中学知识回顾讲义

2026考研数学
全程班专属

B 站：没咋了 吃尽天下面

公众号：没咋了

目 录

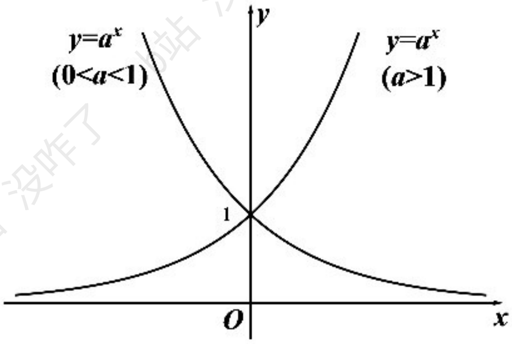
中学数学知识回顾

1.指数函数与对数函数

1.1 指数函数

函数形式：$y=a^x\left(a>0且a\neq 1\right)$，其中$x$是自变量，定义域为$R$.过定点$(0,1)$.

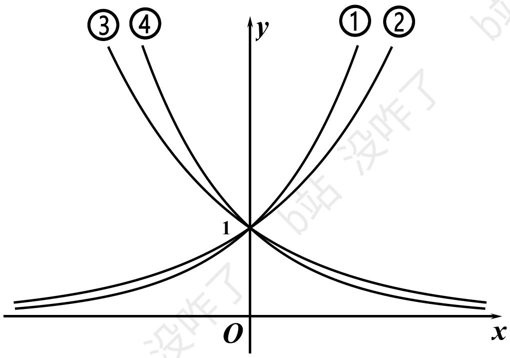
图像：



常用的指数函数：$y=e^x$.

常用性质：$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$，$\left(a^m\right)^n=a^{mn}$，$(ab)^m=a^m b^m$，$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m=\dfrac{a^m}{b^m}$.

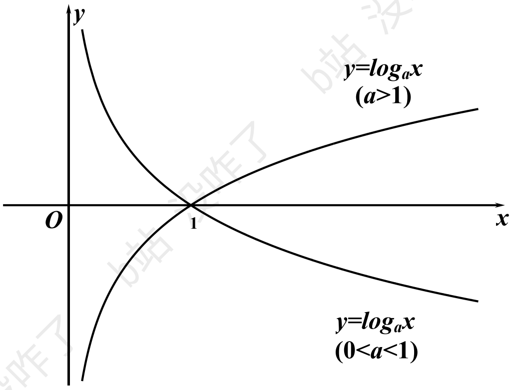
【例 1】如图是指数函数① $y=a^x$，② $y=b^x$，③ $y=c^x$，④ $y=d^x$ 的图像，则a,b,c,d 与1的大小关系是.



1.2 对数函数

函数形式： $y=\log_a x\ \left(a>0,a\neq 1,x>0\right)$

图像：



常用的对数函数：当 $a=e$ 时， $y=\ln x$.

常用性质： $\ln A+\ln B=\ln(AB)$， $\ln A-\ln B=\ln\dfrac{A}{B}$， $\ln A^B=B\ln A$， $\ln 1=0$， $\ln e=1$.

【例 2】求函数 $y=\ln(x^2-x-6)$ 的定义域.

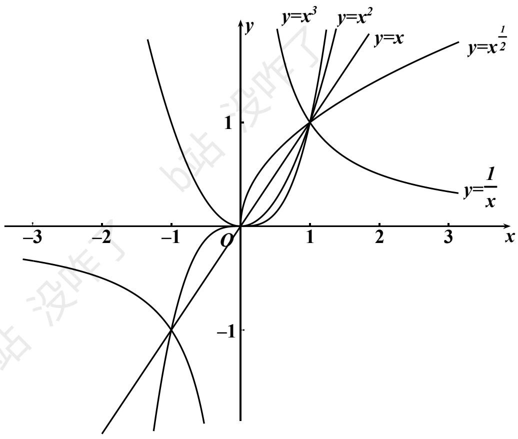
【例 3】已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\leq 0 \\ \ln x, & x>0 \end{cases}$，求 $f(f(1))$.

2. 幂函数

函数形式：$y=x^a$（a为实数）.

幂函数$y=x^a$随着a的不同，定义域和值域都会产生变化.大家熟练掌握下图中的幂函数即可.

图像：



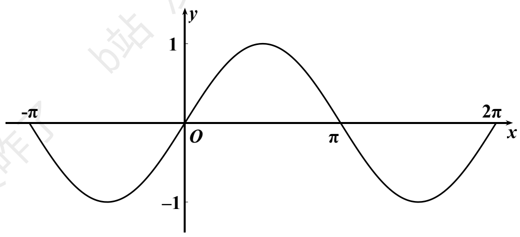
【例 4】已知幂函数$y=kx^{\alpha}$的图像过点$\left(2,\dfrac{1}{4}\right)$，则$k+\alpha=$____.

3. 三角函数

（1）正弦函数：$y=\sin x$.定义域为R，值域为$[-1,1]$，周期为2π .

特殊值：$\sin 0=0$，$\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$，$\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\dfrac{\pi}{2}=1$.

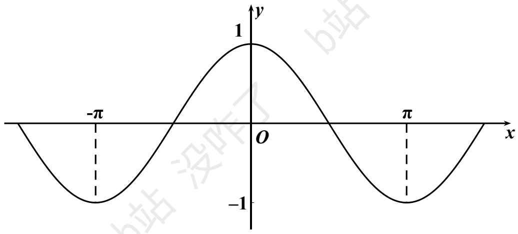
图像：



（2）余弦函数：$y=\cos x$.定义域为R，值域为$[-1,1]$，周期为2π.

特殊值：$\cos 0=1$，$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，$\cos\frac{\pi}{2}=0$.

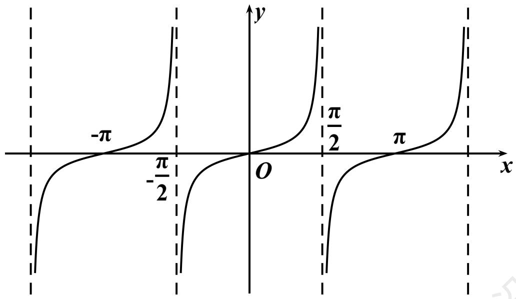
图像：



（3）正切函数：$y=\tan x$.定义域为$\left\{x \middle| x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z\right\}$，值域为$R$，周期为$\pi$.

特殊值：$\tan 0=0$，$\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\tan\frac{\pi}{4}=1$，$\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，$\tan\frac{\pi}{2}$不存在.

图像：



注：这里的周期指的都是最小正周期.

3.1 常用恒等式

$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$，$\cot x=\frac{1}{\tan x}=\frac{\cos x}{\sin x}$，

$\sec x=\frac{1}{\cos x}$，$\csc x=\frac{1}{\sin x}$，

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$，$\tan^2 x+1=\sec^2 x$.

3.2 诱导公式

口诀：奇变偶不变，符号看象限

$\sin(2n\pi+x)=\sin x$， $\cos(2n\pi+x)=\cos x$

$\sin(\pi\pm x)=\mp\sin x$， $\cos(\pi\pm x)=-\cos x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)=\cos x$， $\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)=\mp\sin x$

$\tan(\pi\pm x)=\pm\tan x$， $\cot(\pi\pm x)=\pm\cot x$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)=\mp\cot x$， $\cot\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)=\mp\tan x$

注： $\sin(n\pi+x)=(-1)^n\sin x$， $\cos(n\pi+x)=(-1)^n\cos x$

【例 5】利用诱导公式快速计算下列三角函数的特殊值.

（1） $\sin\frac{2\pi}{3}$， $\cos\frac{3\pi}{4}$， $\tan\frac{5\pi}{6}$.

（2） $\sin\frac{5\pi}{4}$， $\cos\frac{4\pi}{3}$， $\tan\frac{7\pi}{6}$.

（3） $\sin\frac{11\pi}{6}$， $\cos\frac{7\pi}{4}$， $\tan\frac{5\pi}{3}$.

3.3 两角和与差公式

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

3.4 倍角公式

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$， $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

注：倍角公式常用于降幂：$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$， $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$.

3.5 辅助角公式

$$A\sin x + B\cos x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x+\varphi)$$

注：常用的：$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

3.6 和差化积公式

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

3.7 积化和差公式

$$\sin a\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos a\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos a\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin a\sin\beta = -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right]$$

【例 6】思考一下$1+\sin x$可以作什么样的恒等变形？

【例 7】计算 $y=3+2\sin x-3\cos x$ 的值域.

【例 8】计算下列函数的最小正周期.

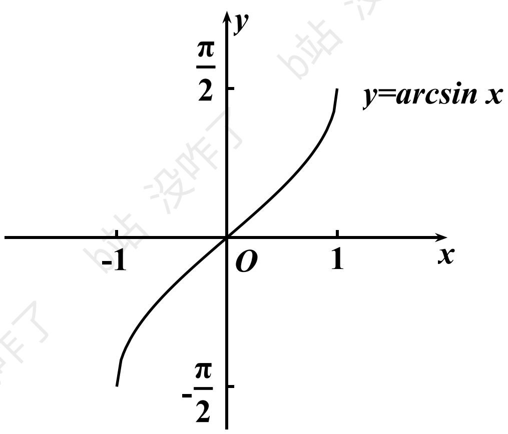
（1） $y=|\sin x|$　　（2） $y=\cos^2 x+1$.

【例 9】设 $A=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}$，化简 $A\sin\frac{\pi}{2^n}$.（较难）

4. 反三角函数

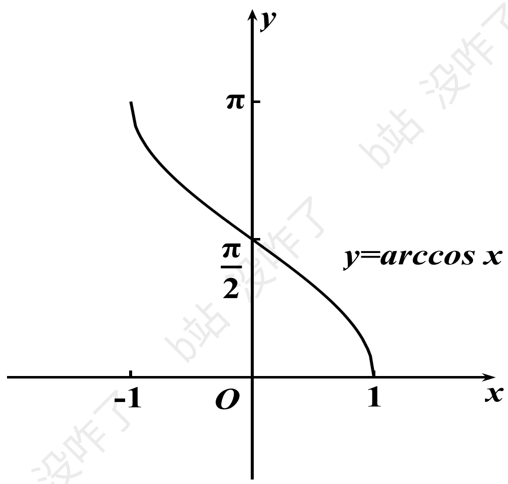
（1）反正弦函数： $y=\arcsin x$.定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

图像：



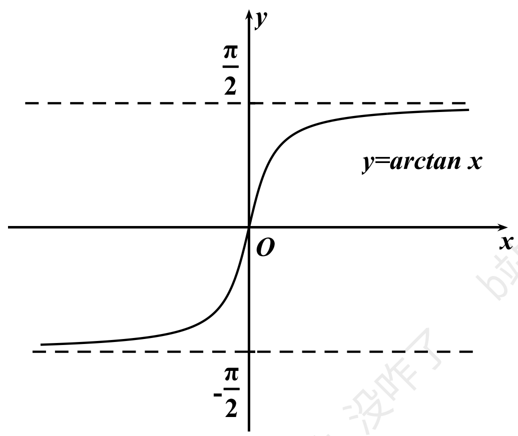
（2）反余弦函数：$y=\arccos x$.定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$.

图像：



（3）反正切函数：$y=\arctan x$.定义域为R，值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

图像：



常用恒等式：$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}\left(|x|\le 1\right)$

【例 10】计算$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}$.

【例 11】$\arcsin(\sin x)=x$ 正确吗？

5. 初等代数公式与方程

5.1 常用基本公式

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$$

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

【例 12】对 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ 进行分子有理化.

【例 13】尝试一下补充下面两个等式的中间步骤.

（1）$\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)=2\ln(1+\sqrt{2})$

（2）$\ln(\sqrt{2}-1)=-\ln(\sqrt{2}+1)$

5.2 一元二次方程

$ax^2+bx+c=0$

判别式：$\Delta=b^2-4ac\begin{cases}>0, & \text{两个不等实根} \\ =0, & \text{两个相等实根} \\ <0, & \text{无实根}\end{cases}.$

求根公式：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

韦达定理：$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

【例 14】计算下列一元二次方程.

（1）$x^2+3x-10=0$　（2）$3x^2-\dfrac{5}{4}x-\dfrac{1}{8}=0$　（3）$x^2+2x+2=0$

5.3 真分式与假分式

真分式：分子的次数低于分母的次数.

假分式：分子的次数高于或等于分母的次数.

长除法，在考研数学中一般用于分解假分式和解简单一元三次方程.

【例 15】将下列假分式分解.

（1）$\dfrac{x^3}{x+1}$　（2）$\dfrac{2x^4+x^2+3}{x^2+1}$

【例 16】求解一元三次方程 $x^3+2x^2-x-2=0$.

6.数列

等差数列：设a_1为首项，a_n为通项，d为公差，S_n为前n项和，则$a_n=a_1+(n-1)d$，$S_n=\dfrac{n\left(a_1+a_n\right)}{2}$.

等比数列：设a_1为首项，a_n为通项，q为公比，S_n为前n项和，则$a_n=a_1q^{n-1}$，$S_n=\dfrac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$.

常见的数列的和：

①$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

②$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

【例 17】已知数列$\{a_n\}$为等差数列，且$a_1+a_5=12$，$a_4=7$，求a_n.

【例 18】在正项等比数列$\{a_n\}$中，$a_1a_3=9$，$a_5=24$，求公比q.

7.重要不等式

基本不等式：$a^2+b^2\ge 2ab$

$a+b\ge 2\sqrt{ab}\ (a>0,b>0)$

均值不等式：$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\ge\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$

注：$\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots a_n^2}{n}}\ge\dfrac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

柯西不等式：$\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(b_1^2+b_2^2\right)\ge\left(a_1b_1+a_2b_2\right)^2$.

注：$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)\ge\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2$.

绝对值不等式：$\big||a|-|b|\big|\le|a\pm b|\le|a|+|b|$

【例 19】给出下列四个条件：

①$b>0>a$；②$0>a>b$；③$a>0>b$；④$a>b>0$.

其中能使$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$成立的是_____.

【例 20】已知$a,b>0$，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，求：

（1）ab的最小值；（2）$a+2b$的最小值.

【例 21】已知$a^2+b^2+c^2=1$，$x^2+y^2+z^2=4$，则$ax+by+cz$的取值范围是.

8.平面解析几何

8.1 直线方程

$y-y_0=k(x-x_0)$（过点(x_0,y_0)，斜率为k）.

过两点$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$的直线斜率：$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

两点$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$的距离：$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

8.2 二次曲线

（1）圆：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，圆心为(a,b)，半径为$r(r>0)$，面积为πr^2，周长为$2\pi r$；

（2）椭圆：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，面积为$\pi ab$；

注：半径为R的球体的体积为$\frac{4}{3}\pi R^3$，表面积为$4\pi R^2$；椭球体$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的体积为$\frac{4}{3}\pi abc$.

（3）抛物线：$x^2=2py$，$y^2=2px$；

（4）双曲线：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

【例 22】若圆的方程为$x^2+y^2-2x+4y+4=0$，请用显函数表示出该圆的上半圆、下半圆、左半圆、右半圆.

【例 23】若椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，点$P(x_0,y_0)$在椭圆上，写出过点$P(x_0,y_0)$的椭圆的切线方程.

9.极坐标与参数方程

9.1 极坐标

极坐标通过两个变量极径ρ和极角θ表示一个点.

极坐标与直角坐标的互相转换：$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$， $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$， $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$.

【例 24】将下列直角坐标系方程表示成极坐标系方程.

（1） $x^2+y^2=1$ （2）$(x-1)^2+y^2=1$ （3） $y=x$ （4） $x=1$

（5） $x^2+xy+y^2=2$

【例 25】将下列极坐标系方程表示成直角坐标系方程.

（1） $r=2\csc\theta$ （2） $r=\dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$ （3） $r=2\sin\theta$ （4） $r^2\sin 2\theta=2$.

9.2 参数方程

参数方程是一种用参数来表示曲线上点的坐标的方程形式.

【例 26】写出下列曲线的参数方程.

（1） $x^2+y^2=1$ （2） $(x-1)^2+(y+2)^2=1$ （3） $x^2+\frac{y^2}{4}=1$

10.命题与逻辑

10.1 充分与必要

“若 p，则 q”为真命题，表示由 p 推出 q，则 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

【例 27】某证明题需证明 p 的充分必要条件是 q，则由 q 推出 p 证明的是（　），由 p 推出 q 证明的是（ ）

A.充分性　　　　B.必要性

10.2 数学归纳法

步骤：①证明 n 取第一个值 n_0（n_0 一般为 0 或 1）时命题成立；

②假设当 $n=k$ 时命题成立；

③证明当 $n=k+1$ 时命题也成立.

综合上述三步骤，可说明对一切自然数（$n\geq n_0$）命题都成立.

【例 28】已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\sqrt{a_n+3}$，$a_1=1$，证明：$\{a_n\}$单调递增.

11.排列组合

排列：$A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$，$A_n^n=n!$

组合：$C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$，$C_n^m=C_n^{n-m}$

双阶乘：$(2n)!!=2\times4\times6\times\cdots\times2n$

$(2n+1)!!=1\times3\times5\times\cdots\times(2n+1)$

二项式定理：$(a+b)^n=C_n^0a^nb^0+C_n^1a^{n-1}b^1+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^{n-1}a^1b^{n-1}+C_n^na^0b^n$.

答案速查

【例 1】$d<c<1<b<a$.

【例 2】$(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$.

【例 3】1.

【例 4】-1.

【例 5】（1）$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$-\frac{\sqrt{3}}{3}$；（2）$-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$-\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{3}$；（3）$-\frac{1}{2}$.，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$-\sqrt{3}$.

【例 6】$1+\sin x=1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2$

$1+\sin x=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.

【例 7】$y=3+2\sin x-3\cos x=3+\sqrt{13}\sin(x+\varphi)$，值域为$\left[3-\sqrt{13},3+\sqrt{13}\right]$.

【例 8】（1）π；（2）π.

【例 9】$\frac{1}{2^{n-1}}$.

【例 10】$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & x>0\\ -\frac{\pi}{2}, & x<0\end{cases}$.

【例 11】不正确.

【例 12】$\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

【例 13】（1）$\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)^2=2\ln(1+\sqrt{2})$；

（2）$\ln(\sqrt{2}-1)=\ln\left[\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1}\right]=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)=-\ln(\sqrt{2}+1)$.

【例 14】（1）$-5,2$；（2）$-\frac{1}{12},\frac{1}{2}$；（3）$-1\pm i$.

【例 15】（1）$x^2-x+1-\frac{1}{x+1}$；（2）$2x^2-1+\frac{4}{x^2+1}$.

【例 16】$-1,1,-2$.

【例 17】$a_n = n+3$.

【例 18】2.

【例 19】①②④.

【例 20】（1）4；（2）$3+2\sqrt{2}$.

【例 21】$[-2,2]$.

【例 22】上半圆：$y=-2+\sqrt{1-(x-1)^2}$；下半圆：$y=-2-\sqrt{1-(x-1)^2}$；

左半圆：$x=1-\sqrt{1-(y+2)^2}$；右半圆：$x=1+\sqrt{1-(y+2)^2}$.

【例 23】$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$.

【例 24】（1）$r=1$；（2）$r=2\cos\theta$；（3）$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$；（4）$r=\sec\theta$；（5）

$r^2(1+\sin\theta\cos\theta)=2$.

【例 25】（1）$y=2$；（2）$x+y=1$；（3）$x^2+(y-1)^2=1$；（4）$xy=1$.

【例 26】（1）$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$，$0\le\theta\le 2\pi$

（2）$\begin{cases} x=1+\cos\theta \\ y=-2+\sin\theta \end{cases}$，$0\le\theta\le 2\pi$

（3）$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$，$0\le\theta\le 2\pi$

【例 27】A，B.

【例 28】略.