专题12. 反常积分计算的解题方法

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

一. 积分区间内部如果存在瑕点，则需要拆区间.

例1. $\int_{\frac12}^{\frac32}\frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}dx=\int_{\frac12}^{\frac32}\frac{1}{\sqrt{|x(1-x)|}}dx$

$x-x^2=\frac14-(x-\frac12)^2 \quad x^2-x=(x-\frac12)^2-\frac14$

[解]: $I=\int_{\frac12}^{1}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx+\int_{1}^{\frac32}\frac{1}{\sqrt{x(x-1)}}dx=\int_{\frac12}^{1}\frac{1}{\sqrt{\frac14-(x-\frac12)^2}}d(x-\frac12)+\int_{1}^{\frac32}\frac{1}{\sqrt{(x-\frac12)^2-\frac14}}d(x-\frac12)$

$=\arcsin\frac{x-\frac12}{\frac12}\Big|_{\frac12}^{1}+\ln\left[(x-\frac12)+\sqrt{(x-\frac12)^2-\frac14}\right]\Big|_{1}^{\frac32}=\frac{\pi}{2}+\ln\frac{1+\frac{\sqrt3}{2}}{\frac12}$

$=\frac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt3)$

$\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}$

$\int\frac{1}{t(t+1)}dt=\int\frac1t dt-\int\frac{1}{t+1}dt$

二. 将反常积分裂开成两个积分时，也需要考虑每个积分的敛散性.

例2. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x^2+1)}dx=\frac12\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(x^2+1)}dx^2 \quad x^2=t \quad \frac12\int_1^{+\infty}\frac{1}{t(t+1)}dt \ \frac{?}{=}\ \frac12\left[\int_1^{+\infty}\frac1t dt-\int_1^{+\infty}\frac{1}{t+1}dt\right]$ XXX $\ln t\Big|_1^{+\infty}$

[解]: $I=\cdots=\frac12\int_1^{+\infty}\frac{1}{t(t+1)}dt=\frac12\int_1^{+\infty}\left(\frac1t-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac12\ln\frac{t}{t+1}\Big|_1^{+\infty}=\frac12\left[\ln1-\ln\frac12\right]=\frac12\ln2$

$=\frac12\left[\ln t-\ln(t+1)\right]\Big|_1^{+\infty}$

$-\ln\frac12=\ln2$

③ 反常积分的分部积分，也需要考虑第一项的敛散性.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{-x}+1}=1$

例3. $\int_0^{+\infty}\frac{x e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$ ☆☆☆. $(e^x)^2$ ∞

[解]: $I=-\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+e^{-x})^2}d(e^{-x}+1)=\int_0^{+\infty}x\,d\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{x}{e^{-x}+1}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^{-x}+1}dx$ ✗

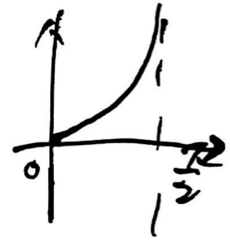
[正解]: $I=\int_0^{+\infty}x\,d\left(\frac{1}{e^{-x}+1}-1\right)=\int_0^{+\infty}x\,d\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}=-\int_0^{+\infty}x\,d\frac{1}{e^{x}+1}=-\frac{x}{e^{x}+1}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^{x}+1}dx$

$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^x(e^x+1)}de^x=\ln\frac{e^x}{e^x+1}\Big|_0^{+\infty}=0-\ln\frac{1}{2}=\ln 2$ ✓

$x=\frac{1}{t}$. $t=\frac{1}{x}$

$x:1\to+\infty$

$t:1\to 0$



[法二]: $I=\int_0^{+\infty}\frac{x e^{x}}{(e^{x}+1)^2}dx=-\int_0^{+\infty}x\,d\frac{1}{e^{x}+1}=\cdots=\ln 2$ ✓

$-\frac{1}{t^2}dt$

四. $(0,+\infty)$上的区间再现公式
- 法一: $(0,+\infty)$拆成$(0,1)$和$(1,+\infty)$. 对$(1,+\infty)$上的积分用倒代换.
- 法二: 直接倒代换
- 法三: $x=\tan t$. 则 $t\in(0,\frac{\pi}{2})$. 然后用区间再现!

例4. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^a)}dx$

[解]: 令 $x=\frac{1}{t}\Rightarrow I=\int_{+\infty}^{0}\frac{-\frac{1}{t^2}}{(1+\frac{1}{t^2})(1+\frac{1}{t^a})}dt=\int_0^{+\infty}\frac{t^a}{(1+t^2)(1+t^a)}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+t^a}{(1+t^2)(1+t^a)}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\arctan t\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}$ ✓

[另解]: 令 $x=\tan t\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 t}{\sec^2 t\cdot(1+\tan^a t)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^a t}{\cos^a t+\sin^a t}dt\ \overset{\text{区间再现}}{=}\ \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^a t+\sin^a t}{\cos^a t+\sin^a t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$ ✓

例5. $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx = I$

$\ln\frac{1}{t}$

[解]: 令 $x=\frac{1}{t} \Rightarrow I=\int_{+\infty}^{0}\frac{-\ln t}{1+\frac{1}{t^2}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+1}dt = -I \Rightarrow I=0$

[另解]: 令 $x=\tan t \Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\tan t}{\cancel{\sec^2 t}}\cdot\cancel{\sec^2 t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{\sin t}{\cos t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{\cos t}{\sin t}dt$.

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{\cancel{\sin t}}{\cancel{\cos t}}\cdot\frac{\cancel{\cos t}}{\cancel{\sin t}}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}0\,dt = 0$ ✓

$a^2+x^2 \to x=a\tan t$

$a^2-x^2 \to x=a\sin t$.

类题 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{a^2+x^2}dx \quad (a>0)$

[解]: 化归为例5: 令 $x=at$. $I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln a+\ln t}{a^2+a^2t^2}\cancel{a}\,dt = \frac{1}{a}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\ln a}{1+t^2}dt+\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}dt\right]$

$=\frac{\ln a}{a}\cdot\frac{\pi}{2}$ ✓.

[另解]: 三角换元: 令 $x=a\tan t \Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln a+\ln\tan t}{a^2\cancel{\sec^2 t}}\cdot\cancel{a}\cancel{\sec^2 t}\,dt = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\ln a}{a}+\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\tan t\,dt\right)\cdot\frac{1}{a}$

$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\ln a}{a}$ ✓

[另解]: 倒代换: 令 $x=\frac{a}{t}$

$a^2+\frac{a^2}{t^2}$

例6. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x+x^2}dx$

【解】: 令 $x=\frac{1}{t} \Rightarrow I=\int_{+\infty}^{0} \frac{-\ln t}{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}\cdot(-\frac{1}{t^2})dt = -\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+t+1}dt}=-I \Rightarrow I=0$

类题: $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1-x+x^2)}{(1+x^2)\ln x}dx=I$

$\ln\frac{t^2-t+1}{t^2}$ $\quad \ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$

$-\ln t^2$

【解】: 令 $x=\frac{1}{t}$. $\Rightarrow I=\int_{+\infty}^{0} \frac{\ln(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2})}{(1+\frac{1}{t^2})\cdot(-\ln t)}\cdot(-\frac{1}{t^2})dt$.

$=-\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t^2-t+1)-2\ln t}{(t^2+1)\ln t}dt=-I+2\cdot\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}dt$.

$\Rightarrow I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}dt=\arctan t\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$