

考研数学 777 ● 月考测试

数学

(科目代码：无)

考生注意事项

- 1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生姓名和考生编号；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。
- 2. 考生须把试题册上的“试卷条形码”粘贴条取下，粘贴在答题卡的“试卷条形码粘贴位置”框中。不按规定粘贴条形码而影响评卷结果的，责任由考生自负。
- 3. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。
- 4. 填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔或者钢笔书写，字迹工整、笔记清楚；涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
- 5. 考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。
- 6. 本次考试时长为 3 小时。

试卷条形码

(以下信息考生必须认真填写)

考生编号																			
考生姓名																			

一、选择题。(本大题共 10 个小题，每小题 5 分，共 50 分。在每个小题的四个选项当中，只有一个选项是符合题意的。)

1. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时，下列无穷小量最高阶的是 ()

A. $\int_0^{x^2} \ln(1 + \sqrt{t}) dt$ B. $\int_x^{2\sin x} \sin t^2 dt$ C. $\int_x^{\sin x} (e^{t^2} - 1) dt$ D. $\int_{x^3}^{x^2} \sqrt{1 - \sqrt{\cos t}} dt$

2. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\sin \frac{1}{x}} - 1}{(1 + \frac{1}{x})^k - (1 + \frac{1}{x})} = A \neq 0$ 成立的充要条件为 ()

A. $k \neq 1$ B. $k > 1$ C. $k > 0$ D. 与 k 无关

3. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx + 1}{n + x^{2n}}$ ，则关于 $f(x)$ 的说法中不正确的是 ()

A. $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ B. $f(x)$ 为奇函数
C. $f(x)$ 的可去间断点有两个 D. $f(x)$ 不可能是周期函数

4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \cos |x| - 1, & x \leq 0, \\ x \ln x, & x > 0, \end{cases}$ 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 ()

A. 可导点，极值点 B. 不可导点，极值点 C. 可导点，非极值点 D. 不可导点，非极值点

5. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 的某邻域内连续，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[f(x+1) + \cos x]}{\sqrt{1-x^2} - 1} = -1$ ，则 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的 ()

A. 不可导点 B. 驻点，但非极值点 C. 可导点，但非驻点 D. 驻点，且为极值点

6. 函数 $f(x) = \ln |(x-1)(x-2)\cdots(x-n)|$ 的驻点个数为 ()

A. 0 B. 1 C. $n-1$ D. n

7. 设函数 $f(x) = ae^x - bx (a > 0)$ 有两个零点，则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是 ()

A. $(0, \frac{1}{e})$ B. $(0, e)$ C. $(\frac{1}{e}, +\infty)$ D. $(e, +\infty)$

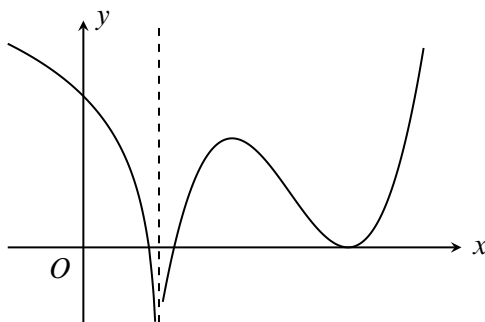
8. 设函数 $f(x)$ 可导， $|f(x)|$ 在 $x = 0$ 处不可导，则 ()

A. $f(0) = 0, f'(0) = 0$ B. $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$ C. $f(0) \neq 0, f'(0) = 0$ D. $f(0) \neq 0, f'(0) \neq 0$

9. 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{3n}}$ ，则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内 ()

A. 处处可导 B. 有一个不可导点 C. 有两个不可导点 D. 至少有三个不可导点

10. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则 ()



- A. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点
 B. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 3 个拐点
 C. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 1 个拐点
 D. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点

二、填空题。(本大题共 6 个小题, 每小题 5 分, 共 30 分。请将答案写到答题卡的相应位置上)

11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \ln |1 - x| =$ _____.

12. 已知 $f'(x) = ke^x$, 常数 $k \neq 0$, 求 $f(x)$ 的反函数的二阶导数_____.

13. 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 并且 $a_1 = 777$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^{\frac{1}{n}} =$ _____.

14. 设 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cdot \cos \frac{1}{x^\beta}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ ($\alpha > 0, \beta > 0$), 若 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $\alpha - \beta$ 的范围为_____.

15. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 将 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ 展开至 x 的三阶无穷小_____.

16. 设 $f(x) = \ln \frac{x}{1+x}$, 则 $f^{(n)}(1) =$ _____.

三、解答题。(本大题共 6 个小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。请将解答写在答题卡指定位置上。)

17. (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right)$

18. (本题满分 12 分)

设 $f(x) = \begin{cases} |x|^p \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

- (1) 当 p 为何值时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续;
 (2) 当 p 为何值时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导;
 (3) 当 p 为何值时, $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续。

19. (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x > 0, \\ xe^x + 1, & x \leq 0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$, 并求 $f(x)$ 的极值

20. (本题满分 12 分)

求曲线 $y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ 的斜渐近线方程

21. (本题满分 12 分)

试讨论方程 $kx + \frac{1}{x^2} - 1 = 0 (x > 0)$ 的实根个数

22. (本题满分 12 分)

(1) 证明: $\ln x < \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right), x > 1$

(2) 设 $x_n > 0$, 且 $x_1 > 1, \ln x_n = \frac{x_{n+1}^2 - 1}{2x_{n+1}}$, 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在并求其值。

考研数学 777