

线代基础讲义



**2026 考研数学
全程班专属**

B 站：没咋了 吃尽天下面
公众号：没咋了



说明

各位同学：

此文档经过仔细核对，但难免存在一些疏忽。如果存在错误，请大家谅解，我们会及时在 QQ 群发布勘误文件。感谢大家的理解与配合！

本文档于 2025 年 6 月 4 日修改，之前的勘误在本文均已修改，后续若有勘误，需根据 6 月 4 日之后的勘误进行修改。



前言

亲爱的小伙伴们：

当你们翻开这份讲义时，我们的「**线代满分计划**」正式启动啦！接下来的日子，我会带你们用最爽的方式拆解线代套路，把那些抽象的概念变成「一看就会」的骚操作～

先来波真心话三连~~~

【感谢信任 Buff】谢谢你们选择这份讲义！为了让它成为「线代提分神器」，我肝了数个日日夜夜，翻烂近 30 年真题，把命题组的套路都摸的透透的。书里每个章节都藏着「考点 GPS」，每道例题都是真题变装秀——表面平平无奇，实则暗藏玄机。等你们通关后，什么向量相关性、矩阵相似...统统变成送分题！等学完最后一课，你会突然发现：原来出题老头的小心机，早被我们预判了！

【爆肝福利预告】如果这本讲义让你成功上分，明年记得把它安利给学弟学妹呀～（小声说：转发锦鲤不如转发没咋了）

【重要提醒】发现错别字请 call 我，送你专属「找茬 MVP」勋章！数一同学的「二次型&曲面」支线剧情，暑期强化副本准时开启～

现在，深呼吸，和我一起喊：**「讲义在手，高分我有！上了考场，乱杀线狗！」**

（PS：强化课正在憋大招，据说听完能解锁「降维打击」技能...）

—— 没咋了

目 录

第一章 行列式	4
1.1 行列式的定义	4
1.2 行列式的性质	7
1.3 行列式的计算	9
1.4 特殊行列式的计算	12
1.5 克拉默法则	16
第二章 矩阵	17
2.1 矩阵的定义	17
2.2 常见的特殊矩阵	19
2.3 矩阵基本运算（加减法、数乘、乘法）	21
2.4 方阵的幂和方阵的多项式	25
2.5 转置矩阵	28
2.6 伴随矩阵	30
2.7 逆矩阵	32
2.8 矩阵的分块	36
2.9 初等变换与初等矩阵	42
2.10 矩阵的秩	47
第三章 线性方程组（初步认识）	52
3.1 线性方程组的定义及基本概念	52
3.2 解方程原理及高斯消元法	53
3.3 方程组解的判定	56
第四章 向量与方程组	59
4.1 向量的基本概念	59
4.2 向量组的基本概念	62
4.3 线性相关、线性无关与线性表示	63
4.4 向量组的极大线性无关组、秩	73
4.5 向量组等价	76
4.6 基础解系与解的结构	78
4.7 向量空间（仅数一）	83

第五章 矩阵相似理论	86
5.1 特征值与特征向量	86
5.2 秩为 1 矩阵专题	93
5.3 矩阵相似	95
5.4 矩阵相似对角化	98
5.5 实对称矩阵相似对角化	103
第六章 二次型	107
6.1 二次型的定义及其表示	107
6.2 可逆线性变换与矩阵合同	109
6.3 二次型的标准形和规范形	111
6.4 正定二次型	115
6.5 矩阵等价、相似、合同	119

第一章 行列式

1.1 行列式的定义

行列式和矩阵是线性代数中的重要概念,其中行列式最早出现于17世纪,其起源于线性方程组的求解,它最早是一种速记的表达式。在很长一段时间内,行列式只是作为解线性方程组的一种工具使用。1850年,英国数学家西尔维斯特在研究方程的个数与未知量的个数不相同的线性方程组时,由于无法使用行列式,所以引入了矩阵的概念。1858年,凯莱在《矩阵论的研究报告》中,系统阐述了关于矩阵的理论。所以从时间上,行列式的概念先于矩阵的概念出现,矩阵的诸多性质也是基于行列式的发展而建立起来的。这也从某种程度上解释了为什么国内线代教材多以行列式作为线代开篇。

引例: 对于一个二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

根据中学知识容易得到, 当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 方程有解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

如果记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

为便于记忆, 二阶行列式 D 可以按下面的对角线法则来计算

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

引入二阶行列式后, 上述方程组的解可以分别表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

其中,

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

那么, 三阶及更高阶行列式又该如何定义(计算)呢? 接下来我们从三元线性方程组入手分析。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

通过消元法可求得(这里仅分析 x_1)

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{b_1 a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} b_3 + a_{13} b_2 a_{32} - b_1 a_{23} a_{32} - a_{12} b_2 a_{33} - a_{13} a_{22} b_3}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}}$$

三元线性方程组解 x_1 的分母和分子可分别写成三阶行列式的形式如下:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} b_3 + a_{13} b_2 a_{32} - b_1 a_{23} a_{32} - a_{12} b_2 a_{33} - a_{13} a_{22} b_3$$

则

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

很明显, 三阶的行列式计算结果相当复杂, 更高阶的行列式更是如此。人们开始思考, 二阶行列式与三阶行列式之间是否有联系呢? 是否能够用二阶行列式来表示 (计算) 三阶行列式? 要是能用低阶行列式去定义 (计算) 高阶行列式就好了!

为解释这个问题, 这里我们先引进两个概念: **余子式**和**代数余子式**。

定义: n 阶行列式 D 中, 把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的所有元素划去, 余下的 $(n-1)^2$ 个元素按原顺序组成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式, 记作 M_{ij} 。令 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, 则 A_{ij} 称为元素 a_{ij} 的代数余子式

示例 1:

$$\text{行列式 } D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ 中元素 } a_{21} \text{ 的余子式为 } M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \text{ 而其代数余子式为 } A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -1.$$

示例 2:

对于 2 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, 我们也可以类似定义, 第 1 行元素 a_{11}, a_{12} 的代数余子式分别是

$$A_{11} = (-1)^{1+1} a_{22}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} a_{21}.$$

$$\text{这样, 2 阶行列式 } D_2 \text{ 可写成 } D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12}.$$

示例 3:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

其中, $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, $M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ 分别称为元素 a_{11}, a_{12}, a_{13} 的余子式, 并称

$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$, $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12}$, $A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13}$ 分别为 a_{11}, a_{12}, a_{13} 的代数余子式。便可得到,

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

通过这几个示例可以发现两点: 第一, 行列式总可以按第一行展开来计算; 第二, 这种用低阶行列式定义高一阶行列式的方法是有一般意义的, 按照这种思想, 我们给出 n 阶行列式的归纳法定义。

定义: n 阶行列式是由 n^2 个元素 $a_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 所决定的一个数.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

当 $n=1$ 时, 定义 1 阶行列式 $D_1 = |a_{11}| = a_{11}$. 假设 $n-1$ 阶行列式已经定义, 则定义 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

上式称为 n 阶行列式 D_n 关于第 1 行的展开式。

这里补充说明两点: 第一, $n=1$ 时, 1 阶行列式 $|a_{11}| = a_{11}$ 不能与数的绝对值混淆; 第二, 行列式的主流定义方式有三种, 这里采用容易理解的归纳法, 用逆序数来定义行列式的方式不作介绍, 考研极少涉及到。

1.2 行列式的性质

接下来我们学习行列式的部分性质，以简化行列式的计算。需要向大家强调的是，大家最重要的是要学会如何理解并记忆这些性质，至于严格的证明过程并不要求大家掌握。为了便于大家理解，这里均以 3 阶行列式为例，事实上对于任意阶行列式以下性质均成立。

性质 1: (行列式行列互换) 行列式中行列互换 (转置)，其值不变。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

此性质说明，行列式对于行成立的性质，对于列也同样成立。以下我们仅对行讨论行列式的性质。

性质 2: 行列式中两行 (列) 对换，其值变号。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

推论：行列式中如果有两行 (列) 元素对应相等，则行列式的值为 0。

性质 3: (线性性质) 行列式中某行 (列) 元素有公因子，可将公因子提到行列式外。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

推论 1：行列式中如果有一行 (列) 元素全为 0，则行列式的值为 0。

推论 2：行列式中如果有两行 (列) 元素对应成比例，则行列式的值为 0。

性质 4: (线性性质) 行列式中如果有一行 (列) 的每个元素都由两个数之和组成，行列式可以拆成两个行列式的和。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 5: (行列式的倍加) 在行列式中，把某行 (列) 各元素分别乘非零常数 k ，再加到另一行 (列) 的对应元素上，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} + a_{21} & ka_{12} + a_{22} & ka_{13} + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

【例 1】设 $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = -2$ ，则 $\begin{vmatrix} a_1 & 2c_1 + a_1 & -a_1 - b_1 \\ a_2 & 2c_2 + a_2 & -a_2 - b_2 \\ a_3 & 2c_3 + a_3 & -a_3 - b_3 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【例 2】证明： $\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & y \\ c & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b \\ z & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}.$

【例 3】证明： $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3 + b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$

1.3 行列式的计算

行列式计算的主要思路是利用行列式的性质和展开定理，化繁为简，化未知为已知，化高阶为低阶。在介绍行列式的定义时，其实已经向大家介绍了行列式按第一行展开的计算公式，这里进一步介绍更具一般性的结论。

1.3.1 行列式展开定理

n 阶行列式 D 等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik}$$

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kj}$$

其中， $i, j = 1, 2, \dots, n$

行列式展开定理的推论：

推论 1：行列式中如果有一行（列）元素全为 0，则行列式的值为 0。

推论 2： n 阶行列式 D 的任一行（列）的各元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和为 0，即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk} = 0 \quad (i \neq j)$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ki}A_{kj} = 0 \quad (i \neq j)$$

【例 1】设行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ ，则求：

$$(1) A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14} \quad (2) A_{11} + A_{12} - 5A_{14} \quad (3) M_{11} + M_{21} + M_{31} + M_{41}.$$

1.3.2 常见行列式计算

从行列式展开公式不难发现，行列式中 0 越多就越容易计算。因此，常用的做法是**化零降阶法**，利用性质将行列式中某一行（或列）非零的元素尽可能消成零，一般消至剩余一个非零元素，再用行列式展开定理计算。

另外，行列式中有几个很常用的行列式，例如对角行列式、三角行列式、范德蒙德行列式等。它们的结果是已知的，可以拿来当公式用，大家需要牢记。

(1) 主对角行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) 主对角线上（下）三角行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3) 副对角行列式: (此公式易错)

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \ddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(4) 副对角线上（下）三角行列式: (此公式易错)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(5) n 阶范德蒙德 (Vandermonde) 行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

【例 2】设 n 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$, 则 $A_{k1} + A_{k2} + \cdots + A_{kn} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【例 3】计算 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 + 1 & x_2 + 1 & \cdots & x_n + 1 \\ x_1^2 + x_1 & x_2^2 + x_2 & \cdots & x_n^2 + x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} + x_1^{n-2} & x_2^{n-1} + x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1} + x_n^{n-2} \end{vmatrix}$.

【例 4】设 $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, 则曲线 $f(x)$ 的零点个数为 ().

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

1.4 特殊行列式的计算

1.4.1 箭形/爪形行列式

【例 1】
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

1.4.2 爪形行列式的变形

【例 2】
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【例 3】
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

1.4.3 行和相等行列式

【例 4】
$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【例 5】
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & a-1 \\ 1 & -1 & a+1 & -1 \\ 1 & a-1 & 1 & -1 \\ a+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

提问：什么是行和相等的行列式？其计算有什么规律？

总结：行列式中每一行元素的和都相等，就说这个行列式是**行和相等**的。行和相等的行列式可以把各列全都加到第 1 列，第 1 列各元素就有公因子，可以提出去，第 1 列各元素全为 1，这时各行减去第 1 行就可以实现降阶。

1.4.4 行列同数行列式

【例 6】
$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【例 7】
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & a-1 \\ 1 & -1 & a+1 & -1 \\ 1 & a-1 & 1 & -1 \\ a+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【例 8】计算 $D_n = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix} (b_i \neq 0).$

总结：将行列式添加一行和一列，使其升阶后的行列式的值不变，称为**加边法**。加边法常用于计算除主对角线外,各行(列) 对应元素分别都有相同元素的行列式。行列同数行列式可用加边法化简成爪形行列式，再化成三角形行列式进行求解。

1.4.5 递推型行列式

请大家思考如下问题：具有什么特征的行列式的求解适合用递推法？

三对角行列式或者爪形（含异爪）都适用用递推法求解。这类行列式往往有较多的 0，所以不必刻意消 0，而是直接按行或按列展开，尽快得到递推式。关键在于找到递推关系并进行求解。

【例 9】计算 $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$

【例 10】证明: $D_n = \begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^2 & 2a \end{vmatrix} = (n+1)a^n.$

1.5 克拉默法则

定理（克拉默法则）：

设线性非齐次方程组

[illegible]

或简记为

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i=1,2,\dots,n$$

其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组有唯一解

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \quad j=1,2,\cdots,n.$$

其中 D_j 是用常数项 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 替换 D 中第 j 列所成的行列式, 即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【例 1】用克拉默法则解下列线性方程组:

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

2.1 矩阵的定义

高斯消元法示例详见视频讲解

[illegible]
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

注 2: 当 $m=n$ 时, 称 A 为 n 阶矩阵或 n 阶方阵.

注 3: 当 $m=1$ 时, 它是只有一行的矩阵, 称行矩阵, 记为 $A=[a_1, a_2, \dots, a_n]$, 也常把行矩阵称为 n 维行向量, 记为 $A=(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

同样, 只有一列的矩阵称为列矩阵, 或叫作 m 维列向量. 记为

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

注 4: 若两个矩阵的行数和列数均相等, 称 $A_{m \times n}$ 与 $B_{m \times n}$ 为同型矩阵. 若两个同型矩阵 A 与 B 的对应元素均相等, 则称矩阵 A 和矩阵 B 相等, 记作 $A=B$ (两矩阵相等则必同型, 但反之不成立).

2.2 常见的特殊矩阵

下面介绍几种特殊矩阵，在以后的讨论中将看到它们的重要用处。

(1) **零矩阵**：元素全为零的矩阵，记作 $\mathbf{O}$ 。

(2) **对角矩阵**：若一个 n 阶方阵除主对角线上的元素之外，其余元素全部为零，则此矩阵称为对角矩阵，通常用 $\mathbf{A}$ 表示，即

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

这里非主对角线上的零元素可以省略不写，记为 $\mathbf{A} = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ 。

(3) **数量矩阵**：主对角线上元素全相等的对角矩阵

$$\text{diag}(k, k, \dots, k) = \begin{pmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix}$$

(4) **单位矩阵**：主对角线上元素全为 1 的数量矩阵，记为 $\mathbf{E}$ 或 $\mathbf{I}$ 。有时，为强调 n 阶单位矩阵也常用 $\mathbf{E}_n$ 或 $\mathbf{I}_n$ 表示。

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

(5) **上三角阵**：满足 $a_{ij} = 0 (i > j)$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(6) **下三角阵**：满足 $a_{ij} = 0 (i < j)$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(7) **行阶梯矩阵**：一个矩阵称为行阶梯矩阵，需满足以下两个条件。

①零行在底部：任何非零行（矩阵的行中至少有一个元素不为零）都在全零行（矩阵中所有元素都为零的行）的上面。也就是说，全零行都位于矩阵的底部；

②非零首元逐行右移：从左至右，每行的首个非零元素（称为该行的非零首元）所在的列，严格位于前一行非零首元所在列的右侧。

示例：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(8) 行最简矩阵：若行阶梯矩阵还满足以下条件，则称它为行最简矩阵.

①非零行的非零首元均为 1 ；

②非零首元所在列的其他元素（包括非零首元上方的元素）全为 0.

示例：

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3 矩阵基本运算（加减法、数乘、乘法）

2.3.1 矩阵的加减法

(1) 矩阵加减法定义

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 和 $B = (b_{ij})_{m \times n}$ ，规定

$$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

注：只有行数相同，列数也相同的矩阵（即同型矩阵）才能相加，且同型矩阵之和仍是同型矩阵。

(2) 矩阵加减法运算律

① 交换律: $A + B = B + A$ ② 结合律: $(A + B) + C = A + (B + C)$

2.3.2 矩阵的数量乘法（简称数乘）

(1) 矩阵数乘的定义

设 k 为任意一个数， $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ，称矩阵 kA 为数 k 与矩阵 A 的数量乘积

$$kA = (ka_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

注：数 k 乘一个矩阵 A ，需要用数 k 乘矩阵 A 的每一个元素，这一点要跟行列式区分开来。

(2) 矩阵数乘的运算律

设 A, B 都是 $m \times n$ 矩阵， k, l 皆为任意数，则有

① $(kl)A = k(lA)$ ② $(k + l)A = kA + lA$ ③ $k(A + B) = kA + kB$

(3) 矩阵数乘的行列式公式

当矩阵为方阵时，其行列式常被记作 $|A|$ 或 $\det A$ 。

矩阵数乘的行列式公式： $|kA| = k^n |A|$ ，请注意区分 $k|A|$ 与 $|kA|$ 。

2.3.3 矩阵的乘法

矩阵乘法是矩阵运算的精髓所在。

(1) 矩阵乘法的定义

设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵, B 是一个 $n \times s$ 矩阵, 即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

则 A 与 B 的乘积 AB (记作 $C = (c_{ij})$) 是一个 $m \times s$ 矩阵, 且

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

即矩阵 $C = AB$ 的第 i 行第 j 列元素 c_{ij} , 是 A 的第 i 行 n 个元素与 B 的第 j 列相应的 n 个元素分别相乘的乘积之和。

矩阵乘法图示如下:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} i \\ \left[\begin{array}{cccc} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right] \\ m \times n \end{array} & \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{array} \right] \\ n \times s \end{array} & = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} \vdots & c_{ij} & \vdots \end{array} \right] \\ m \times s \end{array} \end{array}$$

注: 要求只有当 A 的列数等于 B 的行数时, 两个矩阵 A 与 B 的乘积 AB 才有意义 (AB 可乘), 否则 A 与 B 不可乘。

示例:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \text{ 而 } BA \text{ 无意义}$$

(2) 矩阵乘法的运算律

矩阵乘法与数的乘法有着相似的运算律, 矩阵乘法满足下列运算律:

① 数乘结合律: $k(AB) = (kA)B = A(kB)$, 其中 k 是数.

② 结合律: $(AB)C = A(BC)$

③ 分配律: $A(B+C) = AB+AC$, $(B+C)A = BA+CA$

(3) 矩阵乘法的注意事项 (易错点)

矩阵乘法不满足交换律和消去律, 这是矩阵乘法区别于数的乘法的重要特点! 关于矩阵的乘法运算, 有

以下几点需要特别强调:

① 矩阵的乘法不满足交换律. 一般情况下, $AB \neq BA$.

示例: 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

② 因为矩阵乘法不满足交换律, 所以 $(AB)^k$ 与 $A^k B^k$ 一般不相等, 而且与两个矩阵有关的因式分解与二项式定理一般也不成立。

③ 矩阵乘法不满足交换律, 并不等于说对任意的两个矩阵 A 与 B , 都有 $AB \neq BA$. 例如

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

当 $AB = BA$ 时, 称 AB 可交换 (或称 A 与 B 可交换)。不难证明, 若 $AB = BA$, 则 A, B 必是同阶方阵。

④ 单位矩阵在矩阵乘法中的作用与数 1 在数的乘法中的作用是类似的。不难证明,

$$E_m A_{m \times n} = A_{m \times n} E_n = A_{m \times n}$$

注: 此外也可以证明, 与任意的 n 阶矩阵可交换的矩阵必是 n 阶数量矩阵 (不要求掌握证明过程)。

⑤ 由矩阵乘积 $AB = O$, 不能推出 $A = O$ 或 $B = O$. 换句话说, $A \neq O$ 且 $B \neq O$, 仍有可能使 $AB = O$.

示例:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

这相对于数的乘法是一个奇特的现象. (等学习完线性方程组后便不难理解: 如果以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组有非零解, 则将非零解按列排成的矩阵 B , 便可以得到 $AB = O$.)

⑥ 矩阵乘法不满足消去律, 即 $A \neq O$ 时, 由 $AB = AC$, 不能推出 $B = C$. 因为

$$AB = AC \Rightarrow AB - AC = O \Rightarrow A(B - C) = O$$

但并不能由 $A(B - C) = O$ 推出 $B - C = O$, 即 $B = C$

示例: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

有

$$AB = AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{但 } B \neq C.$$

(4) 矩阵乘法的行列式公式

特殊地, 假设 A, B 是两个 n 阶矩阵, 有 $|AB| = |A| \cdot |B|$

注: 若 A, B 不为方阵, 此结论不成立.

【例 1】证明: $\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$. (对角矩阵的乘积仍为对角矩阵)

注: 类似地, 有结论“两个上三角矩阵的乘积仍是上三角矩阵, 两个下三角矩阵的乘积仍是下三角矩阵”.

【例 2】设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & k_3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} l_1 & \\ & l_2 \end{pmatrix}$, 求 AB 与 CA .

【例 3】设 $A = (1, 2, -3)$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 求 AB 与 BA .

【例 4】设 A, B 为 n 阶方阵, 满足等式 $AB = O$. 则① $A = O$ 或 $B = O$; ② $A + B = O$; ③ $|A| = 0$ 或 $|B| = 0$;

④ $|A| + |B| = 0$; ⑤ 若 $A \neq O$ 则 $B = O$; ⑥ $BA = O$. 以下各选项中哪个是正确的 () ?

(A) ①③⑤⑥都成立

(B) 只有③成立, 其他不成立

(C) 只有③⑤成立, 其他不成立

(D) 只有②④⑥不成立, 其他都成立

2.4 方阵的幂和方阵的多项式

2.4.1 方阵的幂

(1) 定义

设 A 是 n 阶矩阵, k 个 A 的连乘积称为 A 的 k 次幂, 记作 A^k , 即

$$A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ 个}},$$

其中 k 为正整数. 并规定 $A^0 = E$.

(2) 运算律

当 k, l 为正整数时, 有

$$\begin{aligned} A^k A^l &= A^{k+l} \\ (A^k)^l &= A^{kl} \end{aligned}$$

2.4.2 方阵的多项式

(1) 定义

设 $f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是 x 的 k 次多项式, A 是 n 阶矩阵, 则

$$f(A) = a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E.$$

称为矩阵 A 的 k 次多项式 (注意最后一项应写为 $a_0 E$).

注: 只有方阵才有幂的概念.

(2) 运算律

由定义容易证明: 若 $f(x), g(x)$ 为多项式, A, B 均是 n 阶矩阵, 则

$$f(A)g(A) = g(A)f(A).$$

例如

$$(A^2 + A - 2E)(A - E) = (A - E)(A^2 + A - 2E) = A^3 - 3A + 2E.$$

但一般来说,

$$f(A)g(B) \neq g(B)f(A).$$

例如

$$(A + E)(B - E) \neq (B - E)(A + E).$$

因为

$$(A+E)(B-E) = AB - A + B - E$$

$$(B-E)(A+E) = BA - A + B - E$$

由于一般情况下, $AB \neq BA$, 显然两者并不完全相等。

思考: 若 $f(x), g(x)$ 为多项式, A, B 均是 n 阶矩阵, 当满足什么条件时, 有 $f(A)g(B) = g(B)f(A)$ 成立?

(3) 可交换矩阵的相关结论

若 $AB = BA$, 则

$$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$$

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$$

$$(AB)^k = A^k B^k$$

$$(A+B)^m = C_m^0 A^m + C_m^1 A^{m-1} B + \cdots + C_m^{m-1} A B^{m-1} + C_m^m B^m \quad (m \text{ 为自然数})$$

注: 若 $AB \neq BA$, 则上述公式不一定成立。

特殊地, 数量矩阵 λE 与任意方阵可交换, 故下式可按二项式定理展开

$$(A + \lambda E)^n = A^n + C_n^1 \lambda A^{n-1} + C_n^2 \lambda^2 A^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1} \lambda^{n-1} A + \lambda^n E.$$

【例 1】已知 $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$, $n \geq 3$, 则 $A^n =$ _____.

【例 2】已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $n \geq 3$, 则 $A^n =$ _____.

【例 3】已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $n \geq 3$, 则 $A^n =$ _____.

【例 4】已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n \geq 3$, 则 $A^n =$ _____.

【例 5】已知 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A^2 =$ _____, $A^3 =$ _____.

【例 6】已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $n \geq 3$, 则 $A^n =$ _____.

2.5 转置矩阵

2.5.1 转置矩阵的定义

把矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 的行依次换成同序数的列得到的 $n \times m$ 矩阵称为矩阵 A 的转置矩阵, 记作 A^T . 即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

示例: 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 的转置矩阵是 $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

注: 矩阵转置, 行列式的值不变: $|A^T| = |A|$.

2.5.2 运算律

矩阵的转置也是一种运算, 满足下面的运算规律 (假设运算都是可行的):

$$(1) (A^T)^T = A$$

$$(2) (kA)^T = kA^T \quad (k \text{ 为任意数})$$

$$(3) (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(4) (AB)^T = B^T A^T$$

$$(5) (A_1 A_2 \cdots A_k)^T = A_k^T \cdots A_2^T A_1^T$$

2.5.3 对称矩阵与反对称矩阵

$A = (a_{ij})_{n \times n}$, 如果 $a_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$, 也即 $A = A^T$, 则称 A 为对称矩阵;

如果 $a_{ij} = -a_{ji} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$, 也即 $A = -A^T$, 则称 A 为反对称矩阵.

对称矩阵和反对称矩阵是两种重要的特殊方阵, 以下几条结论需记住.

结论 1: 设 B 是一个 $m \times n$ 矩阵, 则 $B^T B$ 和 BB^T 都是对称矩阵.

证明: 因为 $B^T B$ 是 n 阶矩阵, 且 $(B^T B)^T = B^T (B^T)^T = B^T B$, 故 $B^T B$ 是 n 阶对称矩阵. BB^T 同理可证.

结论 2: 对反对称阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 来说, 必有 $a_{ii} = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$.

结论 3: 对奇数阶的反对称阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 来说, 必有 $|A| = 0$.

结论 4: 任意一个 n 阶方阵都可以表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和.

证明: 任意一个 n 阶方阵都可以写成 $A = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2}$

由于

$$\left(\frac{A+A^T}{2}\right)^T = \frac{A^T + (A^T)^T}{2} = \frac{A+A^T}{2}, \quad \left(\frac{A-A^T}{2}\right)^T = \frac{A^T - (A^T)^T}{2} = -\frac{A-A^T}{2}$$

因此 $\frac{A+A^T}{2}$ 为对称矩阵, $\frac{A-A^T}{2}$ 为反对称矩阵. 故得证.

【例 1】 证明: 设矩阵 A 为 n 阶反对称矩阵, 对于任意 n 维列向量 α , 都有 $\alpha^T A \alpha = 0$.

【例 2】 设列矩阵 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 满足 $X^T X = 1$, E 为 n 阶单位矩阵, $H = E - 2XX^T$, 证明 H 是对称矩阵, 且 $HH^T = E$.

【例 3】 (1) “ $A^2 = O$, 则 $A = O$ ” 是否正确, 若正确, 证明之; 若不正确, 举例说明.

(2) 证明: 若 $A^2 = O$, 且 $A^T = A$, 则 $A = O$.

2.6 伴随矩阵

2.6.1 伴随矩阵的定义

设 n 阶方阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

记行列式 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij} , 则称

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

为矩阵 A 的伴随矩阵.

注 1: 元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 在伴随矩阵 A^* 中所处的位置, 不要放错! $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $A^* = (A_{ji})_{n \times n}$.

注 2: 二阶矩阵的伴随矩阵速记方法, 主对角线元素对调, 副对角线元素变号 (主对调, 副变号)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2.6.2 伴随矩阵的相关公式

若 A 为 n 阶方阵, $n \geq 2$, 有

$$(1) AA^* = A^*A = |A|E$$

$$\text{证明: } AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{1k} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{nk} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk} A_{1k} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{nk} A_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & \\ & \ddots & \\ & & |A| \end{pmatrix} = |A|E.$$

同理可证 $A^*A = |A|E$, 所以 $AA^* = A^*A = |A|E$.

$$(2) |A^*| = |A|^{n-1}$$

证明: 由 $AA^* = A^*A = |A|E$, 两边取行列式, 知 $|AA^*| = |A| \cdot |A^*| = ||A|E| = |A|^n$

当 $|A| \neq 0$ 时, $|A^*| = |A|^{n-1}$. 当 $|A| = 0$ 时, 亦可证明此结论仍成立 (需要用到秩).

综上, 有 $|A^*| = |A|^{n-1}$ 成立.

$$(3) (AB)^* = B^* A^*$$

$$(4) (A^T)^* = (A^*)^T$$

【例 1】设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^* =$ _____.

【例 2】设矩阵 A 为 3 阶矩阵, $|A| = 2$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 若交换 A 的第 1 行与第 3 行得矩阵 B , 则 $|BA^*| =$ _____.

【例 3】设矩阵 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 满足 $A^* = A^T$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, A^T 为 A 的转置矩阵. 若 a_{11}, a_{12}, a_{13} 为三个相等的正数, 则 a_{11} 为 ().

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(B) 3

(C) $\frac{1}{3}$

(D) $\sqrt{3}$

【例 4】若 $A^n = E$, n 为正整数, 则 $(A^*)^n =$ _____.

2.7 逆矩阵

大家知道, 在数的运算中, 当数 $a \neq 0$ 时, $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$, 这里 $a^{-1} = \frac{1}{a}$ 称为 a 的倒数; 在矩阵的乘法运算中, 单位矩阵 E 相当于数的乘法运算中的 1. 那么, 对于一个矩阵 A , 是否存在一个矩阵 A^{-1} , 使得 $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ 呢? 如果存在这样的矩阵 A^{-1} , 就称 A 是可逆矩阵, 并称 A^{-1} 是 A 的逆矩阵. 下面给出逆矩阵的定义.

2.7.1 逆矩阵的定义

对于 n 阶矩阵 A , 如果存在 n 阶矩阵 B , 使得 $AB = BA = E$, 其中 E 是 n 阶单位矩阵, 则称 A 是可逆的, 并将 B 称为 A 的逆矩阵, 记作 A^{-1} .

注: 与伴随矩阵类似, 只有方阵才谈逆矩阵这一概念.

对上述逆矩阵的定义做两点补充:

(1) 如果 A 可逆, 则 A 的逆矩阵一定是唯一的.

证明: 假设 B, C 都是 A 的逆矩阵, 则有 $B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C$, 这就证明了 A 的逆矩阵是唯一的.

(2) 若 A, B 都是 n 阶矩阵, 且 $AB = E$, 则 $BA = E$, 即 A, B 皆可逆, 且 A, B 互为逆矩阵.

证明: 由 $AB = E$ 可知, $|A||B| = |E| = 1$, 故 $|A| \neq 0$. 可知 A 是可逆的, 所以

$$B = EB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}E = A^{-1}, \quad BA = A^{-1}A = E$$

类似地, 当 $BA = E$ 时, 可以证明 $B = A^{-1}$

这条结论告诉我们, 判断 B 是否为 A 的逆, 只需要验证 $AB = E$ 或 $BA = E$ 的一个等式成立即可.

需要注意的是, 当 A, B 是同阶的方阵时, 由 $AB = E$ 可推得 $BA = E$. 但对非方阵 A, B , 由 $AB = E$ 不一定有 $BA = E$. 示例:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

【例 1】设方阵 A 满足方程 $A^2 - 3A - 10I = O$, 证明: $A, A - 4I$ 都可逆, 并求它们的逆矩阵.

【例 2】设 n 阶矩阵 A, B 满足 $A + B = AB$ ，试证明：

(1) $A - E$ 可逆.

(2) $AB = BA$.

【例 3】设 A, B, C 均为 n 阶方阵，若 $ABC = E$ ，则下列乘积： ACB, BAC, BCA, CAB, CBA 中哪些必等于单位阵 E 。

2.7.2 从行列式角度理解逆矩阵

前面已经介绍过， $AA^* = A^*A = |A|E$ 。大家不妨思考下，如果 $|A| \neq 0$ 能得到什么结论？

定理： n 阶方阵 A 可逆的充分必要条件是 $|A| \neq 0$ 。当 $|A| \neq 0$ ，可以推出 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$ 。

证明：（充分性） 因为 $|A| \neq 0$ ，由 $AA^* = A^*A = |A|E$ 有

$$A \left(\frac{1}{|A|} A^* \right) = \left(\frac{1}{|A|} A^* \right) A = E$$

因此， A 是可逆矩阵，且 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$

（必要性） 设 A 是可逆的，则存在 A^{-1} ，使 $AA^{-1} = E$ 。两边取行列式，得 $|AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = |E| = 1$ 。

因此， $|A| \neq 0$ 。

上述定理告诉我们，行列式值是刻画方阵可逆的一个重要工具。同时，我们还得到如下结论：

如果 A 是可逆的，则

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}, \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*.$$

由上述定理也可推得，

对角阵和上（下）三角矩阵可逆的充要条件是它们的主对角元 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ 全不为零。

【例 4】利用伴随矩阵求 3 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

【例 5】设矩阵 A, B 均为 n 阶方阵, 则下列命题正确的是 ().

- (A) A 或 B 可逆, 必有 AB 可逆 (B) A 或 B 不可逆, 必有 AB 不可逆
(C) A 与 B 均可逆, 必有 $A+B$ 可逆 (D) A 与 B 均不可逆, 必有 $A+B$ 不可逆

【例 6】设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $(A+2E)^{-1}(A^2-4E) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2.7.3 逆矩阵相关结论

- (1) $(A^{-1})^{-1} = A$ (反身性)
- (2) 若 A 可逆, k 是不为零的数, 则 kA 也是可逆矩阵, 且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.
- (3) 若 A 与 B 都是 n 阶可逆矩阵, 则 AB 也是 n 阶可逆矩阵, 且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- (4) 若 $A_i (i=1, \dots, m)$ 均为 n 阶可逆矩阵, 则 $A_1 \cdots A_m$ 也为 n 阶可逆矩阵, 且 $(A_1 \cdots A_m)^{-1} = A_m^{-1} \cdots A_1^{-1}$.
- (5) 若 A 可逆, 则 $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

【例 7】设 A 是三阶矩阵， A^* 是其伴随矩阵，已知 $|A| = \frac{1}{2}$ ，则 $|(3A)^{-1} - 2A^*| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【例 8】设 $|A| = 1$ ， $|B| = 2$ ， $|A+B| = 2$ ，则行列式 $|(A^{-1} + B^{-1})^{-1}| = (\quad)$.

(A) 1

(B) 2

(C) $\frac{1}{2}$

(D) -1

【例 9】设 A 是 $n (n \geq 3)$ 阶可逆方阵，下列结论正确的是 $(\quad)$.

① $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

② $(kA)^* = k^{n-1} A^* (k \neq 0)$.

③ $(A^*)^T = (A^T)^*$.

④ $(A^*)^* = |A|^{n-2} A$.

(A) ①②

(B) ②③

(C) ③④

(D) ①②③④

【例 10】设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ ，且 $A^3 = O$. 求：

(1) 求 a 的值；(2) 若矩阵 X 满足 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$ ，求 X .

2.8 矩阵的分块

2.8.1 分块矩阵的概念

当矩阵的行数和列数较大时, 计算起来是很困难的, 特别是关于矩阵的乘法和求逆运算. 若将一个矩阵根据需要分成若干个“子块”, 不仅可使矩阵显得结构简单、清晰, 而且能简化矩阵的运算, 便于某些问题的论证。

示例: 下面的 5 阶方阵可用横线、纵线将它分成 4 块, 构成一个分块矩阵, 即

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ \hline 6 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} E_3 & B \\ C & O_2 \end{pmatrix}$$

其中, E_3 为 3 阶单位方阵, O_2 为 2 阶零矩阵, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

给定一个矩阵, 横线纵线的取法不同, 则会得到不同的分块矩阵. 常用的分块矩阵, 除了上述示例 2×2 分块矩阵, 还有以下几种形式:

(1) 按列分块

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{array} \right) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

其中, α_j 是 A 的第 j 列, $\alpha_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{sj})^T, j=1, 2, \cdots, n$.

(2) 按行分块

$$A = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s \end{pmatrix}$$

其中, β_i 是 A 的第 i 行, $\beta_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}), i=1, 2, \cdots, s$.

(3) 分块对角矩阵 (准对角矩阵)

当 n 阶矩阵 A 中非零元素都集中在主对角线附近, 有时可以分块成下面的对角块矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_m \end{pmatrix}$$

其中, A_i 是 r_i 阶方阵 $(i=1,2,\dots,m; \sum_{i=1}^m r_i = n)$.

示例:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{pmatrix}$$

2.8.2 分块矩阵的运算

(1) 分块矩阵的加减法

两个分块矩阵若要相加或相减, 必须采用相同的分块方式, 且对应子块均同型。

若矩阵 A, B 有相同的行数和列数 (同型矩阵), 且有

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{st} \end{bmatrix}$$

其中 A_{ij} 与 B_{ij} 有相同的行数和列数 (同型), 则

$$A \pm B = \begin{bmatrix} A_{11} \pm B_{11} & \cdots & A_{1t} \pm B_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} \pm B_{s1} & \cdots & A_{st} \pm B_{st} \end{bmatrix}$$

(2) 分块矩阵的数乘

$$\text{若矩阵 } A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}, \text{ 则 } kA = \begin{bmatrix} kA_{11} & \cdots & kA_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ kA_{s1} & \cdots & kA_{st} \end{bmatrix}$$

(3) 分块矩阵的乘法

分块矩阵乘法需满足子块行列匹配条件, 即前矩阵子块的列数等于后矩阵对应子块的行数。

设 $A = (A_{ij})_{r \times s}, B = (B_{ij})_{s \times t}$ 分别为 $r \times s$ 和 $s \times t$ 分块矩阵, 而且 A 的列分块法与 B 的行分块法相同, 则

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix} = C = (C_{kl})_{r \times t}$$

其中 C 是 $r \times t$ 分块矩阵, 且 $C_{kl} = A_{k1}B_{1l} + A_{k2}B_{2l} + \cdots + A_{ks}B_{sl} (k=1, 2, \cdots, r; l=1, 2, \cdots, t)$.

示例:

$$AB = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = [X_1 \mid Y_1] \begin{bmatrix} M_1 \\ N_1 \end{bmatrix} = X_1 M_1 + Y_1 N_1 = \cdots = \left[\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right]$$

$$AB = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} X_2 & Y_2 \\ Z_2 & W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 & N_2 \\ L_2 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 M_2 + Y_2 L_2 & X_2 N_2 + Y_2 K_2 \\ Z_2 M_2 + W_2 L_2 & Z_2 N_2 + W_2 K_2 \end{bmatrix} = \cdots$$

$$AB = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} X_3 \\ Y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_3 & N_3 & L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_3 M_3 & X_3 N_3 & X_3 L_3 \\ Y_3 M_3 & Y_3 N_3 & Y_3 L_3 \end{bmatrix} = \cdots$$

(4) 分块矩阵的转置

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}$$

则

$$A^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{s2}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1t}^T & A_{2t}^T & \cdots & A_{st}^T \end{bmatrix}$$

注: 大家可以理解为“大转+小转”.

2.8.3 分块对角矩阵的运算

分块对角矩阵相对特殊, 其相关结论更加丰富。

(1) 假设分块对角矩阵 A 与 B 是 n 阶方阵, 且 A_i 与 $B_i (i=1, 2, \cdots, s)$ 是同阶方阵

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_s \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & & \\ & B_2 & \\ & & \ddots \\ & & & B_s \end{bmatrix}$$

则

$$|A| = |A_1| |A_2| \cdots |A_s|, \quad |B| = |B_1| |B_2| \cdots |B_s|$$

且

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 B_1 & & \\ & A_2 B_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_s B_s \end{bmatrix}$$

仍为同类型的分块对角矩阵.

(2) 分块对角矩阵的幂

$$\begin{bmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_s \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A_1^n & & \\ & A_2^n & \\ & & \ddots \\ & & & A_s^n \end{bmatrix}$$

注: 分块副对角矩阵的幂无此规律.

(3) 分块对角矩阵 A 可逆的充分必要条件是 $A_i (i=1, 2, \dots, s)$ 均为可逆矩阵, 且

$$\begin{bmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & \\ & A_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & A_s^{-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & & \\ & & A_2 & \\ & & & \ddots \\ A_s & & & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & & \\ & & A_2^{-1} & \\ & & & \ddots \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$$

常考 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}.$

2.8.4 分块三角矩阵的运算

(1) 拉普拉斯公式

$$\textcircled{1} \begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & * \\ O & B \end{vmatrix} = |A| |B|. \quad \textcircled{2} \begin{vmatrix} O & A \\ B & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| |B|. \quad (m, n \text{ 为方阵 } A, B \text{ 的阶数})$$

(2) 分块三角矩阵的逆

示例：设 $A = \begin{pmatrix} B & O \\ C & D \end{pmatrix}$ ，其中 B, D 皆为可逆方阵，证明 A 可逆并求 A^{-1} 。

证明： $|A| = |B| \cdot |D| \neq 0$ ，所以 A 可逆。设 $A^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$

其中 X 与 B ， T 与 D 分别是同阶方阵，于是由

$$\begin{pmatrix} B & O \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BX & BY \\ CX + DZ & CY + DT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & O \\ O & E_2 \end{pmatrix}$$

得

$$\begin{aligned} BX &= E_1 & \Rightarrow X &= B^{-1} \\ BY &= O & \Rightarrow Y &= B^{-1}O = O \\ CX + DZ &= O & \Rightarrow DZ &= -CX = -CB^{-1} \Rightarrow Z = -D^{-1}CB^{-1} \\ CY + DT &= E_2 & \Rightarrow DT &= E_2 \Rightarrow T = D^{-1} \end{aligned}$$

所以

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ -D^{-1}CB^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$$

实际上，若 n 阶下（上）三角矩阵 A 可逆，则其逆矩阵 A^{-1} 也是下（上）三角矩阵。

【例 1】已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ， $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ，求 AB 。

【例 2】已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ， $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ，求 AB 。

【例 3】已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求 A^{100} .

【例 4】设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} .

【例 5】设 A, B 均为 2 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵. 若 $|A|=2, |B|=3$, 则分块矩阵 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵为 ().

(A) $\begin{bmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{bmatrix}$

【例 6】设 A 为 n 阶可逆矩阵, α 为 n 维列向量, b 为常数. 记分块矩阵 $P = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix}$,

其中 A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵, E 为 n 阶单位矩阵. 求:

(1) 计算并化简 PQ ; (2) 证明: 矩阵 Q 可逆的充分必要条件是 $\alpha^T A^{-1} \alpha \neq b$.

2.9 初等变换与初等矩阵

2.9.1 初等变换定义

定义下列 3 种变换称为矩阵的初等行变换.

- (1) 对换变换: 交换矩阵 A 的两行 (row) 位置;
- (2) 倍乘变换: 用一非零常数 $c(c \neq 0)$ 乘矩阵 A 的某一行;
- (3) 倍加变换: 把矩阵 A 的某一行的 k 倍加到矩阵 A 的另一行上去.

类似地, 有矩阵的初等列 (column) 变换, 两者统称为矩阵的初等变换.

注 1: 一个 $m \times n$ 型矩阵经初等变换后仍是 $m \times n$ 型矩阵.

注 2: 初等变换是可逆的. 对换变换的逆变换是其自身, 倍乘变换 $kr_i(kc_i)$ 的逆变换是 $\frac{1}{k}r_i\left(\frac{1}{k}c_i\right)$, 倍

加变换 $r_i + kr_j(c_i + kc_j)$ 的逆变换是 $r_i - kr_j(c_i - kc_j)$. 例如, 如果 $A \xrightarrow{r_i + kr_j} B$, 那么 $B \xrightarrow{r_i - kr_j} A$.

2.9.2 初等变换相关定理

定理 1: 任给 $m \times n$ 型矩阵 A , 皆可经过有限次初等行变换化为行阶梯形矩阵或行最简形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定理 2: 对于任意一个 $m \times n$ 矩阵 A , 总可经过有限次初等变换 (初等行变换和初等列变换) 变为标准型矩阵 (标准形是唯一的)

$$E_{m \times n}^{(r)} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$$

此标准形由三个数 m, n, r 完全确定, 其中 r 是行阶梯矩阵中非零行的行数. 并约定 $r = 0$ 时, $E_{m \times n}^{(0)}$ 为零矩阵.

【例 1】用初等变换将 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 化为标准形矩阵.

2.9.3 矩阵等价

定义：如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B ，就称矩阵 A 与矩阵 B 等价，记作 $A \cong B$ 。

性质：

- (1) 对称性：若 $A \cong B$ ，则 $B \cong A$
- (2) 传递性：若 $A \cong B, B \cong C$ ，则 $A \cong C$

结论：矩阵等价，其对应的标准形相同。

【例 2】 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ， $B = \begin{pmatrix} 3a_{11} & 3a_{11} - 2a_{12} & a_{13} \\ 3a_{21} & 3a_{21} - 2a_{22} & a_{23} \\ 3a_{31} & 3a_{31} - 2a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ，证明：矩阵 A 与 B 等价。

2.9.4 初等矩阵的定义

由单位矩阵 E 经一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵。三种初等变换对应三种初等矩阵如下：

- (1) 对换矩阵：交换单位矩阵的第 i, j 两行（或列）所得到的矩阵

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & 0 & \cdots & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ & 1 & \cdots & & 0 \\ & & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \end{matrix}$$

- (2) 倍乘矩阵：用不为零的数 k 去乘单位矩阵的第 i 行（或列）所得到的矩阵

$$E_i(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & k & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \end{matrix}$$

(3) 倍加矩阵：将单位矩阵的第 j 行乘以常数 k 加到第 i 行 ($j \neq i$) (或第 i 列乘以常数 k 加到 j 列) 得到的矩阵

$$E_{ij}(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \cdots & k \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{第 } i \text{ 行} \\ \text{第 } j \text{ 行} \end{matrix}$$

2.9.5 初等矩阵相关定理

引例：计算下列初等矩阵与矩阵 $A = (a_{ij})_{3 \times n}$, $B = (b_{ij})_{3 \times 2}$, $C = (c_{ij})_{3 \times 3}$ 的乘积.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} + kb_{31} & b_{12} + kb_{32} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{13} & c_{12} \\ c_{21} & c_{23} & c_{22} \\ c_{31} & c_{33} & c_{32} \end{pmatrix}$$

可以发现，初等矩阵左乘 A , B (右乘 C) 的结果是对 A , B 做初等行变换 (对 C 做初等列变换). 这样，初等变换与初等矩阵就可以建立起对应关系，对矩阵进行初等变换可以用相应的初等矩阵左乘或右乘来表示。

因此有定理如下：

定理 1: 设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵，对 A 施行一次初等列变换，相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵；对 A 施行一次初等行变换，相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵。

基于此，我们可以将 2.9.2 初等变换介绍的两个定理进行深化：

定理 2: 对任意一个 $m \times n$ 矩阵 A ，总存在行最简形矩阵 U 和 m 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_s$ ，使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A = U.$$

定理 3: 对任意 $m \times n$ 矩阵 A ，必可找到 m 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_s$ 及 n 阶初等矩阵 $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$ ，使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = E_{m \times n}^{(r)},$$

其中 r 是一个不超过 $\min(m, n)$ 的非负整数。

2.9.6 初等矩阵相关结论

$$(1) |E_{ij}| = -1. \quad (2) |E_i(k)| = k(k \neq 0). \quad (3) |E_{ij}(k)| = 1.$$

$$(1) E_{ij}^{-1} = E_{ij}. \quad (2) E_i^{-1}(k) = E_i\left(\frac{1}{k}\right). \quad (3) E_{ij}^{-1}(k) = E_{ij}(-k).$$

$$(1) E_{ij}^T = E_{ij}. \quad (2) E_i^T(k) = E_i(k). \quad (3) E_{ij}^T(k) = E_{ji}(k).$$

【例 3】
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{100} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【例 4】设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 且 $|A| = 2$, $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 3a_{11} + a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 3a_{21} + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 3a_{31} + a_{33} \end{pmatrix}$, 求 A^*B .

【例 5】设 A 是 3 阶矩阵, 将 A 的第 1、2 行互换得矩阵 B , 再将 B 的第 2、3 列互换得单位矩阵, 记

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则 } A^* = (\quad).$$

(A) $P_1 P_2$

(B) $P_2 P_1$

(C) $-P_1^{-1} P_2$

(D) $-P_1 P_2^{-1}$.

2.9.7 利用初等变换法求逆矩阵

除了利用伴随矩阵求逆矩阵，还可从初等变换的角度来求逆矩阵。

前面已经介绍过，对任何矩阵 A ，都可经若干次初等行变换将其化为行最简形矩阵，即存在初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_s$ ，使得 $P_s \cdots P_2 P_1 A = U$ 。

若矩阵 A 可逆，则此结论可进一步加强为：可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵。

进而得到如下推论：可逆矩阵 A 可以表示为若干个初等矩阵的乘积。

推论证明如下：

存在初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_s$ 使得 $P_s \cdots P_2 P_1 A = E$

所以

$$A = (P_s \cdots P_2 P_1)^{-1} = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1},$$

其中 $P_1^{-1}, P_2^{-1}, \dots, P_s^{-1}$ 仍是初等矩阵，推论得证。

基于此，可用初等变换求逆矩阵。根据 $A^{-1} = P_s \cdots P_2 P_1$ ，于是

$$A^{-1}(A, E) = (E, A^{-1}) \Rightarrow P_s \cdots P_2 P_1(A, E) = (E, A^{-1})$$

这个过程相当于

$$(A, E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E, A^{-1})$$

类似有

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

这两种用初等变换求逆矩阵的方法，便是我们求逆矩阵的常用方法。但是必须注意，当用初等行（列）变换求逆矩阵时，必须始终施以行（列）变换，不能交叉混用。

【例 6】设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ，求 A^{-1} 。

2.10 矩阵的秩

2.10.1 子式、秩的概念

下面引入一个重要的概念——矩阵的秩. 在此之前, 先引入另一个概念——子式.

定义: 在矩阵 A 中任取 k 行 k 列, 由位于这些行列相交处的所有元素 (保持原序) 所构成的 k 阶行列式叫作矩阵 A 的 k 阶子式.

示例: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, 矩阵 A 的第 1、3 行与第 2、4 列相交处的元素就构成一个二阶子式 $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ 为矩阵 A 的一个 3 阶子式.

定义: 设 A 为 $m \times n$ 矩阵. 如果 A 的所有不为零的子式的最高阶数为 r , 则称 r 为矩阵 A 的秩 (rank), 记作 $r(A) = r$.

规定零矩阵的秩是 0, 进而有 $A = O \Leftrightarrow r(A) = 0$.

注: $r(A) = r$ 说明存在 r 阶子式不为零, 而任何 $r+1$ 阶子式 (若有) 皆为零 (更高阶的子式亦为零).

从定义不难得到结论如下:

- (1) $0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$.
- (2) $r(A) < k \Leftrightarrow$ 矩阵 A 的任意一个 k 阶子式均为 0.
- (3) $r(A) \geq s \Leftrightarrow$ 矩阵 A 存在一个 s 阶子式不为 0.
- (4) 当 A 为 n 阶方阵时, $|A| \neq 0$ 的充要条件为 $r(A) = n$. 如果 $r(A) = n$, 称 A 为满秩矩阵.
- (5) 对于行阶梯矩阵, 其秩等于它的非零行数.

注: 经过初等行变换, 将原矩阵变为阶梯形矩阵, 假设变换后的阶梯形矩阵有 s 行非零, 剩下的 $n-s$ 行全零. 那么肯定能找到一个 s 阶子式不为零, 而显然所有 $s+1$ 阶子式全为零. 因此阶梯形矩阵秩为 s .

由此可见, 对于行阶梯矩阵, 其秩就等于它的非零行数. 既然如此, 能否利用行阶梯阵来求一般矩阵的秩呢? 毕竟直接利用秩的定义求一般矩阵的秩是极不方便的, 有没有什么简便方法? 由于用初等变换可以把矩阵 A 化为行阶梯矩阵, 而行阶梯矩阵的非零行数便是它的秩, 所以自然地问能否用初等变换化行阶梯矩阵的方式来求出矩阵的秩.

而初等变换不改变矩阵的秩! (该定理的证明过程不要求掌握), 故大功告成!

2.10.2 矩阵的秩相关结论

最后, 给出一些常用的矩阵的秩相关结论如下.

(6) 初等变换不改变矩阵的秩.

(7) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 若 P, Q 分别为 m, n 阶可逆矩阵, 则 $r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ)$.

(8) 矩阵 A 与矩阵 B 等价 $\Leftrightarrow r(A) = r(B)$.

(9) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 则 A 行满秩 $\Leftrightarrow r(A) = m \Leftrightarrow A$ 的等价标准型为 $(E_m \ O)$.

(10) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 则 A 列满秩 $\Leftrightarrow r(A) = n \Leftrightarrow A$ 的等价标准型为 $\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}$.

(11) $r(kA) = r(A)$, $k \neq 0$.

(12) $r(A) = r(A^T) = r(A^T A) = r(AA^T)$.

(13) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times s$ 矩阵, 则 $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.

(14) 若 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, $AB = O$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$.

(15)
$$r(A^*) = \begin{cases} n, & \text{若 } r(A) = n \\ 1, & \text{若 } r(A) = n - 1 \\ 0, & \text{若 } r(A) < n - 1 \end{cases}$$

(16) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $m \times s$ 矩阵, 则 $\max\{r(A), r(B)\} \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B)$.

(17) 设 A, B 均为 $m \times n$ 矩阵, 则 $r(A \pm B) \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B)$.

(18)
$$r \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} = r(A) + r(B).$$

(19)
$$r \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix} \geq r(A) + r(B).$$

【例 1】设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, 且 $r(A) = 3$, 则 $a =$ _____.

【例 2】设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & a_5^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & a_5^3 \\ (a_1+1)^3 & (a_2+1)^3 & (a_3+1)^3 & (a_4+1)^3 & (a_5+1)^3 \end{pmatrix}$, 其中 $a_i \neq a_j (i \neq j)$, 则 $r(A) =$ _____.

【例 3】设矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & a & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 则 $a =$ _____.

【例 4】设矩阵 A 是 $m \times n$ 矩阵, $r(A) = r < m < n$, 则下列说法中正确的个数有 ().

① A 的任一 $r-1$ 阶子式均不为 0

② $|A| = 0$

③ A 的任一 r 阶子式均不为 0

④ A 经初等行变换可以化为 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$

(A) 0 个

(B) 1 个

(C) 2 个

(D) 3 个

【例 5】设 A 是 4×3 矩阵, $r(A) = 2$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $r(AB)$.

【例 6】已知 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & k \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, P 为 3 阶非零矩阵, 且 $PQ = O$, 则必有 ().

(A) 当 $k=6$ 时, $r(P)=1$

(B) 当 $k=6$, $r(P)=2$

(C) 当 $k \neq 6$ 时, $r(P)=1$

(D) 当 $k \neq 6$, $r(P)=2$

【例 7】设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ (a, b 均不为 0), 且 $r(A^*) = 1$, 则必有 ().

(A) $a = b$

(B) $a = b$ 或 $a + 2b \neq 0$

(C) $a + 2b = 0$

(D) $a \neq b$ 且 $a + 2b \neq 0$

【例 8】设矩阵 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 则下列说法中正确的是 ().

(A) 当 $m > n$ 时, 必有 $|AB| = 0$

(B) 当 $m > n$ 时, 必有 $|AB| \neq 0$

(C) 当 $m < n$ 时, 必有 $|AB| = 0$

(D) 当 $m < n$ 时, 必有 $|AB| \neq 0$

【例 9】设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, E 为 m 阶单位矩阵, 若 $AB = E$, 则 ()

(A) $r(A) = m$, $r(B) = m$

(B) $r(A) = m$, $r(B) = n$

(C) $r(A) = n$, $r(B) = m$

(D) $r(A) = n$, $r(B) = n$

【例 10】设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = A$, 证明: $r(A) + r(A - E) = n$.

是方程组的解。

通解定义：一个线性方程组的全部解的集合称为此线性方程组的解集合。表示线性方程组的全部解的表达式称为线性方程组的通解，通解是表示解集合的一种简洁方式。

3.2 解方程原理及高斯消元法

在基础阶段的学习中，大家重点需要掌握线性方程组的两个基本问题：方程组是否有解？若它有解，如何求解？

解方程组时，常常会对方程实施以下 3 种变换（对应增广矩阵的初等行变换）：

- ② 互换两个方程的位置
- ② 用一非零常数 k 乘某一个方程
- ③ 把某一方程的 k 倍加到另一个方程上去

显然这 3 种变换是可逆的。若两行被对换，则再次对换它们就会还原为原来的状态。若某行乘以非零常数 k ，则将所得的行乘以 $1/k$ 就得出原来的行。最后，考虑涉及两行的倍加变换，例如第一行和第二行，假设把第一行的 k 倍加到第二行得到新的第二行，那么“逆”变换就是把第一行的 $-k$ 倍加到（新的）第二行上就得到原来的第二行。

利用初等行变换，我们可以将原方程组化为一个容易判断是否有解以及容易求解的同解方程组。这就是求解线性方程组的基本逻辑。

高斯消元法（Gauss 消元法）

定义：将一个线性方程组所对应的增广矩阵，利用矩阵的初等行变换，将其化为阶梯形矩阵，然后再计算阶梯形矩阵所对应方程组的解，即为原线性方程组的解。这种解方程的方法称为高斯(Gauss)消元法或矩阵消元法。

显然，对一个方程组实行消元法求解，即对方程组实行了初等变换，相当于对它的增广矩阵实行了一个相应的初等变换。因此我们一般利用一个线性方程组的增广矩阵来解这个线性方程组，而不必每次把未知量写出。

接下来我们通过几个具体的例子帮助大家掌握高斯消元法求解线性方程组。

以下的例子中，希望大家能理解什么是主元位置？什么是主元列？什么是基本变量，什么是自由变量？

定义：对于矩阵 A ，**主元位置**是对应于它的行阶梯矩阵中非零首元的位置，**主元列**是 A 的含有主元位置的列。对应于主元列的变量称为**基本变量**，其他变量称为**自由变量**。

【例 1】解线性方程组
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -5 \end{cases}$$

【例 2】解线性方程组
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ 3x_1 \quad \quad - 7x_3 = 5 \end{cases}$$

【例 3】解线性方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

【例 4】解线性方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$$

【例 5】解线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

【例 6】解线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

从上面的例子可以看到，如果用初等行变换将线性方程组 $Ax = b$ 的增广矩阵 (A, b) 化成行阶梯形矩阵 (A_1, b_1) ，我们就很容易从阶梯形矩阵 (A_1, b_1) 判断方程组 $Ax = b$ 的解的情况。

(i) 线性方程组 $Ax = b$ 有解的充要条件是 (A_1, b_1) 的最后一个非零行不是形如 $(0, \dots, 0, d), d \neq 0$ 。

(ii) 若线性方程组 $Ax = b$ 有解，则方程组有唯一解的充要条件是 (A_1, b_1) 中非零行的行数与未知量的个数相同，都等于 n (n 指未知量个数，也即矩阵 A 的列)，此时没有自由变量。

(iii) 若线性方程组 $Ax = b$ 有解，则方程组有无穷多解的充要条件是 (A_1, b_1) 中非零行的行数严格小于未知量的个数，即严格小于 n (n 指未知量个数，也即矩阵 A 的列)。此时如果 (A_1, b_1) 中有 r 个非零行，则在方程组的通解中就含有 $n - r$ 个自由变量。

3.3 方程组解的判定

总结①: 应用行化简算法解线性方程组 (若为齐次, 则对系数矩阵进行行初等变换即可):

1. 写出方程组的增广矩阵;
2. 利用初等行变换把增广矩阵化为行阶梯形, 确定方程组是否有解。如果没有解则停止, 否则进行下一步;
3. 继续将增广矩阵对应的行阶梯形化成行最简形;
4. 写出由第 3 步所得矩阵对应的方程组;
5. 把第 4 步所得的每个非零方程改写为用任意自由变量表示其基本变量的形式。

温馨提示: 并不是一定要化成行最简矩阵才能求解方程, 化到行阶梯形进行赋值计算亦可。

总结②: 齐次线性方程组 $A_{m \times n}x = 0$ 有非零解的条件:

当 $r(A) = n$ 时, $A_{m \times n}x = 0$ 只有零解;

当 $r(A) < n$ 时, $A_{m \times n}x = 0$ 有含 $n - r(A)$ 个自由变量的无穷多组解。

总结③: 非齐次线性方程组 $A_{m \times n}x = b (b \neq 0)$ 有解的条件:

当 $r(A, b) = r(A) = n$ 时, 方程组有唯一解;

当 $r(A, b) = r(A) < n$ 时, 方程组有含 $n - r(A)$ 个自由变量的无穷多组解;

当 $r(A, b) \neq r(A)$ 时, 方程组无解。

【例 1】 齐次方程组 $Ax = 0$ 的系数矩阵化为阶梯形是 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则方程组自由变量不能取成 ()。

(A) x_2, x_3

(B) x_2, x_5

(C) x_1, x_4

(D) x_1, x_2

【例 2】 设矩阵 A 是 $m \times n$ 矩阵, 矩阵 B 是 $n \times m$ 矩阵, 则线性方程组 $(AB)x = 0$ ()。

(A) 当 $n > m$ 时, 仅有零解

(B) 当 $n > m$ 时, 必有非零解

(C) 当 $m > n$ 时, 仅有零解

(D) 当 $m > n$ 时, 必有非零解

【例 3】非齐次线性方程组 $Ax=b$ 中未知量个数为 n ，方程个数为 m ，则以下说法正确的是（ ）.

- (A) $r(A)=m$ 时, $Ax=b$ 有解
(B) $r(A)=m$ 时, $Ax=0$ 有非零解
(C) $r(A)=n$ 时, $Ax=b$ 有唯一解
(D) $r(A)<n$ 时, $Ax=b$ 无解

【例 4】设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{bmatrix}$, 若集合 $\Omega=\{1,2\}$, 则线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解的充分必要条件为（ ）.

- (A) $a \notin \Omega, b \notin \Omega$.
(B) $a \notin \Omega, b \in \Omega$.
(C) $a \in \Omega, b \notin \Omega$.
(D) $a \in \Omega, b \in \Omega$.

【例 5】设 A 是 $m \times n$ 矩阵, $Ax=0$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 对应的导出组, 则以下说法正确的是（ ）.

- (A) 若 $Ax=0$ 仅有零解, 则 $Ax=b$ 有唯一解
(B) 若 $Ax=0$ 有非零解, 则 $Ax=b$ 有无穷多解
(C) 若 $Ax=b$ 有无穷多解, 则 $Ax=0$ 有非零解
(D) 若 $Ax=b$ 有无穷多解, 则 $Ax=0$ 只有零解

【例 6】设齐次线性方程组
$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0 \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0 \\ \dots \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + ax_n = 0 \end{cases}$$
, 其中 $a, b \neq 0$, $n \geq 2$. 试问 a, b 取何值时, 方程组

仅有零解、有无穷多解? 当有无穷多解时, 求出其全部解.

【例 7】试问 a, b 取何值时, 方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$
 有唯一解、无解、有无穷多解? 当有无穷多解

时, 求出其全部解.

第四章 向量与方程组

4.1 向量的基本概念

为深入研究线性方程组解的结构, 建立起线性方程组的完整理论, 我们要进一步讨论 n 维向量的性质及其向量之间的线性关系, 诸如向量组的线性相关性、线性无关性、向量组的极大线性无关组, 进而研究线性方程组的基础解系和通解结构等内容。

4.1.1 向量的定义

n 个数组成的有序数组称为一个 n 维向量, 简称向量。向量常用小写的粗黑体字母来表示, 如 α, β, γ 。

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ 或 } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

上式中, 前者称为**行向量**, 后者称为**列向量**。由于列向量不便于书写, 常将列向量写作 $(a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ 。数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 称为这个向量的分量, a_i 称为这个向量的第 i 个分量。分量都是实数的向量称为**实向量**, 注意考研范畴只讨论实向量。分量均为 0 的向量称为**零向量**。

注: 若题目未指明是行向量还是列向量时, 默认其为列向量。

4.1.2 向量相等的定义

设 k 和 l 为两个任意的常数, α, β 和 γ 为三个任意的 n 维向量, 其中 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 。

如果 α 和 β 对应的分量都相等, 即 $a_i = b_i (i=1, 2, \dots, n)$, 就称这两个向量相等, 记为 $\alpha = \beta$ 。

4.1.3 向量的线性运算

向量作为一种特殊的矩阵, n 维向量加 (减) 法及数乘运算规律与矩阵相同。例如对于列向量

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \text{ 称向量 } \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{pmatrix} \text{ 为 } \alpha, \beta \text{ 的和 (差), 记为 } \alpha \pm \beta.$$

如果 k 是数, 则称向量 $\begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix}$ 为数 k 与向量 α 数乘, 记为 $k\alpha$ 。以上加法运算和数乘运算统称为 n 维向量的线性运算。

4.1.4 n 维向量的线性运算的性质 (以下 α, β, γ 是 n 维向量, k, l 是常数)

(1) $0\alpha = 0$

(2) $(k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha$

(3) $k(l\alpha) = (kl)\alpha$

(4) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$

(5) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

(6) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

4.1.5 向量内积与向量的模

(1) 向量内积定义

设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, 则 α 与 β 的内积为

$$(\alpha, \beta) = \alpha^T \beta = (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

(2) 向量内积的性质

① $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha).$

② $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta).$

③ $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$

④ $(\alpha, \alpha) = \alpha^T \alpha \geq 0$, 且 $(\alpha, \alpha) = \alpha^T \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.

其中, k 是数, α, β, γ 均为 n 维向量. 另外, Cauchy 不等式可用内积表示为

$$|(\alpha, \beta)| \leq \sqrt{(\alpha, \alpha)} \sqrt{(\beta, \beta)}.$$

(3) 向量的模、单位向量

向量的模 $\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$. 特殊地, 若 $\|\alpha\| = 1$, 此时称 α 为单位向量.

向量的模具有如下性质:

① 非负性: $\|\alpha\| \geq 0$. $\|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.

② 齐次性: $\|k\alpha\| = |k| \|\alpha\|$.

③ 三角不等式: $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$.

注: 如果 α 是非零向量, 则 $\frac{1}{\|\alpha\|} \alpha$ 一定是单位向量, 通过 α 求这个单位向量的过程叫将向量 α 单位化.

(4) 向量的夹角、正交向量

若 α, β 均不为 0, 则它们的夹角定义为 $\arccos \frac{(\alpha, \beta)}{\sqrt{(\alpha, \alpha)}\sqrt{(\beta, \beta)}}$.

若 $(\alpha, \beta) = 0$, 则称 α 与 β 正交, 记为 $\alpha \perp \beta$.

注: 零向量与任意向量都正交, 两个非零向量正交当且仅当这两个向量的夹角为 $\frac{\pi}{2}$.

【例 1】若向量 $\alpha_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, x\right)^T, \alpha_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, y, \frac{1}{2}\right)^T$ 均为单位向量, 且 α_1 与 α_2 正交, 求 x, y .

【例 2】设 n 维列向量 $\alpha = (1, 0, \dots, 0, 1)^T$, 矩阵 $A = E - \alpha\alpha^T$, 其中 E 为 n 阶单位矩阵, 则 $A^2 =$ _____.

【例 3】设 α, β 为 3 维列向量, β^T 是 β 的转置, 若 $\alpha\beta^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$, 则 $\alpha^T\beta =$ _____.

4.2 向量组的基本概念

4.2.1 向量组

若干个同维数的列向量（或同维数的行向量）所组成的集合叫做向量组。

4.2.2 向量组与矩阵的关系

每个矩阵都可看成是由一些行向量或列向量所构成的。

设矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times s}$ ， A 的每一列都可以视为一个 n 维列向量。如果用 α_j 表示其第 j 个列向量，则 A 就可以用这些列向量表示： $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 。

同理， A 的每一行都可以视为一个 s 维行向量。如果用 β_i 表示其第 i 个行向量，则 $A = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ 。

反之，如果给定了一个列向量组，以这些向量作为列，就可以作成矩阵；如果给定了一个行向量组，以这些向量作为行，也可以作成矩阵。

综上可知，含有限个列（行）向量的有序向量组总可以与矩阵一一对应。于是，我们就可以通过矩阵来研究这些向量组的性质。

n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 所对应的矩阵的秩就是这个向量组的秩，记为 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 。任意矩阵的行向量组的秩与其列向量组的秩相等，均等于矩阵的秩。即

$$r(A) = A \text{ 的行秩} = A \text{ 的列秩}.$$

后面我们会知道，向量组的秩在某种意义下刻画了向量组中向量间相互独立的程度。

4.3 线性相关、线性无关与线性表示

4.3.1 线性相关/无关定义

如果有不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s = 0,$$

称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关;

反之, 如果只有在

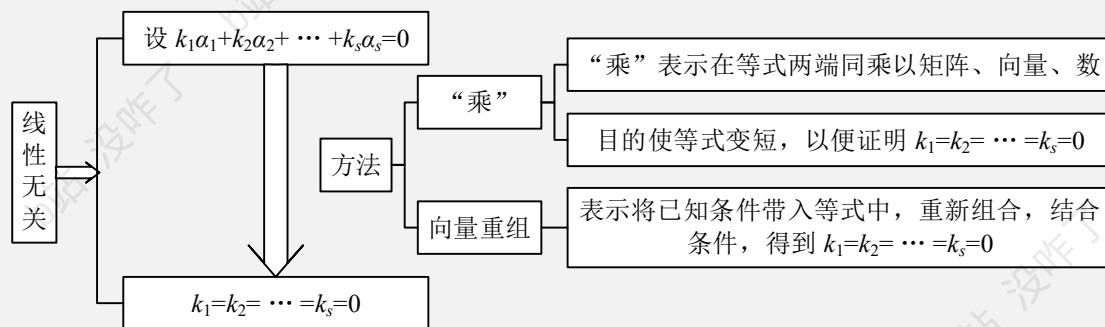
$$k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0$$

时上式才成立, 就称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

注: 向量组, 要么线性相关, 要么线性无关, 两者必取其一.

4.3.2 利用定义法判断线性相关/无关

设 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s = 0$, 若证明出 $k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0$, 则说明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.



4.3.3 从方程组和秩的角度理解线性相关/无关

n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 构成矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s]$, 向量组 A 线性相关, 就是齐次线性方程组

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_s \alpha_s = 0 \quad (Ax = 0)$$

有非零解, 其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_s)^T$.

又根据第三章所学知识, 齐次线性方程组是否有非零解取决于系数矩阵的秩 $r(A)$ 与未知量的个数 s 的大小关系, 故有如下定理:

n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关的充分必要条件是它所构成的矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s]$ 的秩小于向量个数 s , 即 $r(A) < s$; 而 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关的充分必要条件则是 $r(A) = s$.

推论 1: n 维向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow |A| = 0$; n 维向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

推论 2: 当 $s > n$ 时, s 个 n 维向量必线性相关.

4.3.4 线性组合和线性表示（出）定义

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 都是 n 维向量, $k_1, k_2, \dots, k_s$ 是数, 则称向量

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$$

是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合, $k_1, k_2, \dots, k_s$ 是这个线性组合的组合系数.

如果 n 维向量 β 可以写成 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合, 则称 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示（出）.

注: 零向量能被任意向量组线性表示, 任意向量能被包含自身的向量组线性表示.

4.3.5 从方程组和秩的角度理解线性表示（出）

β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ 非齐次线性方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{pmatrix} = \beta$ 有解

$$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta).$$

β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ 非齐次线性方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{pmatrix} = \beta$ 无解

$$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta)$$

$$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) + 1.$$

向量组 $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可由向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示

$$\Leftrightarrow \text{方程 } AX = B \text{ 有解}$$

$$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t).$$

如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示, 则

$$r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s).$$

【例 1】证明：单个非零向量线性无关，两个不成比例的向量线性无关.

【例 2】现有四个向量组

① $(1,2,1)^T, (2,1,2)^T, (0,0,0)^T$

② $(1,2,3)^T, (0,1,2)^T, (0,0,1)^T$

③ $(1,2,1)^T, (2,4,2)^T$

④ $(1,2,1)^T, (2,4,2)^T, (1,6,9)^T$,

其中线性相关的向量组有 ().

(A) 1 个

(B) 2 个

(C) 3 个

(D) 4 个

【例 3】已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，则下列向量组中，线性无关的是 ().

(A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

(B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$

(C) $\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 3\alpha_3 + \alpha_1$

(D) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + 22\alpha_3, 3\alpha_1 + 5\alpha_2 - 5\alpha_3$

【例 4】设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($s \geq 2$) 线性无关, 证明: 向量组 $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s$ 也线性无关.

【例 5】设 A 为 3 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维列向量, 若 $A\alpha_1 = \alpha_1 \neq 0$, $A\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2$, $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$, 证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

【例 6】设 A 是 n 阶矩阵, 若存在正整数 k , 使线性方程组 $A^k x = 0$ 有解向量 α , 且 $A^{k-1}\alpha \neq 0$. 证明: 向量组 $\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha$ 线性无关.

【例 7】设向量 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 5)^T$, $\alpha_2 = (2, -1, 1, 1)^T$, $\beta_1 = (4, 3, -1, 11)^T$, $\beta_2 = (4, 3, 0, 11)^T$, 试分别判断 β_1 与 β_2 能否由向量组 α_1, α_2 线性表示. 若能, 请写出表达式.

【例 8】已知向量组 (I): $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 (II): $\beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. 证明: (II) 可由 (I) 线性表示.

4.3.6 判断线性相关性的常用结论

(1) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 2)$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 其中至少有一个向量能由其他向量线性表出.

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 2)$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 其中任一个向量都不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示.

(2) 包含零向量的向量组线性相关, 单个非零向量线性无关;

两个成比例的向量线性相关, 两个不成比例的向量线性无关.

【例 9】向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 2)$ 线性相关的充要条件是 ().

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中有一个零向量
- (B) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意两个向量的分量成比例
- (C) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中有一个向量是其余向量的线性组合
- (D) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意一个向量是其余向量的线性组合

【例 10】向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 2)$ 线性无关的充要条件是 ().

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均不是零向量
- (B) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意 $s-1$ 个向量都线性无关
- (C) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ 中有一个向量是其余向量的线性组合
- (D) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中每一个向量都不能由其余的 $s-1$ 个向量线性表示

(3) n 维向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow |A| = 0$; n 维向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

向量个数大于向量维数时, 向量组必线性相关.

【例 11】设向量 $\alpha_1 = (6, a+1, 3)^T$, $\alpha_2 = (a, 2, -2)^T$, $\alpha_3 = (a, 1, 0)^T$. 求:

(1) a 为何值时, α_1, α_2 线性相关? a 为何值时, α_1, α_2 线性无关?

(2) a 为何值时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关? a 为何值时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关?

(4) “部分相关 $\Rightarrow$ 整体相关; 整体无关 $\Rightarrow$ 部分无关”

如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的某个部分向量组线性相关, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关;

如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则其任一部分向量组都线性无关.

(5) “原相关 $\Rightarrow$ 缩短相关, 原无关 $\Rightarrow$ 延长无关”

在 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的各向量添上 m 个分量变成 $n+m$ 维向量组 $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_s$.

如果 $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_s$ (延长组) 线性相关, 那么 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ (原向量组) 也线性相关;

如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ (原向量组) 线性无关, 那么 $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_s$ (延长组) 也线性无关.

【例 12】若 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$, 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$, 且 $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$, 则

下列结论中: ① $r(A) = 2$; ② α_2, α_4 线性无关; ③ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关; ④ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 正确的是 ().

(A) ①③

(B) ②③

(C) ①④

(D) ②④

【例 13】设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_s \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_s^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_s^{n-1} \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$, 其中 $a_i \neq a_j (i \neq j; i = 1, 2, \cdots, s; j = 1, 2, \cdots, s)$, 试讨论

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的线性相关性.

(6) 设 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 为 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 和 $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_s$ 为两向量组, 其中

$$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})^T, \alpha'_i = (a_{ip_1}, a_{ip_2}, \dots, a_{ip_n})^T,$$

即 $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_s$ 是对 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 各分量顺序进行重排后得到的向量组, 则这两个向量组有相同的线性相关性.

拓展: 初等行变换不改变列向量组的线性相关性; 初等列变换不改变行向量组的线性相关性.

(7) 设向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关, 而向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s, \alpha$ 线性相关, 则 α 能由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 且表示式是唯一的.

【例 14】设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 试回答:

(1) α_1 能否由 α_2, α_3 线性表出? (2) α_4 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出?

(8) “以少表多，多必相关”

设向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示且 $t > s$ ，那么 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性相关.

其等价命题：如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示，且 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性无关，那么 $t \leq s$.

【例 15】设向量 (I) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ ，(II) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ，则下列命题正确的是 ().

- ①若向量组 (I) 可由 (II) 线性表示，且 $s < t$ ，则必有 (I) 线性相关，
- ②若向量组 (II) 可由 (I) 线性表示，且 $s < t$ ，则必有 (I) 线性相关，
- ③若向量组 (I) 可由 (II) 线性表示，且 (I) 线性无关，则必有 $s \geq t$ ，
- ④若向量组 (II) 可由 (I) 线性表示，且 (I) 线性无关，则必有 $s \geq t$ ，

(A) ①④

(B) ①③

(C) ②③

(D) ②④

4.4 向量组的极大线性无关组、秩

在前几节中，我们通过研究矩阵中最高阶非零子式的阶数，建立了矩阵秩的核心定义。这一概念在前两节关于向量组的线性表示与线性相关性的研究中发挥了关键作用。基于向量组与矩阵间天然的对对应关系，我们注意到：若将向量组中“含有最多向量的极大线性无关组”对应于矩阵的“最高阶非零子式”，便能将矩阵秩的概念自然地迁移到向量组理论中。这种对应不仅揭示了代数结构的本质联系，更为后续研究线性方程组解的结构提供了重要的理论工具。

4.4.1 极大线性无关组定义

设有向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ，如果在其中能选出 r 个向量 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 满足：

(1) 向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性无关；(2) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中每个向量均能被 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性表示，则称向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组，简称为极大无关组。

极大线性无关组所含向量个数 r 称为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩。

注 1：只含有零向量的向量组没有极大线性无关组，规定它的秩为 0。

注 2：上述定义中条件 (2) 也可以替换成以下描述“向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意 $r+1$ 个向量（如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中有 $r+1$ 个向量的话）都线性相关”。

4.4.2 判断极大线性无关组

看是否满足以下三点：是否是部分组、是否线性无关、个数是否满足要求。

例如 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ ，由 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{(r)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，故知 $r(\alpha_1, \alpha_2) = 2$ ，而

$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$ ，因此 α_1, α_2 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大无关组。

注：极大线性无关组一般不唯一，比如上述例子，由 $r(\alpha_1, \alpha_3) = 2$ 及 $r(\alpha_2, \alpha_3) = 2$ 可知 α_1, α_3 和 α_2, α_3 也都是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的极大无关组。

【例 1】若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩为 r ，对于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ，下列说法正确的是（ ）.

- (A) 其中任意 $r-1$ 向量都线性无关 (B) 其中任意 $r-1$ 向量都线性相关
(C) 其中任意 r 个向量都是其最大无关组 (D) 其中任意 $r+1$ 向量都线性相关

【例 2】设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩为 $s-1$ ，则下列说法正确的是（ ）.

- (A) 其中有两个向量对应分量成比例 (B) 其中任一向量可由其余 $s-1$ 个向量线性表示
(C) 对任何 $1 < r < s$ ， $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \geq r-1$ (D) 对任何 $1 < r < s$ ， $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = r$

4.4.3 初等变换法求极大线性无关组、秩的步骤

原理：初等行变换不改变列向量组的线性相关性.

步骤：1) 对列向量组构成的矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 作初等行变换，化成行阶梯形 $B = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_s)$ ，行阶梯形 B 的秩就是原矩阵 A 的秩，即向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩；

2) 在行阶梯形 $B = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_s)$ 中的每个阶梯抽取一列，记录所在列的序号；

3) 在矩阵 A 采取同样的抽取方式，所得到的部分组即为矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 的极大无关组.

【例 3】设 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 为 4 阶方阵，其中 $\alpha_i (i=1,2,3,4)$ 为 4 维列向量， A 经过初等行变换化为

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则下列说法不正确的是 () .}$$

- (A) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关
- (B) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为 A 的列向量组的极大无关组
- (C) α_2 可由 α_1, α_3 线性表示，但 α_4 不可由 α_1, α_3 线性表示
- (D) α_4 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示

【例 4】设向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4)^T, \alpha_2 = (0, 3, 1, 2)^T, \alpha_3 = (3, 0, 7, 14)^T, \alpha_4 = (2, 1, 5, 6)^T, \alpha_5 = (1, -1, 2, 0)^T$.

求：(1) 求向量组的秩；(2) 求包含 α_1, α_5 的一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

4.5 向量组等价

4.5.1 向量组等价定义

如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中每个向量都可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 就称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 如果两个向量组互相可以线性表出, 就称它们等价. 向量等价具有反身性、对称性、传递性, 其中传递性需要引起重视.

4.5.2 向量组等价常用判据

- (1) 若向量组 (I) 与向量组 (II) 可相互线性表示, 即 (I) 与 (II) 等价, 则 $r(I) = r(II)$.
- (2) 若向量组 (I) 可由向量组 (II) 线性表示, 且 $r(I) = r(II)$, 则向量组 (I) 与向量组 (II) 等价.
- (3) 若 $r(I) = r(II) = r(I, II)$ (三秩相同), 则向量组 (I) 与向量组 (II) 等价.

4.5.3 向量组等价常用性质

- (1) 向量组与其任一极大无关组等价.
- (2) 向量组的任意两个极大无关组等价.
- (3) 等价向量组的极大无关组等价.
- (4) 等价向量组的秩相等.

注 1: 两个向量组等价, 向量的个数不一定相同.

注 2: 要将向量组等价与矩阵等价区分开来.

【例 1】设向量组 (I) $\alpha_1 = (1, 0, 2)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, 3)^T$, $\alpha_3 = (1, -1, a+2)^T$, 向量组 (II) $\beta_1 = (1, 2, a+3)^T$, $\beta_2 = (2, 1, a+6)^T$, $\beta_3 = (2, 1, a+4)^T$. 试问: 向量组 (I) 与 (II) 是否等价? 请说明理由.

【例 2】设向量组 α, β, γ 及数 k, l, m 满足: $k\alpha + l\beta + m\gamma = 0$, 且 $km \neq 0$, 则 ().

- (A) α, β 与 α, γ 等价 (B) α, β 与 β, γ 等价
(C) α, γ 与 β, γ 等价 (D) α 与 γ 等价

【例 3】设 n 维向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k (k < n)$ 线性无关, 则 n 维向量组 (II) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 也线性无关的充要条件是 ().

- (A) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 线性表示
(B) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 线性表示
(C) 向量组 (I) 与向量组 (II) 等价
(D) 矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ 与 $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ 等价

【例 4】设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 若 $AB = C$ 且 B 可逆, 则 ().

- (A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价
(B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价
(C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价
(D) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价

4.6 基础解系与解的结构

上一章我们已学习了用矩阵的初等行变换解线性方程组，下面我们用向量组线性相关性的理论来进一步研究线性方程组解的结构。

4.6.1 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 解的性质

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 都是 $Ax = 0$ 的解，则解的线性组合 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$ 也是 $Ax = 0$ 的解， $k_1, k_2, \dots, k_s$ 是任意常数。

4.6.2 基础解系

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$ 满足下列三条：

- (1) 是解： $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$ 均是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解向量；
- (2) 无关： $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$ 线性无关；
- (3) 个数满足要求： $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$ 向量个数为 $n - r(A)$ ，

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$ 为齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系。基础解系可看成解向量组的一个极大无关组。

定理：齐次线性方程组若有非零解，则它一定有基础解系，且基础解系所含解向量的个数等于 $n - r(A)$ 。

4.6.3 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的通解结构

如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$ 为齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系，则称 $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{n-r}\alpha_{n-r}$ 为 $Ax = 0$ 的通解， $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$ 是任意常数。

【例 1】求齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$
 的基础解系及其通解。

【例 2】已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是齐次方程组 $Ax = 0$ 的基础解系，则 $Ax = 0$ 的基础解系还可以是 ().

- (A) 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 等价的向量组 (B) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, 2\alpha_3 - \alpha_1$
(C) 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 等秩的向量组 (D) $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

【例 3】设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 为 3 阶矩阵，若 α_1, α_2 线性无关，且 $\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$ ，则线性方程组 $Ax = 0$ 的通解为_____.

【例 4】设 A, B 均为 3 阶矩阵， $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & a & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ， $r(B) = 2$ ， $r(AB) = 1$. 求 a 的值，并求齐次线性方程组

$Ax = 0$ 的通解.

4.6.4 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 解的性质

- (1) 设 η_1, η_2 都是 $Ax = b$ 的解, 则 $\eta_1 - \eta_2$ 是它的导出组 $Ax = 0$ 的解.
- (2) 设 η 是 $Ax = b$ 的一个解, α 是它的导出组 $Ax = 0$ 的解, 则 $\alpha + \eta$ 是 $Ax = b$ 的解.
- (3) 设 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 都是 $Ax = b$ 的解, 则

当 $k_1 + k_2 + \dots + k_s = 1$ 时, $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_s\eta_s$ 是 $Ax = b$ 的解;

当 $k_1 + k_2 + \dots + k_s = 0$ 时, $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_s\eta_s$ 是 $Ax = 0$ 的解.

4.6.5 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 解的结构

如果线性方程组 $Ax = b$ 有解 η 满足 $A\eta = b$, 其导出组 $Ax = 0$ 的通解为 $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{n-r}\alpha_{n-r}$, 则

$Ax = b$ 的任意解都可写成 $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{n-r}\alpha_{n-r} + \eta$, $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$ 是任意常数.

由此可知, 对于非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解时, 我们只须求得它的一个特解, 然后再求它的导出组的通解, 由此便可得 $Ax = b$ 的全部解.

【例 5】求非齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$
 的通解.

【例 6】设线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + (2 + \lambda)x_2 + (4 + \mu)x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$$
, 且 $(1, -1, 1, -1)^T$ 是该方程的一个特解, 试求该方程

组的通解.

【例 7】设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, 试问当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C 使得 $AC - CA = B$? 并求出所有的矩阵 C .

【例 8】已知 β_1, β_2 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个不同的解, α_1, α_2 是对应齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, k_1, k_2 为任意常数, 则 $Ax = b$ 的通解为 ().

- (A) $k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2\alpha_2 + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$ (B) $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$
 (C) $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 + \beta_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$ (D) $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 - \beta_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$

【例 9】设 A 为 4×3 矩阵, η_1, η_2, η_3 是非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的 3 个线性无关的解, k_1, k_2 为任意常数, 则 $Ax = \beta$ 的通解为 ().

- (A) $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_1 - \eta_2)$ (B) $\frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1)$
 (C) $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_3 - \eta_1) + k_2(\eta_2 - \eta_1)$ (D) $\frac{\eta_1 - 2\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_1 + \eta_2 - 2\eta_3) + k_2(\eta_1 - \eta_2)$

【例 10】设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 4 阶矩阵, 非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解为 $k(1, 0, -3, 2)^T + (1, -1, 0, 1)^T$, k 为任意常数, 记 $B = (\alpha_2 + \beta, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)$. 求方程组 $Bx = \beta$ 的通解.

4.7 向量空间（仅数一）

4.7.1 向量空间的定义

设 $\mathbf{R}$ 为实数的集合，用 $\mathbf{R}^n$ 表示 n 维实列向量全体所构成的集合。

设 V 是 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集. 若对任意 $\alpha, \beta \in V$ 及实数 k ，有 $\alpha + \beta \in V$ ， $k\alpha \in V$ ，则称 V 是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间，或简称为向量空间. 简单地讲，所谓向量空间，就是 $\mathbf{R}^n$ 的在向量的线性运算下封闭的非空子集。

4.7.2 向量空间的基和维数

在向量空间 V 中，如果存在 s 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ，满足以下两点：① $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关；② V 中任一向量 α 总可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示. 那么， $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 就称为向量空间 V 的一个基， s 称为向量空间 V 的维数，记为 $s = \dim V$ 。

注 1：向量空间的基相当于一个向量组的极大无关组；向量空间的维数相当于向量组的秩。

注 2：向量空间 V 的任意两组基是等价的。

注 3：（ $\mathbf{R}^n$ 的标准正交基）设 n 维向量 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 是向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个基，若 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 两两正交，且都是单位向量，则称 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个标准正交基。

例如： $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ， $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ， $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的标准正交基。

4.7.3 向量在基下的坐标

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是 s 维向量空间 V 的一组基，则对于任意 $\eta \in V$ ，有且仅有一组有序数： $x_1, x_2, \dots, x_s$ ，使得 $\eta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s$ ，并称列向量 $(x_1, x_2, \dots, x_s)^T$ 是向量 η 在 V 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 下的坐标列向量，简称为坐标。

注：一个向量在同一个基下的坐标是唯一的，但在不同基下的坐标一般是不同的。

4.7.4 基变换与过渡矩阵

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 及 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 都是 s 维线性空间 V 的基，若有

$$\begin{cases} \beta_1 = c_{11}\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + \dots + c_{s1}\alpha_s \\ \beta_2 = c_{12}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + \dots + c_{s2}\alpha_s \\ \dots\dots\dots \\ \beta_s = c_{1s}\alpha_1 + c_{2s}\alpha_2 + \dots + c_{ss}\alpha_s \end{cases} \Rightarrow (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \dots & c_{ss} \end{pmatrix}$$

记 n 阶矩阵 $C = (c_{ij})_{s \times s}$, 则上式可以表示为

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)C$$

将此式称为基变换公式, 矩阵 C 称为由基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 的过渡矩阵.

4.7.5 坐标变换

设向量空间 V 的从基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 的过渡矩阵为 P , 向量 $\eta \in V$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 及 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 下的坐标分别是 x 和 y , 则必定有 $x = Py$ 或 $y = P^{-1}x$. 此公式称为坐标变换公式.

证明: 设向量 $\eta \in V$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 及 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 下的坐标是 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_s \end{pmatrix}$. 按坐标的

定义, 有

$$\eta = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)x = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)y.$$

由于 $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)P$, 故有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)Py.$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 所以, 必有矩阵等式 $x = Py$ 或 $y = P^{-1}x$.

4.7.6 施密特正交化

给定一组线性无关但不正交的向量 x_1, x_2, x_3 , 把这组向量标准正交化的过程如下.

1) 正交化

$$\beta_1 = x_1,$$

$$\beta_2 = x_2 - \frac{(x_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1,$$

$$\beta_3 = x_3 - \frac{(x_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \frac{(x_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1,$$

2) 单位化

$$\gamma_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2, \quad \dots, \quad \gamma_3 = \frac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3.$$

【例 1】设 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, 0, 2)^T$, $\alpha_3 = (2, 1, 1, a)^T$. 若由 α_1 , α_2 , α_3 生成的向量空间的维数为二, 则 $a =$ _____.

【例 2】已知 3 维线性空间的一组基底为 $\alpha_1 = (1, 1, 0)$, $\alpha_2 = (1, 0, 1)$, $\alpha_3 = (0, 1, 1)$, 则向量 $u = (2, 0, 0)$ 在上述基底下的坐标是_____.

【例 3】从 $\mathbf{R}^2$ 的基 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 到基 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为_____.

【例 4】设 B 是秩为 2 的 5×4 矩阵, $\alpha_1 = (1, 1, 2, 3)^T$, $\alpha_2 = (-1, 1, 4, -1)^T$, $\alpha_3 = (5, -1, -8, 9)^T$ 是齐次线性方程组

$Bx = 0$ 的解向量, 求 $Bx = 0$ 的解空间的一个标准正交基.

第五章 矩阵相似理论

5.1 特征值与特征向量

5.1.1 特征值与特征向量的定义

设 A 为 n 阶矩阵, 如果存在数 λ 和非零的 n 维向量 x , 使得

$$Ax = \lambda x$$

成立, 就称 λ 是矩阵 A 的**特征值**, x 是 A 的对应于特征值 λ 的**特征向量**.

注 1: 特征值问题仅针对方阵, 非方阵无此概念.

注 2: 特征向量必须是非零向量 ($x \neq 0$), 但特征值可以是实数 0.

5.1.2 特征多项式与特征方程

上述定义式 $Ax = \lambda x$ 是特征值和特征多项式满足的基本条件, 移项可得

$$(\lambda E - A)x = 0$$

上式实际上是一个含 n 个方程 n 个未知数的齐次线性方程组, 其系数矩阵为 $\lambda E - A$. 特征向量 x 可看成上述齐次线性方程组的一个非零解.

因此, 如果一个矩阵有特征向量, 则特征向量一定满足 $(\lambda E - A)x = 0$; 反之, 齐次方程组 $(\lambda E - A)x = 0$ 的任意一个非零解也必定是 A 的特征向量. 这样一来, 求特征向量的问题就归结为求齐次线性方程组的非零解问题.

但问题在于, 现在 λ 未知, 如何求解 λ ? 根据齐次线性方程组和行列式的关系知, λ 必然满足 $|\lambda E - A| = 0$, 这即求解 λ 的方法.

称方程 $|\lambda E - A| = 0$ 为特征方程, 前面的 $|\lambda E - A|$ 为特征多项式.

【例 1】求矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值及对应的特征向量.

5.1.3 特征值的性质

首先从最简单的二阶入手, 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{aligned}
 |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} \\ 0 & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} \\
 &= \lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \lambda \left(\begin{vmatrix} 1 & -a_{12} \\ 0 & -a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & 0 \\ -a_{21} & 1 \end{vmatrix} \right) + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix} \\
 &= \lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \lambda \left(\begin{vmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 1 \end{vmatrix} \right) + (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
 &= \lambda^2 - \lambda(a_{22} + a_{11}) + (-1)^2 |A| \\
 &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + |A|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{设} \quad |\lambda E - A| &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \\
 &= \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2
 \end{aligned}$$

上述实际与理论形式对比得, $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} = \text{tr}(A) \\ \lambda_1\lambda_2 = |A| \end{cases}$ ($\text{tr}(A)$ 表示方阵 A 的主对角线元素之和)

再以三阶矩阵为例, 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{aligned}
 |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ 0 & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -a_{13} \\ 0 & \lambda & -a_{23} \\ 0 & 0 & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & -a_{22} & -a_{23} \\ 0 & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & 0 & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda & -a_{23} \\ -a_{31} & 0 & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -a_{13} \\ 0 & \lambda & -a_{23} \\ 0 & 0 & -a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} & 0 \\ 0 & -a_{22} & 0 \\ 0 & -a_{32} & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & -a_{22} & -a_{23} \\ 0 & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & 0 & 0 \\ -a_{21} & \lambda & 0 \\ -a_{31} & 0 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & 0 & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda & -a_{23} \\ -a_{31} & 0 & -a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & 0 \\ -a_{21} & -a_{22} & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda \end{vmatrix} \\
 &= \lambda^3 - a_{33}\lambda^2 - a_{22}\lambda^2 - a_{11}\lambda^2 + \dots + (-1)^3 |A| \\
 &= \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + \dots + (-1)^3 |A|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{设} \quad |\lambda E - A| &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \\
 &= \lambda^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2 + \dots + (-1)^3 \lambda_1\lambda_2\lambda_3
 \end{aligned}$$

上述实际与理论形式对比得,
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \text{tr}(\mathbf{A}) \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = |\mathbf{A}| \end{cases}$$

类似地, 对于 n 阶矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, 计算

$$\begin{aligned} |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & -a_{2n} \\ 0 & \cdots & \lambda & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \cdots \end{aligned}$$

可得, $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = f(\lambda) = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |\mathbf{A}|$

同样地, 我们假设上述 n 次方程的根为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则有

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) = \lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

对比上述两式可得特征根和矩阵 $\mathbf{A}$ 的两个重要关系, 即**特征值之和为矩阵 $\mathbf{A}$ 的迹, 特征值之积为矩阵的行列式**. 即

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr}(\mathbf{A}) \\ \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |\mathbf{A}| \end{cases} \quad (\text{此条结论对方阵 } \mathbf{A} \text{ 均成立, 与矩阵 } \mathbf{A} \text{ 是否可相似对角化无关})$$

5.1.4 求解特征值和特征向量的一般性方法

按下面两步走:

(1) 求解特征方程 $f(\lambda) = |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$, 得到 n 个根, 这 n 个根就是矩阵 $\mathbf{A}$ 的 n 个特征值. 根的重数 k 称为**代数重数** (所有代数重数加起来必等于方程阶数 n).

(2) 将各个特征值依次代入特征矩阵, 求出齐次线性方程组 $(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系, 就得到矩阵 $\mathbf{A}$ 各个特征值对应的全部特征向量. 对于某个特征值 λ , 齐次方程组 $(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 所对应的基础解系有 p 个线性无关的向量, 称 p 为**几何重数** ($p \geq 1$).

注1: 由代数理论可知, n 次方程 $f(\lambda) = |\lambda E - A| = 0$ 必有 n 个(复的)特征值, 也即任一 n 阶矩阵 A 必有 n 个(复的)特征值. 如矩阵 A 为 3 阶矩阵, 其特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$, 则特征值 1 的代数重数为 2 重, 特征值 3 的代数重数为 1 重, 所有特征值的代数重数相加总和为 3 (矩阵 A 的阶数).

注2: 几何重数 $p \leq$ 代数重数 k . 也即 k 重特征值 λ 至多只有 k 个线性无关的特征向量.

注3: $|A| = 0 \Leftrightarrow A$ 的列向量线性相关 $\Leftrightarrow Ax = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow A$ 有 0 特征值

注4: 对于抽象问题, 求特征值与特征向量可能需要从定义 $Ax = \lambda x$ 入手.

【例2】求下列矩阵的特征值.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

5.1.5 特征向量的相关性质

(1) 设 x 是 A 的关于特征值 λ 的特征向量, 则对任意的非零常数 k , kx 也是 A 的关于特征值 λ 的特征向量. 不仅如此, 若 x_1 与 x_2 同是 A 的关于特征值 λ 的特征向量, 则 x_1 与 x_2 的非零线性组合也是 A 的关于特征值 λ 的特征向量. 该条性质说明了不管任何情况, 只要某一个特征值 λ 有一个特征向量 x , 那么对应于特征值 λ 的特征向量就有无穷多个.

(2) 不同特征值对应的特征向量必线性无关. 设 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_m$ 是矩阵 A 的 m 个互不相同的特征值, 且 $x_1, x_2 \cdots x_m$ 是分别属于特征值 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_m$ 的 m 个特征向量, 则 $x_1, x_2 \cdots x_m$ 是一组线性无关的向量.

以下证明一种常用情况: n 阶矩阵 A 的任意两个互异特征值 λ_1, λ_2 对应的两个特征向量线性无关.

证明: 设 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2 (\lambda_1 \neq \lambda_2)$ 对应的特征向量分别是 x_1, x_2 , 即

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1, Ax_2 = \lambda_2 x_2.$$

令

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 = 0 \quad ①$$

上式两端左边乘 A , 得

$$A(k_1 x_1 + k_2 x_2) = k_1 Ax_1 + k_2 Ax_2 = k_1 \lambda_1 x_1 + k_2 \lambda_2 x_2 = 0 \quad ②$$

②- $\lambda_1 \times$ ①得

$$k_2(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$$

因 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$, 故 $k_2 = 0$.

将 $k_2 = 0$ 代入式①, 由于 $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$, 得 $k_1 = 0$. 故得证.

思考: 若两个互异特征值对应的特征向量进行线性组合 (组合系数均不为 0), 还是 A 的特征向量吗?

证明: 由题意可知, $A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1$, $A\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2$ ($\lambda_1 \neq \lambda_2$).

若 $k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2$ ($k_1k_2 \neq 0$) 为 A 的特征向量, 则存在数 λ , 使得 $A(k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2) = \lambda(k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2)$ 成立. 于是,

$$A(k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2) = k_1A\mathbf{x}_1 + k_2A\mathbf{x}_2 = k_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + k_2\lambda_2\mathbf{x}_2 = \lambda(k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2).$$

由上式可得

$$k_1(\lambda_1 - \lambda)\mathbf{x}_1 + k_2(\lambda_2 - \lambda)\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}.$$

由于属于不同特征值的特征向量线性无关, 故 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 线性无关, 从而

$$k_1(\lambda_1 - \lambda) = k_2(\lambda_2 - \lambda) = 0,$$

而 $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$, 进一步得 $\lambda_1 - \lambda = \lambda_2 - \lambda = 0$, 即 $\lambda_1 = \lambda_2$.

这与 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 矛盾. 因此, $k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2$ ($k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$) 不是 A 的特征向量.

总结: 矩阵 A 的两个互异特征值 λ_1, λ_2 对应的特征向量 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, 组合得到的向量 $k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2$ ($k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$) 一定不是 A 的特征向量.

(3) 关于 A 以及与 A 有关的常用矩阵的特征值和特征向量, 有如下关系 (重要)

矩 阵	A	$kA + bE$	A^k	$f(A)$	A^{-1}	A^*	$P^{-1}AP$
特征值	λ	$k\lambda + b$	λ^k	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{ A }{\lambda}$	λ
特征向量	$\mathbf{x}$	$\mathbf{x}$	$\mathbf{x}$	$\mathbf{x}$	$\mathbf{x}$	$\mathbf{x}$	$P^{-1}\mathbf{x}$

注 1: 表格中 A^{-1} , A^* 所在列, 需注意 $\lambda \neq 0$.

注 2: 若矩阵 A 满足 $f(A) = \mathbf{O}$, 则矩阵 A 对应的特征值必满足 $f(\lambda) = 0$. 但 $f(\lambda) = 0$ 的解不一定是矩阵 A 对应的特征值.

注 3: A^T 的特征值与 A 相同, 但是特征向量不再相同, 需要另行计算.

【例 3】设 0 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ 的特征值，求 a 以及 A 的其余特征值.

【例 4】若三阶方阵 A 可逆，且 A^{-1} 的三个特征值为 $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ ，试求 A ， $(2A)^*$ ， $A^2 + 4A + E$ 的特征值.

【例 5】设 A 是三阶方阵，且 $|A - E| = |A + 2E| = |2A + 3E| = 0$ ，则 $|2A^* - 3E| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【例 6】若 n 阶可逆矩阵 A 的每行元素之和均为 $a (a \neq 0)$ ， $|A| = 1$ ，则矩阵 A^* 的每行元素之和为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【例 7】设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$, 且 $|A| = -1$, A 的伴随矩阵 A^* 有特征值 λ_0 , 属于 λ_0 的特征向量为

$\alpha = (-1, -1, 1)^T$, 求 a, b, c 及 λ_0 的值.

【例 8】设 A 是 n 阶实对称矩阵, P 是 n 阶可逆矩阵. 已知 n 维列向量 α 是矩阵 A 对应特征值 λ 的特征向量, 则矩阵 $(P^{-1}AP)^T$ 对应特征值 λ 的特征向量是 ().

(A) $P^{-1}\alpha$

(B) $P^T\alpha$

(C) $P\alpha$

(D) $(P^{-1})^T\alpha$

【例 9】若 α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量, α_2, α_3 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda=2$ 的线性无关的两个特征

向量. 设 $AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P$, 则矩阵 P 不可以是 ().

(A) $(\alpha_1, -2\alpha_2, \alpha_3)$

(B) $(\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 - \alpha_3)$

(C) $(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2)$

(D) $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_3)$

5.2 秩为 1 矩阵专题

若矩阵 A 的秩 $r(A)=1$ ，则 A 可分解为一个列向量与一个行向量的乘积

$$A = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (b_1, b_2, b_3) = \alpha \beta^T,$$

例如，

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ 则 } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (2, 0, 1) = \alpha \beta^T.$$

相关结论：

(1) $tr(A) = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha = l$ 都是同一个数.

(2) 此时， A 满足 $A^2 = lA$ ，从而可得 $A^n = l^{n-1}A$.

证明： $A^2 = (\alpha \beta^T)(\alpha \beta^T) = \alpha(\beta^T \alpha)\beta = l\alpha \beta^T = lA$ ，其中 $l = \beta^T \alpha = \alpha^T \beta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum a_{ii}$.

(3) A 的特征值为： $tr(A), \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{(n-1)\uparrow}$ $\begin{cases} \text{若 } tr(A) \neq 0, \text{ 则 } A \sim \Lambda \\ \text{若 } tr(A) = 0, \text{ 则 } A \not\sim \Lambda \end{cases}$

注：特征值 $tr(A)$ 对应的特征向量为 α ，特征值 0 对应的特征向量为 $Ax = 0$ 的非零解.

【例 1】设 $\alpha = (1, 2, 3)^T$ ， $\beta = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)^T$ ， $A = \alpha \beta^T$ ，则 $A^n =$ _____.

【例 2】设 α, β 是 n 维列向量，且 $\alpha^T \beta = 2$ ，证明： $A = E + \alpha \beta^T$ 可逆，并求 A^{-1} .

【例 3】设 α, β 为 3 维列向量. 若矩阵 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\beta^T\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.

【例 4】设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 10 \end{pmatrix}$ 求 A, B 的特征值与特征向量.

5.3 矩阵相似

5.3.1 矩阵相似的定义

设 A 与 B 都是 n 阶矩阵, 若存在一个可逆 n 阶矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$, 则称 A 相似于 B , 或称 A 经过了一个相似变换得到了 B , 记为 $A \sim B$.

5.3.2 矩阵相似的常用必要条件

$$A \sim B \Rightarrow \begin{cases} |\lambda E - A| = |\lambda E - B| & \begin{cases} |A| = |B| \\ \text{tr}(A) = \text{tr}(B) \end{cases} \\ r(A) = r(B) \\ r(\lambda E - A) = r(\lambda E - B) \end{cases}$$

5.3.3 矩阵相似的常用性质

(1) 传递性: 若 $A \sim C$, $B \sim C$, 则 $A \sim B$

(2) 若 $A \sim B$, 则 $kA \sim kB$, $A^m \sim B^m$, $f(A) \sim f(B)$, 其中 $f(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A^1 + a_0 E$,

$$f(B) = a_n B^n + \cdots + a_1 B^1 + a_0 E.$$

(3) 若 $A \sim B$, 还可推得 $A^T \sim B^T$, $A^* \sim B^*$.

(4) 若 $A \sim B$, 且 A 可逆, 则 $A^{-1} \sim B^{-1}$, $f(A^{-1}) \sim f(B^{-1})$, $AB \sim BA$.

(5) 若 $A \sim C$, $B \sim D$, 则 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} C & O \\ O & D \end{pmatrix}$.

5.3.4 判断/证明两个矩阵相似

考研范畴内, 判断/证明两个矩阵相似主要靠定义 (通过题目的提示验证 $P^{-1}AP = B$) 或相似的传递性 ($A \sim C$, $B \sim C$, 则 $A \sim B$) 来处理. 其中, “中介矩阵” C 常常用对角矩阵 A .

【例 1】已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似, 求 x, y .

【例 2】设矩阵 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 已知 $A \sim B$, 则 $r(A - 2E) + r(A - E)$ 等于 ().

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

【例 3】已知 $\alpha = (1, 2, -1)^T$, $A = \alpha\alpha^T$, 若矩阵 A 与 B 相似, 则 $|(B + E)^*| =$ _____.

【例 4】若 A 与 B 相似, 则 ().

(A) $\lambda E - A = \lambda E - B$ (B) A, B 同时可逆或者不可逆(C) 对于相同的特征值 λ , A, B 有相同的特征向量(D) A, B 均与同一个对角阵相似

【例 5】若 A, B 均可逆，且 A 与 B 相似，则下列说法错误的是（ ）.

(A) $A^T \sim B^T$

(B) $A + A^T \sim B + B^T$

(C) $A^{-1} \sim B^{-1}$

(D) $A + A^{-1} \sim B + B^{-1}$

【例 6】下列矩阵中，与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似的是（ ）.

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

【例 7】下列选项中，能作为 A 与 B 相似的充分条件的是（ ）.

(A) $A^* \sim B^*$

(B) $A^T \sim B^T$

(C) $f(A) \sim f(B)$

(D) $AB \sim BA$

5.4 矩阵相似对角化

5.4.1 矩阵相似对角化的定义

设 $A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i$ ($i=1, 2, \dots, n$), 则

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\lambda_1 \alpha_1, \lambda_2 \alpha_2, \dots, \lambda_n \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

当 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关时, 记 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则 P 可逆, 记 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$,

故 $AP = P\Lambda$, 即 $P^{-1}AP = \Lambda$, 称 A 相似于 Λ , 记作 $A \sim \Lambda$.

5.4.2 矩阵相似对角化的充要、充分及必要条件

(1) (充要条件) 设 A 是 n 阶矩阵, 则 $A \sim \Lambda \Leftrightarrow A$ 恰有 n 个线性无关的特征向量. 结合上一小节, 该条性质也可等价表示为矩阵 A 每个特征值的几何重数等于代数重数.

(2) (充分条件) 若 n 阶矩阵 A 有 n 个不同的特征值, 则矩阵 A 必相似于对角矩阵.

若 n 阶矩阵 A 为实对称矩阵, 则矩阵 A 必相似于对角矩阵.

若 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = A$, 则矩阵 A 必相似于对角矩阵.

若 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = E$, 则矩阵 A 必相似于对角矩阵.

(3) (必要条件) 若 n 阶矩阵 $A \sim \Lambda$, 则
$$\begin{cases} |A| = |\Lambda| \\ \text{tr}(A) = \text{tr}(\Lambda) \\ r(A) = r(\Lambda) \end{cases}$$

【例 1】设 3 阶矩阵 A 的特征值为 0, 1, 2, $B = A^3 - 2A^2$, 则 $r(B) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【例 2】设向量 $\alpha = (1, 1, 1)^T$, $\beta = (1, 0, k)^T$, 若矩阵 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

【例 3】下列矩阵中, 不能相似于对角矩阵的是 ().

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5.4.3 矩阵相似对角化的一般求解步骤

(1) 求出 A 的所有的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 其中互不相等的特征值为 $\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}, \dots, \lambda_{p_r} (r \leq n)$ 。

(2) 若 A 可对角化, 则 k 重特征值 λ 必对应 k 个线性无关的特征向量, 求出每一个齐次方程组 $(\lambda_{p_i} E - A)x = 0 (i=1, 2, \dots, r)$ 的基础解系, 合并后必可得到 A 的 n 个线性无关的特征向量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 。

(3) 令 $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$, 则 P 可逆, 且有 $P^{-1}AP = \Lambda$. 一定要注意这里 P 的

每一列 $x_j (j=1, 2, \dots, n)$ 的排序应与 Λ 中对应的 $\lambda_j (j=1, 2, \dots, n)$ 的排序相同!

【例 4】设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ ，求可逆矩阵 P ，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

【例 5】设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ ，已知 A 有 3 个线性无关的特征向量， $\lambda = 2$ 是 A 的二重特征值. 试求可逆

矩阵 P ，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

【例 6】设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根，求 a 的值，并讨论 A 是否可相似对角化.

【例 7】设 A 是 3 阶矩阵，方程组 $Ax = b$ 的通解为 $k_1(-1, 1, 0)^T + k_2(2, 0, 1)^T + (1, 1, -2)^T$ ，其中 k_1, k_2 为任意

常数， $b = (6, 6, -12)^T$. 求 A .

【例 8】设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, 求 A^{100} .

【例 9】已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似. 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$.

5.5 实对称矩阵相似对角化

5.5.1 正交矩阵的定义及性质

(1) 定义

若 n 阶矩阵 A 满足 $A^T A = A A^T = E$, 则称矩阵 A 为正交矩阵.

(2) 性质

$$Q^T Q = E \Rightarrow \begin{cases} |Q| = \pm 1 \\ Q^{-1} = Q^T \\ Q \text{ 由规范正交基组成} \end{cases} \begin{cases} Q^T, Q^*, Q^{-1} \text{ 也是正交阵} \\ \text{若干个同阶正交阵相乘仍是正交阵} \\ \text{特征值 } \lambda = 1 \text{ 或 } -1 \end{cases}$$

【例 1】 α, β 是 2 维单位列向量, 若满足 $\|\alpha + \beta\| = \|\alpha - \beta\|$, 则 $A = (\alpha, \beta)$ 必是 ().

- (A) 实对称矩阵 (B) 单位矩阵 (C) 正交矩阵 (D) 正定矩阵

5.5.2 实对称矩阵的性质

(1) n 阶实对称矩阵 A 有 n 个实的特征值, 也必有 n 个线性无关的特征向量, 且矩阵 A 的几何重数等于代数重数.

(2) 实对称矩阵对应于不同的特征值的特征向量必是正交的, 即 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 时, 有 $(x_1, x_2) = x_1^T x_2 = 0$.

(3) n 阶实对称矩阵 A 不但可以相似对角化, 还能正交相似对角化, 也即存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^{-1} A Q = \Lambda$. 由于 $Q^{-1} = Q^T$, 又有 $Q^{-1} A Q = Q^T A Q = \Lambda$, 因此正交矩阵 Q 在相似及二次型 (下一章) 中均有重要应用.

【例 2】设 A 是 4 阶实对称矩阵, 且 $A^2 = -A$, 若 $r(A) = 3$, 则 A 相似于 ().

(A) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

【例 3】已知实对称矩阵 A 满足 $A^3 + A^2 + A - 3E = O$, 证明 $A = E$.

【例 4】设 A 是 3 阶实对称矩阵, 已知 A 三个特征值为 $-1, 1, 2$, 且 $\lambda_1 = -1$ 对应的特征向量为 $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T$, $\lambda_2 = 1$ 对应的特征向量为 $\alpha_2 = (-1, 0, 1)^T$, 求 $\lambda_3 = 2$ 对应的特征向量 α_3 .

【例 5】设 A 是 3 阶实对称矩阵, 已知 A 的每行元素之和为 3, 且有二重特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. 求 A 的全部特征值、特征向量.

5.5.3 实对称矩阵正交对角化的一般步骤

(1) 求出实对称矩阵 A 的所有的特征值 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$ ，其中互不相等的特征值为 $\lambda_{p1}, \lambda_{p2} \cdots \lambda_{pr} (r \leq n)$ 。

(2) 求出每一个齐次方程组 $(\lambda_{pi}E - A)x = 0 (i=1, 2, \cdots, r)$ 的基础解系，合并后必可得到 A 的 n 个线性无关的特征向量 $x_1, x_2 \cdots x_n$ ，再将 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 先正交化再单位化，得到 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ 。

(3) 令 $Q = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$ ， $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ，则 Q 可逆，且有 $Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \Lambda$ 。

注：这里 Q 的每一列 $\gamma_j (j=1, 2, \cdots, n)$ 的排序应与 Λ 中对应的 $\lambda_j (j=1, 2, \cdots, n)$ 的排序相同。

对比前面提及的一般矩阵的相似对角化步骤，不难发现多了一步：特征向量的正交化、单位化。对于正交化，这里注意，因为不同特征值的特征向量必然正交，所以只需要将相同特征值对应的特征向量正交化即可，常采用的方法为施密特正交化法。

给定一组线性无关但不正交的向量 x_1, x_2, x_3 ，把这组向量标准正交化的过程如下。

1) 正交化

$$\beta_1 = x_1,$$

$$\beta_2 = x_2 - \frac{(x_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1,$$

$$\beta_3 = x_3 - \frac{(x_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 - \frac{(x_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1,$$

2) 单位化

$$\gamma_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|} \beta_1, \gamma_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|} \beta_2, \cdots, \gamma_3 = \frac{1}{\|\beta_3\|} \beta_3.$$

【例 6】设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, 求正交矩阵 Q , 使得 $Q^{-1}AQ = Q^T A Q = \Lambda$.

【例 7】设三阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\alpha_1 = (1, -2, 1)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, -1)^T$ 是线性方程组 $Ax = 0$

的两个解, E 为三阶单位矩阵, 求 A 及 $\left(A - \frac{3}{2}E\right)^6$.

第六章 二次型

6.1 二次型的定义及其表示

含有 n 个变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的二次实齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned} \quad (1)$$

称为 n 元二次型, 简称二次型.

注 1: 考研中只讨论实数域上的 n 元二次型.

注 2: 二次型中所有项必须满足“二次齐次”. 例如 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_3^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_4 + 9x_3x_4$ 是一个 4 个变量的实二次型, 而多项式 $f(x, y) = x^2 + xy - 2y^2 + 3x + 1$ 则不是一个实二次型.

当 $j > i$ 时, 取 $a_{ji} = a_{ij}$, 则 $2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i$, 于是①式可写成

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots \\ & + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned} \quad (2)$$

可简记为 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j$, 其中 $a_{ji} = a_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$.

进一步, 利用矩阵, ②式可表示为

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) + \dots + x_n(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{记作}}{=} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \end{aligned}$$

其中, 矩阵 $\mathbf{A}$ 为实对称矩阵 ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$). 此时矩阵 $\mathbf{A}$ 唯一, 称 $\mathbf{A}$ 为该二次型的矩阵. 实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩称为实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 的秩.

注 1: 二次型是一个数, 即 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 是一个数.

注 2: 二次型的矩阵写法不止一种, 但二次型矩阵是唯一的, 可通过上述“对称分法”得到.

【例 1】设 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$, 请写出此二次型的矩阵及二次型的秩.

【例 2】二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 ijx_ix_j$. 求二次型矩阵 $\mathbf{A}$.

【例 3】二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$ 的秩为_____.

【例 4】二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_1 + 2x_2 + x_3)^2$. 求二次型矩阵 $\mathbf{A}$.

6.2 可逆线性变换与矩阵合同

6.2.1 可逆线性变换（坐标变换）

设 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, $\mathbf{C} = (c_{ij})_{n \times n}$ 可逆, 则称坐标变换 ($\mathbf{C}$ 可逆)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y})$$

为由 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 到 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 的可逆 (满秩) 线性变换. 如果 $\mathbf{C}$ 是正交矩阵, 那么此时也称为正交变换.

对于二次型 $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, 如果做一个可逆线性变换 $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$, 则

$$f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{C}\mathbf{y})^T \mathbf{A} (\mathbf{C}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}) \mathbf{y}$$

记 $\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{B}$, 则

$$f = \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y} = g(y_1, \dots, y_n),$$

这是一个变量为 $y_1, \dots, y_n$ 的二次型. 由于

$$\mathbf{B}^T = (\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C})^T = \mathbf{C}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{C}^T)^T = \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{B},$$

因此 $\mathbf{B}$ 也是对称矩阵, 于是二次型 $g(y_1, \dots, y_n)$ 的矩阵为 $\mathbf{B}$.

上述二次型变换的过程为:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \xrightarrow{\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}} (\mathbf{C}\mathbf{y})^T \mathbf{A} (\mathbf{C}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}) \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y} = g(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

这里出现了 $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C})$ 的变换, 由此我们引出合同的定义如下.

6.2.2 合同的定义及性质

(1) 矩阵合同的定义

设有两个 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, 如果存在一个可逆 n 阶矩阵 $\mathbf{C}$, 使

$$\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{B}$$

则称矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 合同, 记为 $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}$.

显然, 若 $\mathbf{A}$ 为对称矩阵, 则 $\mathbf{B}$ 也是对称矩阵. 因此实对称矩阵不可能与非对称矩阵合同 (生殖隔离).

(2) 矩阵合同的性质

①反身性: $\mathbf{A}$ 与自身合同, 显然 $\mathbf{E}^T \mathbf{A} \mathbf{E} = \mathbf{A}$;

- ②对称性：若 A 与 B 合同，则 B 与 A 合同；
- ③传递性：若 A 与 B 合同， B 与 D 合同，则 A 与 D 合同；
- ④特别地，若 C 为正交矩阵，且满足 $C^T A C = B$ ，则 A 与 B 既合同，又相似；
- ⑤矩阵 A 与 B 合同，则 A 与 B 秩相等，正负惯性指数均相等（正负惯性指数定义见后面）。

【例 1】设 $\alpha_1 = (1, 2)^T$ ， $\alpha_2 = (a, 1)^T$ ， $x = (x_1, x_2)^T$ ，若二次型 $f(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^2 (\alpha_i, x)^2$ 经可逆线性变换化为 $g(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2 + 2y_1 y_2$ ，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【例 2】设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ， $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ，试判断下列说法正确与否。

- (1) 必存在可逆矩阵 C ，使得 $C^T A C = B$ 。 (2) 必存在正交矩阵 Q ，使得 $Q^T A Q = B$ 。

6.3 二次型的标准形和规范形

实二次型 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 的基本问题是研究如何把一个比较复杂的二次型化为比较简单的只含有 x_i^2 这种平方项的二次型（称为标准形），从而便于我们对二次型进行分类，并易于讨论二次型的性质。

6.3.1 标准形和规范形

只含平方项而不含混合项的二次型称为**标准形**，即 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2$ 。

如果上述标准形中的系数 $d_i (i=1, \dots, n)$ 均为 1 或 -1 或 0，则称其为**规范形**。规范形是一种特殊的标准形。

6.3.2 将二次型化为标准形

一般而言，有两种常用的方法将二次型化为标准形。

(1) 正交变换

任一 n 元实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 都可以经过一个正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$ 化为标准形，即化为：

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

其中， $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 恰为二次型 f 的矩阵 $\mathbf{A}$ 的 n 个特征值。

这是因为 $\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$ ，而 $\mathbf{Q}$ 为正交矩阵，满足 $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$ ，故有 $\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$ 。

因此，有

$$f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \xrightarrow{\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}} (\mathbf{Q} \mathbf{y})^T \mathbf{A} (\mathbf{Q} \mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}) \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{y}$$

可以看到， $\mathbf{Q}$ 为连接矩阵相似与二次型的桥梁， $\mathbf{Q}$ 的求法在第五章已经给出，此处不再赘述。需要提醒的是，正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$ 下得到的 $\mathbf{\Lambda}$ 的主对角线元素是 $\mathbf{A}$ 的特征值。

而且，正交变换在几何上一个重要特点是它能够保持向量的长度，这是因为

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \sqrt{(\mathbf{Q} \mathbf{y})^T (\mathbf{Q} \mathbf{y})} = \sqrt{\mathbf{y}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{y}} = \sqrt{\mathbf{y}^T \mathbf{y}} = \|\mathbf{y}\|$$

【例 1】 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ ，试用正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$ 将其化成标准形。

(2) 配方法

对二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

先找出一个系数不为零的平方项 x_k^2 ，把**所有**包含 x_k 的项集中到一起，配成完全平方的形式；接着寻找下一个系数不为零的平方项 x_l^2 ，同样把**所有**包含 x_l 的项集中到一起，配成完全平方的形式。依次类推，直到二次型的每一项都成为完全平方的形式。

若二次型不含平方项，但 $a_{ij} \neq 0 (i \neq j)$ ，则可先作可逆线性变换（坐标变换）

$$\begin{cases} x_i = y_i + y_j \\ x_j = y_i - y_j \\ x_k = y_k \quad (k \neq i, j, k = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

化二次型为含平方项的二次型，再按上述配方法进行。

【例 2】用配方法把三元二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 化为标准形，并求所用的坐标变换 $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$ 。

【例 3】用配方法化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$ 为标准形，并求所做的坐标变换 $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$ 。

6.3.3 将标准形化为规范形

若 n 元二次型 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 经过坐标变换 $\mathbf{x} = \mathbf{C} \mathbf{y}$ 化为标准形

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \xrightarrow{\mathbf{x} = \mathbf{C} \mathbf{y}} d_1 y_1^2 + \cdots + d_p y_p^2 - d_{p+1} y_{p+1}^2 - \cdots - d_{p+q} y_{p+q}^2,$$

其中 $d_i > 0 (i=1, 2, \cdots, p+q)$. 再用坐标变换

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{\sqrt{d_1}} z_1 \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{d_2}} z_2 \\ \cdots \cdots \\ y_{p+q} = \frac{1}{\sqrt{d_{p+q}}} z_{p+q} \\ y_{p+q+1} = z_{p+q+1} \\ \cdots \cdots \\ y_n = z_n \end{cases}$$

则二次型化为 $z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_{p+q}^2$, 称为规范形. 对应坐标变换为

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{d_1}} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{d_{p+q}}} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \mathbf{z}$$

经过上述变换, 即可将二次型转为对应的规范形.

【例 4】请把二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + 2x_2 x_3$ 化为规范形, 并求所做的坐标变换.

6.3.4 惯性定理

前面已经说过, 令 $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$ ($\mathbf{C}$ 可逆) 就可以将一个二次型化为另一个二次型, 对一个二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, 可以用无数种可逆线性变换将其化为标准形.

那么, 不同的标准形之间有什么共性呢? 我们这里直接给出结论, 证明过程不要求大家掌握.

惯性定理: 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 对应的标准形中, 平方项前正系数个数 p 和负系数个数 q 都是唯一确定的, 称 p 为二次型的正惯性指数, q 为负惯性指数.

由惯性定理可以得到以下结论:

- (1) $p + q = r(\mathbf{A})$, 即正负惯性指数之和与矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩相等;
- (2) 二次型的规范形是唯一确定的;
- (3) 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 为同阶实对称矩阵, 则 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 合同的充分必要条件为 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 的秩和正惯性指数相同;
- (4) n 个变量的两个不同的二次型合同 $\Leftrightarrow$ 规范形相同 $\Leftrightarrow$ 正、负惯性指数相等.

【例 5】二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$, 则 f 的正惯性指数、负惯性指数为多少.

【例 6】 $f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$ 的正惯性指数为 ().

- (A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

【例 7】二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$ 的正惯性指数为 ().

- (A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

6.4 正定二次型

6.4.1 正定二次型的定义

若对任意非零实向量 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, 有 $f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$, 则称 $f(x_1, \dots, x_n)$ 为正定二次型, 它所对应的矩阵称为正定矩阵.

注: 正定矩阵一定是实对称矩阵.

如何判断二次型是否正定呢? 我们先看一个简单的情况:

例如

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

是正定二次型, 而

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2, \quad h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$$

不是正定的. 因为, $g(0, 0, 1) = -1 < 0$, $h(0, 0, 1) = 0$.

6.4.2 判别二次型正定性的方法

不难得到结论如下: 二次型 $f(x_1, \dots, x_n) = d_1 x_1^2 + \dots + d_n x_n^2$ 是正定的充分必要条件为 $d_i (i=1, \dots, n)$ 均大于零.

此外, 给出一个重要定理: 可逆线性变换不改变二次型的正定性.

证明:

二次型 $f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 经过可逆线性变换 $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$, 化成二次型 $g(y_1, \dots, y_n) = \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y}$,

其中 $\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$. 由 $\mathbf{P}$ 为可逆阵知, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 当且仅当 $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$.

于是, 对任意的 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ 当且仅当任意 $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ 时, $g(y_1, \dots, y_n) = \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y} > 0$.

即 $f(x_1, \dots, x_n)$ 为正定的充要条件为 $g(y_1, \dots, y_n)$ 是正定, 或者说 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵的充要条件为 $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$ 为正定矩阵.

由上述两个结论可见, 一个二次型 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, 通过坐标变换 $\mathbf{x} = \mathbf{C} \mathbf{y}$, 将其化成标准形 $\mathbf{y}^T (\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}) \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n d_i y_i^2$

(用矩阵语言来说就是: 实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 合同于对角矩阵, 即 $\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{\Lambda}$), 就容易判别其正定性.

除此以外, 判别二次型的正定性常常用以下几条充分必要条件:

n 元实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 正定 $\Leftrightarrow$

- (1) 正惯性指数 p 等于 n
- (2) $\mathbf{A}$ 的特征值均大于零
- (3) 所有顺序主子式均大于零
- (4) $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{E}$ 合同
- (5) 存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$, 使得 $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{P}$

由此衍生出正定矩阵 $\mathbf{A}$ 的几个性质: 若实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 正定, 则

- (1) $\mathbf{A}$ 的主对角元 $a_{ii} > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$;
- (2) $\mathbf{A}$ 的行列式 $|\mathbf{A}| > 0$;
- (3) $\mathbf{A}^T, \mathbf{A}^{-1}, \mathbf{A}^*, \mathbf{A}^m$ (m 为正整数) 均为正定矩阵;
- (4) $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 为 n 阶正定矩阵, 则 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 也是正定矩阵, 但 $\mathbf{AB}$ 未必是正定矩阵.

【例 1】判断二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_3$ 的正定性.

【例 2】若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + tx_2x_3$ 是正定的, 则 t 的取值范围是_____.

【例 3】设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = (A + kE)^2$, 其中 k 为实数, 求 k 为何值时, 矩阵 B 为正定矩阵.

【例 4】设 $f(x_1, x_2, x_3) = (ax_1 + 2x_2 - 3x_3)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + (x_1 + ax_2 - x_3)^2$ 是正定二次型, 则 ().

(A) $a \neq -1$ 且 $a \neq \frac{1}{2}$

(B) $a \neq \frac{1}{2}$ 且 $a \neq 1$

(C) $a \neq 1$ 且 $a \neq -\frac{1}{2}$

(D) $a \neq \frac{1}{2}$ 且 $a \neq 0$

【例 5】设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$, $A^T = A$, 则 f 正定的充要条件是 ().

(A) $|A| > 0$

(B) f 的负惯性指数为 0

(C) f 的秩为 n

(D) A^* 为正定矩阵

【例 6】设 A 是 $m \times n$ 阶实矩阵, E 为 n 阶单位矩阵. 已知矩阵 $B = \lambda E + A^T A$, 试证明: 当 $\lambda > 0$ 时, 矩阵 B 为正定矩阵.

【例 7】设 A 是 n 阶正定矩阵, 证明:

- (1) 存在 n 阶可逆矩阵 D , 使得 $A = D^T D$. (2) 存在 n 阶正定矩阵 B , 使得 $A = B^2$.

6.5 矩阵等价、相似、合同

6.5.1 判断等价

矩阵 A 与矩阵 B 等价 $\Leftrightarrow PAQ = B$ (其中 P, Q 可逆) $\Leftrightarrow r(A) = r(B)$

6.5.2 判断相似

先从相似的必要条件入手, 如 $|A| = |B|$, $tr(A) = tr(B)$, $r(A) = r(B)$, $\lambda_A = \lambda_B$. 如果必要条件都不满足, 则 A, B 必定不相似.

进一步, 可以借助定义 $P^{-1}AP = B$ 或者相似的传递性 ($A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$) 来判定是否相似.

6.5.3 判断合同

(1) 用定义: 矩阵 A 与矩阵 B 合同 $\Leftrightarrow C^T AC = B$.

(2) 用正、负惯性指数: A, B 合同 $\Leftrightarrow p_A = p_B, q_A = q_B$ (相同的正、负惯性指数)

(3) 用传递性: A 合同于 C, C 合同于 B , 则 A 合同于 B .

注 1: 实对称矩阵 A 与 B 相似 $\Rightarrow$ 实对称矩阵 A 与 B 合同, 反之不成立.

注 2: 矩阵合同虽然是在二次型 (实对称矩阵) 背景下引入的, 但非对称阵之间也是可以合同的. 容易证明: 实对称矩阵与非实对称矩阵之间不可能合同 (生殖隔离).

【例 1】设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B ().

(A) 合同且相似 (B) 合同但不相似 (C) 不合同但相似 (D) 既不合同, 也不相似

【例 2】设 A 是 n 阶实对称矩阵, 交换 A 的第 i 列和第 j 列, 然后再交换第 i 行和第 j 行, 得到的矩阵记作 B , 则 A, B 的关系是 ().

(A) 等价但不相似 (B) 相似但不合同
(C) 相似、合同, 但不等价 (D) 等价、相似、合同

完结撒花~