

考研数学 777 ● 月考测试参考解答

数学

(科目代码：无)

考生注意事项

- 1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生姓名和考生编号；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。
- 2. 考生须把试题册上的“试卷条形码”粘贴条取下，粘贴在答题卡的“试卷条形码粘贴位置”框中。不按规定粘贴条形码而影响评卷结果的，责任由考生自负。
- 3. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。
- 4. 填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔或者钢笔书写，字迹工整、笔记清楚；涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
- 5. 考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。
- 6. 本次考试时长为 3 小时。



(以下信息考生必须认真填写)

考生编号																	
考生姓名																	

一、选择题。(本大题共 10 个小题, 每小题 5 分, 共 50 分。在每个小题的四个选项当中, 只有一个选项是符合题意的。)

1. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列无穷小量最高阶的是 ()

A. $\int_0^{x^2} \ln(1 + \sqrt{t}) dt$ B. $\int_x^{2\sin x} \sin t^2 dt$ C. $\int_x^{\sin x} (e^{t^2} - 1) dt$ D. $\int_{x^3}^{x^2} \sqrt{1 - \sqrt{\cos t}} dt$

【解析】选择 C

变限积分无穷小量阶的题可以采用结论解决, 形如 $\int_0^x t^2 dt$ 阶为 $(2+1) \cdot 1 = 2$, 因此此题难点在于处理上限下限均含有 x 的题。对于此类题, 虽然也有一般结论技巧, 但即使没有记过技巧, 也具备用直接积分、拆积分、洛必达、求导定阶来解题的能力。

对于 A, $\int_0^{x^2} \ln(1 + \sqrt{t}) dt \sim \int_0^{x^2} \sqrt{t} dt$, 阶为 $\left(\frac{1}{2} + 1\right) \cdot 2 = 3$

对于 B, $\int_x^{2\sin x} \sin t^2 dt \sim \int_x^{2\sin x} t^2 dt = \frac{1}{3} (8 \sin^3 x - x^3)$, 阶为 3

对于 C, $\int_x^{\sin x} (e^{t^2} - 1) dt \sim \int_x^{\sin x} t^2 dt = \frac{1}{3} (\sin^3 x - x^3)$, 阶为 5

对于 D, $\int_{x^3}^{x^2} \sqrt{1 - \sqrt{\cos t}} dt = \int_{x^3}^0 \sqrt{1 - \sqrt{\cos t}} dt + \int_0^{x^2} \sqrt{1 - \sqrt{\cos t}} dt$ 。

其中 $\int_{x^3}^0 \sqrt{1 - \sqrt{\cos t}} dt \sim \int_{x^3}^0 \frac{1}{2} t dt$ 阶为 $(1+1) \cdot 3 = 6$ 。

并且 $\int_0^{x^2} \sqrt{1 - \sqrt{\cos t}} dt \sim \int_0^{x^2} \frac{1}{2} t dt$ 阶为 $(1+1) \cdot 2 = 4$, 故 $\int_{x^3}^{x^2} \sqrt{1 - \sqrt{\cos t}} dt$ 阶为 4

2. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\sin \frac{1}{x}} - 1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^k - \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = A \neq 0$ 成立的充要条件为 ()

A. $k \neq 1$ B. $k > 1$ C. $k > 0$ D. 与 k 无关

【解析】选择 A

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\sin \frac{1}{x}} - 1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^k - \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{k-1} - 1\right]} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{(k-1) \frac{1}{x}} = \frac{1}{k-1}$$

故当 $k \neq 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\sin \frac{1}{x}} - 1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^k - \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = A \neq 0$ 成立

3. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx+1}{n+x^{2n}}$, 则关于 $f(x)$ 的说法中不正确的是 ()

A. $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

B. $f(x)$ 为奇函数

C. $f(x)$ 的可去间断点有两个

D. $f(x)$ 不可能是周期函数

【解析】选择 C

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ 1, & |x| = 1 \\ +\infty, & |x| > 1 \end{cases}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} nx = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \infty, & x \neq 0 \end{cases}$

所以 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx+1}{n+x^{2n}} = \begin{cases} x, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$, 故 A 正确。

由于 $f(-x) = \begin{cases} -x, & |-x| \leq 1 \\ 0, & |-x| > 1 \end{cases} = \begin{cases} -x, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} = -f(x)$, 故 B 正确。

由于 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 0$ 。

所以 $f(x)$ 的跳跃间断点有两个, 故 C 错误。

由 $f(x)$ 的表达式来看 $f(x)$ 不可能是周期函数, 故 D 正确。

4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \cos|x| - 1, & x \leq 0, \\ x \ln x, & x > 0, \end{cases}$ 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 ()

A. 可导点, 极值点

B. 不可导点, 极值点

C. 可导点, 非极值点

D. 不可导点, 非极值点

【解析】选择 B

当 $x < 0$ 时, $f(x) = \cos(-x) - 1 = \cos x - 1$, 所以有

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x} = -\infty$$

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的右导数不存在, 从而 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导

当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时, $f'(x) = -\sin x > 0$, 当 $0 < x < e^{-1}$ 时, $f'(x) = \ln x + 1 < 0$, 且 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 所以 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

5. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某邻域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[f(x+1) + \cos x]}{\sqrt{1-x^2} - 1} = -1$, 则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的 ()

- A. 不可导点 B. 驻点, 但非极值点 C. 可导点, 但非驻点 D. 驻点, 且为极值点

【解析】选择 D

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[f(x+1) + \cos x]}{\sqrt{1-x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[f(x+1) + \cos x]}{-\frac{1}{2}x^2} = -1$, 可知

$\lim_{x \rightarrow 0} \ln[f(x+1) + \cos x] = 0$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x+1) + \cos x] = 1$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x+1) = 0$

又由 $f(x)$ 连续性知 $f(1) = 0$, 故

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[f(x+1) + \cos x]}{\sqrt{1-x^2} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[f(x+1) + \cos x - 1 + 1]}{\sqrt{1-x^2} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1) + \cos x - 1}{-\frac{1}{2}x^2} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1)}{x^2} + 1 = -1 \end{aligned}$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1)}{x^2} = 1$

所以 $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1) - f(1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1)}{x^2} \cdot x = 0$, 即 $x=1$ 为 $f(x)$ 的驻点

又由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1)}{x^2} = 1$ 知在 $x=0$ 的某空心邻域内 $\frac{f(x+1)}{x^2} > 0$, 即 $f(x+1) > 0 = f(1)$ 从而可知 $x=1$ 为极小值点, 故选 (D)

6. 函数 $f(x) = \ln |(x-1)(x-2)\cdots(x-n)|$ 的驻点个数为 ()

- A. 0 B. 1 C. $n-1$ D. n

【解析】选择 C

(777 解答)

$$f'(x) = \frac{[(x-1)(x-2)\cdots(x-n)]'}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}, \text{ 令 } g(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-n),$$

$g(1) = g(2) = \cdots = g(n) = 0$, 由罗尔定理得 $g(x)$ 至少有 $n-1$ 个零点,

又 $g(x)$ 是 n 次多项式, 则 $g'(x)$ 是 $n-1$ 次多项式, $g'(x)$ 最多有 $n-1$ 个零点, 故 $f(x)$ 的驻点个数为 $n-1$

(P 佬解答)

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \cdots + \frac{1}{x-n}.$$

由于 $f''(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-2)^2} - \cdots - \frac{1}{(x-n)^2} < 0$, 即 $f'(x)$ 在定义区间单调递减。

并且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow k^-} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow k^+} f'(x) = +\infty$, 其中 $k = 1, 2, \cdots, n$ 。

所以 $f'(x)$ 在 $(1, 2), (2, 3), \cdots, (n-1, n)$ 内的每一个区间都有一个零点, 所以 $f'(x)$ 拢共有 $n-1$ 个零点。

即 $f(x)$ 的驻点个数为 $n-1$ 。

7. 设函数 $f(x) = ae^x - bx (a > 0)$ 有两个零点, 则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是 ()

- A. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ B. $(0, e)$ C. $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ D. $(e, +\infty)$

【解析】选择 D

显然 $b > 0$, 否则 $f(x)$ 是单调增加函数, 与条件矛盾

$f'(x) = ae^x - b$, 令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = \ln \frac{b}{a}$

当 $x \in \left(-\infty, \ln \frac{b}{a}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 单调递减

当 $x \in \left(\ln \frac{b}{a}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 单调递增

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$

因此 $f\left(\ln \frac{b}{a}\right)$ 是最小值故当 $f\left(\ln \frac{b}{a}\right) = ae^{\ln \frac{b}{a}} - b \ln \frac{b}{a} = b\left(1 - \ln \frac{b}{a}\right) < 0$ 时, $f(x)$ 有两个零点, 此时 $\frac{b}{a} > e$, 即 $\frac{b}{a} \in (e, +\infty)$

8. 设函数 $f(x)$ 可导, $|f(x)|$ 在 $x = 0$ 处不可导, 则 ()

- A. $f(0) = 0, f'(0) = 0$ B. $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$
C. $f(0) \neq 0, f'(0) = 0$ D. $f(0) \neq 0, f'(0) \neq 0$

【解析】选择 B

当 $f(0) \neq 0$ 且 $f(x)$ 可导时, $|f(x)|$ 在 $x = 0$ 处也必然可导。

当 $f(0) = 0$ 时, 令 $|f(x)| = g(x)$, 即

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)| - |f(0)|}{x - 0} \stackrel{f(0)=0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - f(0)|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| \cdot \frac{|x|}{x}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| \cdot \frac{|x|}{x} = |f'(0)|$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| \cdot \frac{|x|}{x} = -|f'(0)|$ 。

由题意知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$ 不存在, 那就需要 $|f'(0)| \neq -|f'(0)|$, 即 $|f'(0)| \neq 0$, 即 $f'(0) \neq 0$ 。

故选 (B)。

9. 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{3n}}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内 ()

A. 处处可导

B. 有一个不可导点

C. 有两个不可导点

D. 至少有三个不可导点

【解析】选择 C

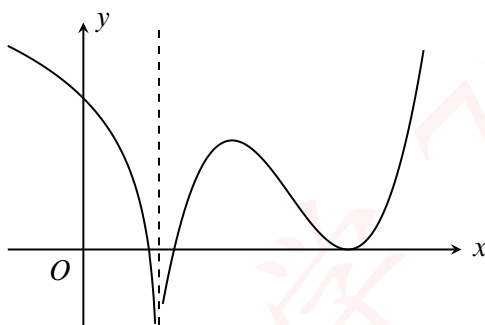
$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{3n}} = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ |x^3|, & |x| > 1 \end{cases}$$

显然 $f(x)$ 为偶函数, 不可导的点只可能为 $x = \pm 1$, 所以只需讨论 $x = 1$ 即可.

$$\text{由于 } f'_-(1) = 0, f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

则 $f(x)$ 在 $x = 1$ 不可导, 从而在 $x = -1$ 也不可导, 故应选 (C)

10. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图所示, 则 ()



A. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点

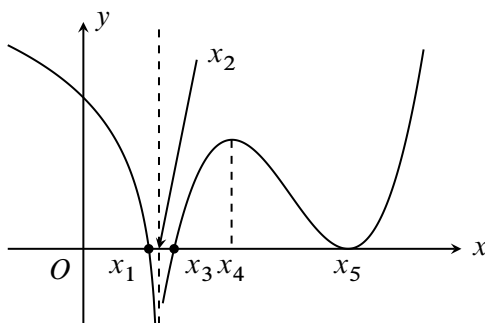
B. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 3 个拐点

C. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 1 个拐点

D. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点

【解析】选择 B

注意此图 $f(x)$ 的导函数即 $f'(x)$ 的图像 (如下图所示)



首先, 极值点可能在 $f'(x) = 0$ 的点或不可导点处, 即 x_1, x_2, x_3, x_5 判断是否为极值点的方法之一是 $f'(x)$ 是否在左右两侧异号, 只有 x_1, x_3 是极值点

第二, 由导函数 $f'(x)$ 图像易见, $f'(x)$ 的增减性发生过三次变化, 从而 $f''(x)$ 的正负号发生过三次变化, 即 $f(x)$ 的凹凸性发生过三次变化, 因此 $f(x)$ 有且仅有 3 个拐点, 故选 (B)

二、填空题。(本大题共 6 个小题，每小题 5 分，共 30 分。请将答案写到答题卡的相应位置上)

11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \ln |1 - x| =$ _____.

【解析】填 “0”

由于 $\ln x = \ln[1 + (x - 1)] \sim x - 1$ ，所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \ln |1 - x| = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \ln |1 - x| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln |1 - x|}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{-1}{1-x}}{-\frac{1}{(x-1)^2}} = 0$$

12. 已知 $f'(x) = ke^x$ ，常数 $k \neq 0$ ，求 $f(x)$ 的反函数的二阶导数_____.

【解析】填 “ $-\frac{1}{k^2}e^{-2x}$ ”

$$\text{设 } y = f(x), \text{ 则 } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{ke^x} = \frac{1}{k}e^{-x}, \frac{d^2x}{dy^2} = \left(\frac{1}{k}e^{-x}\right)' \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{k}e^{-x} \cdot \frac{1}{k}e^{-x} = -\frac{1}{k^2}e^{-2x}$$

13. 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调递减，并且 $a_1 = 777$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^{\frac{1}{n}} =$ _____.

【解析】填 “1”

$$\text{由于 } \lim_{n \rightarrow \infty} 777^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_1 + \cdots + a_1)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (777n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{且 } \lim_{n \rightarrow \infty} 777^{\frac{1}{n}} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} (777n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (777)^{\frac{1}{n}} \cdot n^{\frac{1}{n}} = 1 \cdot 1 = 1$$

故由夹逼准则得原极限 = 1

14. 设 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cdot \cos \frac{1}{x^\beta}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ ($\alpha > 0, \beta > 0$), 若 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $\alpha - \beta$ 的范围为 _____.

【解析】填 “ $\alpha - \beta > 1$ ”

因 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 于是有 $f'_+(0) = f'_-(0)$

即 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha \cos \frac{1}{x^\beta} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0 - 0}{x}$, 亦即 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta} = 0$, 因此 $\alpha - 1 > 0$

又因为 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = f'(0)$, 即

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\alpha x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta} + \beta x^{\alpha-\beta-1} \sin \frac{1}{x^\beta} \right) = 0$$

由此可见 $\alpha - \beta - 1 > 0$

15. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 将 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 展开至 x 的三阶无穷小 _____.

【解析】填 “ $x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ ”

(777 解答)

由于 $(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$, 所以

$$\begin{aligned} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) &= \ln\left(x + 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right) = \ln\left(1 + \left(x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right)\right) \\ &= x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)^3 \\ &= x + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 + o(x^3) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

(P 佬解答)

注意到 $\left[\ln(x + \sqrt{1+x^2})\right]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.

所以 $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.

16. 设 $f(x) = \ln \frac{x}{1+x}$, 则 $f^{(n)}(1) =$ _____.

【解析】填 “ $(-1)^{n-1}(n-1)! \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ ”

当 $x > 0$ 时, $f(x) = \ln x - \ln(1+x)$,

(777 解答)

$$(1) \ln x = \ln[1 + (x-1)] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n},$$

$$(2) \ln(1+x) = \ln\left[2\left(1 + \frac{x-1}{2}\right)\right] = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x-1}{2}\right) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 2^n}$$

$$\text{故 } f(x) = -\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2^n-1)}{n \cdot 2^n} (x-1)^n, \text{ 则 } f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)! \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

(P 佬解答)

$$\text{此时 } f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}, \text{ 所以 } f^{(n)}(x) = [f'(x)]^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} - \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}.$$

$$\text{所以 } f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)! \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

考研数学

三、解答题。(本大题共 6 个小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。请将解答写在答题卡指定位置上。)

17. (本题满分 10 分)

$$\text{求极限 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right)$$

【解析】

由于

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} \right) &\leq \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right) \\ &< \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} \right) \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} \right) = \int_0^1 \sin(\pi x) dx = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

故由夹逼准则得原极限 $= \frac{2}{\pi}$

18. (本题满分 12 分)

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} |x|^p \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- (1) 当 p 为何值时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续;
- (2) 当 p 为何值时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导;
- (3) 当 p 为何值时, $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续。

【解析】

(1) 由连续的定义 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 可知, 此题中 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 即

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0), \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x|^p \sin \frac{1}{x} = 0, \text{ 当 } p > 0 \text{ 时, 满足连续要求}$$

(2) 题目要求 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导即 $f'(0)$ 存在。

$$\text{由于 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} |x|^{p-1} \sin \frac{1}{x}, \text{ 且当 } p > 1 \text{ 时, 该极限存在且为 } 0.$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} = 0 (\text{有界量} \cdot \text{无穷小})$$

故当 $p > 1$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导

$$(3) \text{ 当 } x > 0 \text{ 时, } f'(x) = \left(x^p \sin \frac{1}{x} \right)' = px^{p-1} \sin \frac{1}{x} - x^{p-2} \cos \frac{1}{x}$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } f'(x) = \left[(-x)^p \sin \frac{1}{x} \right]' = -p(-x)^{p-1} \sin \frac{1}{x} - (-x)^{p-2} \cos \frac{1}{x}$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } f'(0) = 0$$

由此可知, 当 $p > 2$ 时, $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续

考研数学

19. (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x > 0, \\ xe^x + 1, & x \leq 0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$, 并求 $f(x)$ 的极值

【解析】

(1) 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) = (x^{2x})' = (e^{2x \ln x})' = 2(\ln x + 1)x^{2x}$,

(2) 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) = (x+1)e^x$,

(3) 在点 $x = 0$ 处, $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^{2x}(\ln x + 1)}{1} = -\infty$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导

综上所述, $f'(x) = \begin{cases} 2x^{2x}(\ln x + 1), & x > 0, \\ (x+1)e^x, & x < 0. \end{cases}$

令 $f'(x) = 0$ 可得驻点 $x = -1$ 和 $x = \frac{1}{e}$, 另外 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的不可导点

当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) > 0$;

当 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时 $f'(x) < 0$; 当 $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

故 $x = -1$ 为极小值点, 极小值为 $f(-1) = 1 - e^{-1}$;

$x = 0$ 为极大值点, 极大值为 $f(0) = 1$;

$x = \frac{1}{e}$ 为极小值点, 极小值为 $f(\frac{1}{e}) = e^{-\frac{2}{e}}$

20. (本题满分 12 分)

求曲线 $y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ 的斜渐近线方程

【解析】

斜渐近线的斜率为 $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x}{(1+x)^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{x})^x} = \frac{1}{e}$

斜渐近线的截距为

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(y - \frac{x}{e} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - \frac{x}{e} \right] \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{(1+\frac{1}{x})^x} - \frac{x}{e} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left[e - (1+\frac{1}{x})^x \right]}{e(1+\frac{1}{x})^x} = \frac{1}{e^2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e - (1+\frac{1}{x})^x}{\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{e^2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e - e^{x \ln(1+\frac{1}{x})}}{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{e} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln(1+\frac{1}{x})-1} - 1}{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{e} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(1+\frac{1}{x}) - 1}{\frac{1}{x}} \\ &= -\frac{1}{e} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{e} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{2x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2e} \end{aligned}$$

所以曲线 $y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ 的斜渐近线方程为 $y = \frac{x}{e} + \frac{1}{2e}$

21. (本题满分 12 分)

试讨论方程 $kx + \frac{1}{x^2} - 1 = 0 (x > 0)$ 的实根个数

【解析】

分离参数得 $k = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} (x > 0)$ 令 $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} (x > 0)$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} = \frac{3-x^2}{x^4}$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \sqrt{3}$

当 $x \in (0, \sqrt{3})$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增

当 $x \in (\sqrt{3}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减

$$f(\sqrt{3}) = \frac{2}{9}\sqrt{3}, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-1}{x^3} = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(1) 当 $k > \frac{2}{9}\sqrt{3}$ 时, 原方程无实根;

(2) 当 $k = \frac{2}{9}\sqrt{3}$ 或 $k \leq 0$ 时, 原方程有 1 个实根;

(3) 当 $0 < k < \frac{2}{9}\sqrt{3}$ 时, 原方程有 2 个实根。

22. (本题满分 12 分)

(1) 证明: $\ln x < \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right), x > 1$

(2) 设 $x_n > 0$, 且 $x_1 > 1, \ln x_n = \frac{x_{n+1}^2 - 1}{2x_{n+1}}$, 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在并求其值。

【解析】

(1) 令 $g(x) = \ln x - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right), x > 1$ 。此时 $g(1) = 0$ 。

此时 $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} = \frac{2x - x^2 - 1}{2x^2} = -\frac{(x-1)^2}{2x^2} \leq 0$ 并且只在 $x = 1$ 处取得等号

所以 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减, 所以 $g(x) < g(1) = 0$, 所以 $\ln x < \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right), x > 1$ 。

(2) 由 $x_1 > 1$ 得 $\ln x_1 = \frac{x_2^2 - 1}{2x_2} > 0$, 结合 $x_n > 0$ 可解得 $x_2 > 1$ 。

假定 $x_k > 1$, 则重复上述操作可得 $\ln x_k = \frac{x_{k+1}^2 - 1}{2x_{k+1}} > 0$, 结合 $x_n > 0$ 可解得 $x_{k+1} > 1$ 。

所以由数学归纳法可得 $\forall n$, 都有 $x_n > 1$ 。

那么此时 $x_{n+1} > 1$, 所以由 (1) 可得 $\ln x_n = \frac{x_{n+1}^2 - 1}{2x_{n+1}} > \ln x_{n+1}$, 所以 $x_n > x_{n+1}$ 。

所以 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 假设为 $A (A \geq 1)$ 。

则对 $\ln x_n = \frac{x_{n+1}^2 - 1}{2x_{n+1}}$ 两边取极限得 $\ln A = \frac{A^2 - 1}{2A} = \frac{1}{2}\left(A - \frac{1}{A}\right)$, 结合 (1) 可得 $A = 1$ 。