 若 x_n 发散, 则 y_n 必发散 B. 若 x_n 无界, 则 y_n 必有界
 C. 若 x_n 有界, 则 y_n 必为无穷小 D. 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, 则 y_n 必为无穷小