

专题 3 导数定义的解题方法（紧密）

以下的 6 个考法，涵盖了过去 39 年考研数学的导数定义中几乎所有的重要考法——**吃透，高分！**

一、复杂函数在具体一点处的导数.....	2
二、抽象函数可导性的判断.....	2
三、分段函数在分段点的导数.....	3
四、绝对值函数的可导性.....	3
五、导函数本身具有的独特性质.....	3
（一）导函数没有第一类间断点和无穷间断点.....	3
（二）导数极限定理.....	4
（三）导数零点定理（达布定理）.....	4

一、复杂函数在具体一点处的导数

例题 1 (2012 年) 设 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$, 则 $f'(0) = (\quad)$

- A. $(-1)^{n-1}(n-1)!$ B. $(-1)^n(n-1)!$ C. $(-1)^{n-1}n!$ D. $(-1)^nn!$

例题 2 设 $f(x) = \sqrt{\frac{(1+x)\sqrt{x}}{e^{x-1}}} + \arcsin \frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f'(1)$.

例题 3 设 $f(x) = (1 - \cos x)(2 - \cos x) \cdots (n - \cos x)$, 求 $f''(0)$.

二、抽象函数可导性的判断

例题 4 (2001 年, 改编) 设 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为 ()

- A. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cosh h)$ 存在 B. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h)$ 存在
 C. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sinh h)$ 存在 D. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(h)}{h}$ 存在
 E. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} f(\tanh h - h)$ 存在 F. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(\ln(1+h) - h)$ 存在
 G. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(\arctan h - h)$ 存在 H. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(-h)}{h}$ 存在

例题 5 (1996 年) 设 $f(x)$ 在 $(-\delta, \delta)$ 内有定义, $x \in (-\delta, \delta)$ 时有 $|f(x)| \leq x^2$, 则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的 ()

- A. 间断点 B. 连续但不可导的点 C. 可导点, 且 $f'(0) = 0$ D. 可导点, 且 $f'(0) \neq 0$

类题 设 $f(x), g(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内有定义, $f'(0) = a$, $|f(x) - g(x)| \leq \frac{\ln(1+x^2)}{2 + \cos x}$. 证明: $g'(0) = a$.

例题 6 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - e^{2x} + 1}{x^2} = 1$, 证明 $f'(0)$ 存在, 并求 $f'(0)$.

例题 7 (2025 年) 设 $f(x)$ 连续, 给出下列四个条件 ()

- ① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)| - f(0)}{x}$ 存在 ② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - |f(0)|}{x}$ 存在
 ③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{x}$ 存在 ④ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)| - |f(0)|}{x}$ 存在

其中能得到“ $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导”的是_____.

三、分段函数在分段点的导数

例题 8 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} + \sin x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ \frac{\tan x}{x} + e^{\frac{1}{2}x} - 1, & x < 0 \end{cases}$, 求 $f'(0)$.

例题 9 (2016 年) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, n=1, 2, \dots \end{cases}$, 则 ()

A. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

B. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

C. $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导

D. $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

四、绝对值函数的可导性

例题 10 (1998 年) 函数 $f(x) = (x^2 - x - 2)|x^3 - x|$ 的不可导点的个数是 ()

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

类题 若 $f(x) = |(x-1)(x-2)|\ln(x^2 + ax + b)$ 在 $x=1$ 和 $x=2$ 处都可导, 求 a, b .

例题 11 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 则 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分必要条件是 ()

A. $f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$

B. $f(a)=0$ 且 $f'(a) \neq 0$

C. $f(a) > 0$ 且 $f'(a) > 0$

D. $f(a) < 0$ 且 $f'(a) < 0$

五、导函数本身具有的独特性质

(一) 导函数没有第一类间断点和无穷间断点

例题 12 若 $f(x)$ 在区间 I 上处处可导, 且导函数为 $f'(x)$.

(1) 请举例: $f'(x)$ 可以有振荡间断点; (2) 请证明: $f'(x)$ 不存在第一类间断点和无穷间断点.

注: 该结论中, $f(x)$ 必须在区间 I 上处处可导, 这个前提不可忽略!

比如 $f(x) = \frac{1}{x}$, 其导函数 $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ 在 $x=0$ 处就是无穷间断点, 但是由于 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处本身就可导, 所以这个例子并不能用来反驳“ $f'(x)$ 不存在无穷间断点”.

类题 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内定义, 在 $x=x_0$ 的某去心邻域可导, 则 ()

A. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = A$, 则 $f'(x_0)$ 存在也等于 A . B. 若 $f'(x_0)$ 存在也等于 A , 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = A$.

C. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \infty$, 则 $f'(x_0)$ 不存在. D. 若 $f'(x_0)$ 不存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \infty$.

（二）导数极限定理

例题 13 (2009 年) 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续、在 $x = x_0$ 的去心邻域可导, $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = A$, 证明: $f'(x_0) = A$.

（三）导数零点定理（达布定理）

例题 14 （导数零点定理） 证明：导函数即使不连续，仍然满足“零点定理”，即——

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 可导，且 $f'_+(a) \cdot f'_-(b) < 0$ ，则 $\exists \xi \in (a, b)$ ，使得 $f'(\xi) = 0$.

推论：若 $f(x)$ 在区间 I 上可导，且 $f'(x) \neq 0$ ，则必有 $f'(x) > 0$ 或 $f'(x) < 0$ ，故 $f(x)$ 一定严格单调！

例题 15 （导数介值定理） 证明：导函数即使不连续，仍然满足“介值性”，即——

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可导， $f'_+(a) \neq f'_-(b)$ ， k 为介于 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 之间的任意实数，

则 $\exists \xi \in (a, b)$ ，使得 $f'(\xi) = k$.

推论：若 $f(x)$ 在区间 I 上可导，且 $f'(x) \neq 2$ ，则必有 $f'(x) > 2$ 或 $f'(x) < 2$.