1.如果对微分方程 $y''-2ay'+(a+2)y=0$ 的任一解 $y(x)$，反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)\,\mathrm{d}x$ 均收敛，那么 a 的取值范围是（　　）

（A）$(-2,-1]$.　（B）$(-\infty,-1]$.　（C）$(-2,0)$.　（D）$(-\infty,0)$.

对于 $r^2-2ar+(a+2)=0$，$\Delta=4a^2-4a-8$

① $\Delta>0$　$r_{1,2}=a\pm\sqrt{a^2-a-2}$　$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

由 $\begin{cases} 4a^2-4a-8>0 \\ a+\sqrt{a^2-a-2}<0 \\ a-\sqrt{a^2-a-2}<0 \end{cases} \Rightarrow -2<a<-1$

② $\Delta=0$　$r_1=r_2=a$　$y=(C_1+C_2x)e^{ax}$

由 $\begin{cases} 4a^2-4a-8=0 \\ a<0 \end{cases} \Rightarrow a=-1$

③ $\Delta<0$　$r_{1,2}=a\pm\sqrt{2+a-a^2}\,i$　$y=e^{ax}(C_1\cos\sqrt{2+a-a^2}\,x+C_2\sin\sqrt{2+a-a^2}\,x)$

由 $\begin{cases} 4a^2-4a-8<0 \\ a<0 \end{cases} \Rightarrow -1<a<0$

综上所述，$-2<a<0$.

2.用变量代换 $x=\cos t(0<t<\pi)$ 化简微分方程 $(1-x^2)y''-xy'+y=0$，并求其满足 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2$ 的特解.

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\boxed{\frac{dt}{dx}}=-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt} \checkmark$$

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$y''=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{\sin t}\left(\frac{\cos t}{\sin^2 t}\frac{dy}{dt}-\frac{1}{\sin t}\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

$$=-\frac{\cos t}{\sin^3 t}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{\sin^2 t}\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\cancel{-\frac{\cos t}{\sin t}\frac{dy}{dt}}+\frac{d^2y}{dt^2}+\cancel{\frac{\cos t}{\sin t}\frac{dy}{dt}}+y=0.$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{d^2y}{dt^2}+y=0.}$$

由 $r^2+1=0\Rightarrow r=\pm i$ $\quad y=C_1\cos t+C_2\sin t=\underline{C_1x+C_2\sqrt{1-x^2}}$

$C_1=2, C_2=1.$ $\quad$ 故 $y=2x+\sqrt{1-x^2}.$

2. 设非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x), y_2(x)$, C 为任意常数，则该方程的通解是（ B ）

(A) $C[y_1(x)-y_2(x)]$. (B) $y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$.

(C) $C[y_1(x)+y_2(x)]$. (D) $y_1(x)+C[y_1(x)+y_2(x)]$.

Y

$y_1(x)-y_2(x)$ 是 $y'+p(x)y=0$ 的解.

3. 具有特解 $y_1=e^{-x}$, $y_2=2xe^{-x}$, $y_3=3e^{x}$ 的三阶常系数齐次线性微分方程是（ B ）

(A) $y'''-y''-y'+y=0$. (B) $y'''+y''-y'-y=0$.

(C) $y'''-6y''+11y'-6y=0$. (D) $y'''-2y''-y'+2y=0$.

$$y=(C_1+C_2x)e^{-x}+C_3e^{x}$$

$$(r+1)^2(r-1)=0 \Rightarrow r^3+r^2-r-1=0.$$

4. 微分方程 $y''-y=e^x+1$ 的一个特解应具有形式（式中 a,b 为常数）（ B ）

e^0

(A) ae^x+b. (B) axe^x+b. (C) ae^x+bx. (D) axe^x+bx.

$$r^2-1=0 \Rightarrow r_1=1, r_2=-1$$

$\lambda=1$ 是单实根. $\lambda=0$ 不是根.

7. 微分方程 $y''=y'+x$ 满足 $y|_{x=0}=3$, $y'|_{x=0}=0$ 的特解是 $y=e^x-\frac{x^2}{2}-x+2$.

法一：对于 $y''-y'=0$. 由 $r^2-r=0 \Rightarrow r_1=0, r_2=1$

$y''-y'=x$

$$Y=C_1+C_2e^x$$

$$y^*=\frac{1}{D^2-D}x=\frac{1}{D}\frac{1}{D-1}x=-\frac{1}{D}(1+D)x$$

$$=-\frac{1}{D}(x+1)=-\left(\frac{x^2}{2}+x\right)$$

$$y=C_1+C_2e^x-\left(\frac{x^2}{2}+x\right)$$

$$\text{由}\begin{cases}C_1+C_2=3\\ C_2-1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}C_1=2\\ C_2=1\end{cases}$$

法二(降阶一.二)：令 $y'=p(x)$，$\frac{dp}{dx}-p=x$ $y''=f(x,y')$

$p=e^{\int dx}\left(\int x e^{-\int dx}dx+C_1\right)$

$=e^{x}\left(\int x e^{-x}dx+C_1\right)=e^{x}\left(-xe^{-x}+\int e^{-x}dx+C_1\right)$

$=-x-1+C_1e^{x}$ 由 $y'(0)=0\Rightarrow C_1=1$

$y=\int(-x-1+e^{x})dx=-\frac{x^2}{2}-x+e^{x}+C_2$. 由 $y(0)=3\Rightarrow C_2=2$.

8\. 微分方程 $y''+4y=25xe^{x}$ 的通解是 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+e^{x}(5x-2)$.

对于 $y''+4y=0$，由 $r^2+4=0\Rightarrow r_{1,2}=\pm 2i$

$Y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$ $\lambda=1$

$y^*=\frac{1}{D^2+4}25xe^{x}=e^{x}\frac{1}{(D+1)^2+4}25x$

$=e^{x}\frac{1}{D^2+2D+5}25x=e^{x}\frac{1}{1+\frac{D^2+2D}{5}}5x$

$=e^{x}\left(1-\frac{\cancel{D^2}+2D}{5}\right)5x=e^{x}\left(5x-\frac{2}{5}\cdot 5\right)=e^{x}(5x-2)$.

10\. 求微分方程 $y''+\lambda y'=2x+1$ 的通解，其中 λ 为常数.

由 $r^2+\lambda r=0\Rightarrow r_1=0$，$r_2=-\lambda$

① 当 $\lambda=0$ 时，$y''=2x+1\Rightarrow y'=x^2+x+C_1\Rightarrow y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2$.

② 当 $\lambda\neq 0$ 时，$Y=C_1+C_2e^{-\lambda x}$

$y^*=\frac{1}{D^2+\lambda D}(2x+1)=\frac{1}{D}\frac{1}{D+\lambda}(2x+1)$

$$= \frac{1}{D}\frac{1}{x}\left(1-\frac{D}{\lambda}\right)(2x+1) = \frac{1}{D}\frac{1}{\lambda}\left(2x+1-\frac{1}{\lambda}\cdot 2\right)$$

$$= \frac{1}{D}\frac{1}{\lambda^2}(2\lambda x+\lambda-2) = \frac{1}{\lambda^2}\left[\lambda x^2+(\lambda-2)x\right]$$

$$y = \begin{cases} C_1 + C_2 e^{-\lambda x} + \dfrac{\lambda x^2+(\lambda-2)x}{\lambda^2}, & \lambda \neq 0 \\ \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+C_1 x + C_2, & \lambda = 0 \end{cases}$$