

2026 线代基础练习题

By 没咋了

阶段一 行列式与矩阵 (习题)

【1】(李林 880 题) 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$, 则 D 的第 4 行各元素的余子式之和 $M_{41} + M_{42} +$

$M_{43} + M_{44} = (\quad)$.

(A) -28

(B) 28

(C) 14

(D) -14

【2】(李艳芳 900 题) 设 $D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ l & l & l & k \\ k & k & k & l \end{vmatrix}$, 则 D 的第一行元素的代数余子式之和 $A_{11} + A_{12} +$

$A_{13} + A_{14} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【3】设 $f(x) = \begin{vmatrix} x+2 & -1 & 2 \\ 3 & 2x-1 & 1-x \\ 0 & -1 & 3x \end{vmatrix}$, 则 x^2 的系数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【4】(李林 880 题) 若 $\begin{vmatrix} \lambda-a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a \end{vmatrix} = 0$, 则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$.

【5】(李艳芳 900 题) 行列式 $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & a^2+c^2 & a^2+b^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【6】(2020) 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【7】(1991) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$.

【8】(1997) 设 n 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【9】(李艳芳 900 题) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n \times n} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【10】(1999) 记 $f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$, 则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为 ().

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【11】(李艳芳 900 题) 已知矩阵 A, B, C 为 n 阶矩阵, 且 $AB=BC$, 则下列说法中, 正确的是 ().

- (A) 若 $A=E$, 且 $B \neq O$, 则 $C=E$ (B) 若 $A=O$, 且 $B \neq O$, 则 $C=O$
(C) 若 B 可逆, 则 $A=C$ (D) 若 B 可逆, 则 A 与 C 等价

【12】(李林 880 题) 设 $\alpha = (2, -1, 3)^T, \beta = (1, 2, 0)^T, A = \alpha\beta^T, E$ 是 3 阶单位矩阵, 则 $(A+E)^n = \underline{\hspace{2cm}}$.

【13】(李林 880 题) 设 $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = P^{-1}BP$, 则 $A^4 - 2B^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【14】(2004) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 B 满足 $ABA^* = 2BA^* + E$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, E

为单位矩阵, 则 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【15】(2008) 设 A 为 n 阶非零矩阵, E 为 n 阶单位矩阵. 若 $A^3 = O$, 则 ().

- (A) $E-A$ 不可逆, $E+A$ 不可逆 (B) $E-A$ 不可逆, $E+A$ 可逆
(C) $E-A$ 可逆, $E+A$ 可逆 (D) $E-A$ 可逆, $E+A$ 不可逆

【16】(2000) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}$, E 为 4 阶单位矩阵, 且 $B = (E + A)^{-1}(E - A)$, 则

$$(E + B)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【17】(李林 880 题) 设 A 是 n 阶方阵, 且 $|A| = 2$, 将 A 的第 i 行与第 j 行互换得到 B , 则行列式 $|B^{-1}B^*B^T| = \underline{\hspace{2cm}}.$

【18】(2005) 设 A 为 $n(n \geq 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B , A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 则 ().

- (A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 B^* (B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 B^*
 (C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$ (D) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$

【19】(李林 880 题) 设存在 3 阶矩阵 A , 对任意的 x, y, z 有 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$, 则 $A = \underline{\hspace{2cm}}.$

【20】(李林 880 题) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & k & 3 \\ k-1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & k \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 等价, 则 ().

- (A) $k = 1$ (B) $k \neq 1$ (C) $k = -1$ (D) $k \neq -1$

【21】(2005) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为三维列向量, 记矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

$B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$, 如果 $|A| = 1$, 那么 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}.$

【22】(2001) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 且矩阵 X 满足 $AXA + BXB = AXB + BXA + E$,

其中 E 是 3 阶单位阵, 求 X .

【23】(李艳芳 900 题) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, B 满足 $\left[\left(\frac{1}{2}A\right)^*\right]^{-1}BA^{-1} = 4AB + 16E$, 求矩阵 B .

【24】(李艳芳 900 题) 设 n 为大于等于 3 的奇数, n 阶非零矩阵 A 满足 $A = A^*$, 则下列说法中, 正确的是 ().

- (A) $A = -A^{-1}$ (B) $A^T = -A^*$ (C) $A^{-1} = A^*$ (D) $|A| = 0$

【25】(李艳芳 900 题) 已知 n 阶矩阵 A 满足等式 $A^2 - 3A + 2E = O$, 其中 E 为 n 阶单位矩阵. 计算 $r(A) + r(A - E) + r(A - 2E) + r(A - 3E)$.

阶段二 向量与方程组 (习题)

【1】(李林 880 题) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ c_3 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ c_4 \end{pmatrix}$, 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数, 则 ().

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关 (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关
(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关 (D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关

【2】(李林 880 题) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性无关的是 ().

- (A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
(C) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3$ (D) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$

【3】(李林 880 题) 设向量组 $\alpha_1 = (1, k+2, 3)^T$, $\alpha_2 = (2, -1, 1)^T$, $\alpha_3 = (k-1, 1, -1)^T$ 线性相关, 但任意两个向量线性无关, 则 $k =$ _____.

【4】(李林 880 题) 设 4 维列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\beta_i (i=1, 2, 3, 4)$ 为非零列向量, 且 β_i 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均正交, 则 $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) =$ ().

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【5】(2004) 设 A, B 为满足 $AB = O$ 的任意两个非零矩阵, 则必有 ().

- (A) A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关
(B) A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关
(C) A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关
(D) A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关

【6】(2006) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均为 n 维列向量, A 是 $m \times n$ 矩阵, 下列选项正确的是 ().

- (A) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关
(B) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关
(C) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关
(D) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关

【7】(李艳芳 900 题) 已知向量组 I: $\alpha_1 = (0, 1, 2, 3)^T$, $\alpha_2 = (3, 0, 1, 2)^T$, $\alpha_3 = (2, 3, 0, 1)^T$ 和向量组 II:

$\beta_1 = (2, 1, 1, 2)^T$, $\beta_2 = (0, -2, 1, 1)^T$, $\beta_3 = (4, 4, 1, 3)^T$, 则下列说法中, 正确的是 ().

- (A) 向量组 I 可由向量组 II 线性表示, 但向量组 II 不能由向量组 I 线性表示
- (B) 向量组 II 可由向量组 I 线性表示, 但向量组 I 不能由向量组 II 线性表示
- (C) 向量组 I 和向量组 II 可互相线性表示
- (D) 向量组 I 和向量组 II 均不可由对方线性表示

【8】(李艳芳 900 题) 设向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由向量组 II: $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ 线性表示, 则 ().

- (A) 若 α_3 与 β 线性无关, 则 α_3 可由 α_1, α_2 线性表示
- (B) 若 α_3 与 β 线性无关, 则向量组 I 与向量组 II 等价
- (C) 若向量组 I 与向量组 II 等价, 则 α_3 与 β 线性相关
- (D) 若 α_3 与 β 线性相关但与 α_1 线性无关, 则向量组 I 与向量组 II 等价

【9】(李艳芳 900 题) 已知向量组 A: $\alpha_1 = (1, 1, 0, 1)^T$, $\alpha_2 = (a, a+1, a, a+1)^T$, $\alpha_3 = (1, 2, a+1, a+2)^T$,

$\alpha_4 = (a, a-1, 0, a)^T$, $\alpha_5 = (a, a+1, 3, a+3)^T$, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是该向量组的一个极大无关组, 但 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ 不是该向量组的极大无关组. 求 a , 并用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 表示 α_5 .

【10】(仅数一) 设向量 r 在 $\mathbf{R}^3$ 的基 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_2 = (0, 2, 1)^T$, $\alpha_3 = (0, 1, 1)^T$ 下的坐标为 $(x_1, x_2, x_3)^T$,

$(y_1, y_2, y_3)^T$ 是 r 在 $\mathbf{R}^3$ 的基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标, 且 $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 - x_1$, $y_3 = x_3 - x_2$, 求基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

【11】(李艳芳 900 题) 设 A 是 $(n+1) \times n$ 矩阵, b 是 $n+1$ 维列向量, 行列式 $|A, b| \neq 0$, 则非齐次线性方程组 $Ax = b$ ().

- (A) 有唯一解
- (B) 有无穷多解
- (C) 无解
- (D) 不能确定解的情况

【12】(李林 880 题) 设方程组
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + \lambda^2 x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$
 的系数矩阵为 A , 若存在 3 阶矩阵 $B \neq O$, 使得

$AB = O$, 则必有 ().

(A) $\lambda = -2$ 且 $|\mathbf{B}| = 0$

(B) $\lambda = -2$ 且 $|\mathbf{B}| \neq 0$

(C) $\lambda = 1$ 且 $|\mathbf{B}| = 0$

(D) $\lambda = 1$ 且 $|\mathbf{B}| \neq 0$

【13】(2001) 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 若 $\beta_1 = \alpha_1 + t\alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_2 + t\alpha_3$, $\beta_3 = \alpha_3 + t\alpha_4$, $\beta_4 = \alpha_4 + t\alpha_1$, 讨论实数 t 满足什么关系时, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 也是 $Ax = 0$ 的一个基础解系.

【14】(2004) 设有齐次线性方程组
$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + (3+a)x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + (4+a)x_4 = 0 \end{cases}$$
, 试问 a 取何值时, 该方程组有

非零解, 并求出其通解.

【15】(李林 880 题) 设 n 阶矩阵 A 满足 $|A| = 0$, A_{ij} 为 $|A|$ 的元素 a_{ij} 对应的代数余子式, 且 $A_{11} \neq 0$, 求方程组 $A^*x = 0$ 的基础解系和通解.

【16】(2000) 设 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$, $A = \alpha\beta^T$, $B = \beta^T\alpha$, 其中 β^T 是 β 的转置, 求解方

程 $2B^2A^2x = A^4x + B^4x + \gamma$.

【17】(2006) 已知非齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$$
 有 3 个线性无关的解.

(1) 证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$; (2) 求 a, b 的值及方程组的通解.

【18】(李艳芳 900 题) 已知 $\alpha_1 = (2, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, -1)^T$ 是方程组
$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b_1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = b_2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$
 的两个解, k

为任意常数, 则该方程组的通解为 ().

(A) $k(1, 1, 1)^T + (2, 1, 0)^T$

(B) $k(-1, 1, 1)^T + (2, 1, 0)^T$

(C) $k(1, -1, 1)^T + (1, 0, -1)^T$

(D) $k(1, 1, -1)^T + (1, 0, -1)^T$

【19】(李艳芳 900 题) 设矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的通解为

$$x = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } k_1, k_2 \text{ 为任意常数, 则下列说法中错误的是 ().}$$

(A) b 必可由 α_1, α_2 线性表示

(B) b 必可由 α_2, α_3 线性表示

(C) b 必可由 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示

(D) b 必可由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示

【20】(李林 880 题) 设 A 是 5×4 矩阵, $r(A) = 2$, 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的三个解向量, 且 $\alpha_1 + \alpha_2 = (4, 6, -8, 4)^T$, $\alpha_3 = (1, 2, -1, 1)^T$, 又 $(0, 1, -3, 0)^T$ 是 $Ax = 0$ 的解, 求 $Ax = b$ 的通解.

阶段三 矩阵相似理论 (习题)

【1】(李林 880 题) 设方阵 A 满足 $A^2 + 2A + E = O$, 则 A 有特征值_____.

【2】(李林 880 题) 设 A 为 3 阶方阵, A 的三个特征值为 1, 1, 2, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 分别为对应的三个特征向量, 则 ().

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必为 $2E - A$ 的特征向量
 (B) $\alpha_1 + \alpha_3$ 必为 $2E - A$ 的特征向量
 (C) $\alpha_1 - \alpha_2$ 必为 $2E - A$ 的特征向量
 (D) α_1, α_2 必为 $2E - A$ 的特征向量, α_3 不是 $2E - A$ 的特征向量

【3】(李艳芳 900 题) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

- (1) 求 A 的特征值及其对应的特征向量; (2) 计算 $A^{2n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

【4】(李林 880 题) 设 n 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix}$, 则 $r(A) =$ _____, $|A| =$ _____.

【5】(李林 880 题) 设 α 为 n 维单位列向量, E 为 n 阶单位阵, 则 ().

- (A) $E - \alpha\alpha^T$ 不可逆 (B) $E + \alpha\alpha^T$ 不可逆
 (C) $E + 2\alpha\alpha^T$ 不可逆 (D) $E - 2\alpha\alpha^T$ 不可逆

【6】(李林 880 题) 设 A, B 均是 n 阶矩阵, 则 $A \sim B$ 的充分条件是 ().

- (A) A^2 与 B^2 相似 (B) A 与 B 有相同的特征值
 (C) A 与 B 有相同的特征向量 (D) A 与 B 均与对角矩阵 A 相似

【7】(李林 880 题) 判别下列矩阵 A 与 B 是否相似. 若相似, 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

【8】(李林 880 题) (1) 设 A 与 B 是 n 阶方阵, A 可逆, 且 $A \sim B$, 证明: $A^* \sim B^*$;

(2) 若 $A \sim B$, 证明: 存在可逆矩阵 P (非数量矩阵), 使得 $AP \sim BP$.

【9】(李林 880 题) 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = A$, 证明:

(1) A 的特征值只能是 1 或 0; (2) A 可相似对角化.

【10】(李艳芳 900 题) 设 A 为 3 阶实对称矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵. 已知 $|A| = -12$, $\text{tr}(A) = 1$, 且

$(1, 0, -2)^T$ 是方程组 $(A^* - 4E)x = 0$ 的一个解, 其中 E 为 3 阶单位矩阵. 求一个正交矩阵 Q , 使得

$Q^T A Q$ 为对角矩阵.

阶段四 二次型 (习题)

【1】(李永乐 660 题) 已知二次型 $x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_2x_3$, 在下列矩阵运算中, 能得到二次型的是 ().

$$(A) \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \\ -2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$(B) \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$(C) \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$(D) \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

【2】(李永乐 660 题) 二次型经正交变换标准形不是 $y_1^2 + 3y_2^2 - y_3^2$ 的是 ().

$$(A) 3x_2^2 + 2x_1x_3$$

$$(B) x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2$$

$$(C) 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2$$

$$(D) x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

【3】(李林 880 题) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 的规范形为 ().

$$(A) f = z_1^2$$

$$(B) f = z_1^2 - z_2^2$$

$$(C) f = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$$

$$(D) f = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$$

【4】(李林 880 题) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ 合同, 则合同变换矩阵 $P =$ ().

$$(A) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(B) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(C) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(D) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

【5】(李艳芳 900 题) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + x_3^2 + 2bx_1x_3$ 经可逆线性变换 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ 可化为二次型 $g(y_1, y_2, y_3) = -y_1^2 - 3y_2^2 + 3y_3^2 + 8y_2y_3$, 则参数 a, b 的取值范围为 ().

$$(A) a > 0, -1 < b < 1$$

$$(B) a < 0, -1 < b < 1$$

$$(C) a > 0, b > 1 \text{ 或 } b < -1$$

$$(D) a < 0, b > 1 \text{ 或 } b < -1$$

【6】(李艳芳 900 题) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2ax_1x_3 + 2x_2x_3$ 的正、负惯性指数相同, 则 $a =$ _____.

【7】设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T (A^T A) \mathbf{x}$ 的秩为 2.

(1) 求实数 a 的值; (2) 求正交变换 $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$ 将 f 化为标准形.

【8】(李林 880 题) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$.

(1) 用正交变换化二次型为标准形, 并写出所用的正交变换;

(2) 当 $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 2$ 时, 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的最大值.

【9】(李艳芳 900 题) 设 n ($n \geq 3$) 阶正定矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \cdots & a & 1 & a \\ a & a & \cdots & a & 1 \end{pmatrix}$, 则 a 不可能为 ().

(A) $\frac{1}{n-1}$

(B) $\frac{1}{n}$

(C) $-\frac{1}{n-1}$

(D) $-\frac{1}{n}$

【10】(李艳芳 900 题) 现有两个命题: ① A^* 对称当且仅当 A 对称; ② A^* 正定当且仅当 A 正定. 下列说法中, 正确的是 ().

(A) ①, ②均正确

(B) ①正确, ②错误

(C) ①错误, ②正确

(D) ①, ②均错误