1. 设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数,求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

法一：两边同时求偏导　　$9y^2-18y^2+10y^2-2y^2-y^2+18=0.$

法二：记 $F(x,y,z)=x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18$

$F_x'=2x-6y,\ F_y'=-6x+20y-2z,\ F_z'=-2y-2z$

$F_{xx}''=2,\ F_{xy}''=-6,\ F_{yy}''=20$

由 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x-6y=0\\ -6x+20y-2z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=9\\ y=3\\ z=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-9\\ y=-3\\ z=-3\end{cases}$

在 $(9,3,3)$ 处，$A=-\dfrac{F_{xx}''}{F_z'}=\dfrac{1}{6},\ B=-\dfrac{F_{xy}''}{F_z'}=-\dfrac{1}{2},\ C=-\dfrac{F_{yy}''}{F_z'}=\dfrac{5}{3}$

由于 $AC-B^2=\dfrac{1}{36}>0,\ A>0$，故 $z(x,y)$ 有极小值 $z(9,3)=3.$

在 $(-9,-3,-3)$ 处，$A=-\dfrac{1}{6},\ B=\dfrac{1}{2},\ C=-\dfrac{5}{3}$

由于 $AC-B^2=\dfrac{1}{36}>0,\ A<0$，故 $z(x,y)$ 有极大值 $z(-9,-3)=-3.$

2. 求函数 $u=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值.

记 $L(x,y,z,\lambda)=xy+2yz+\lambda(x^2+y^2+z^2-10)$

$$\begin{cases} L_x'=\cancel{y}+2x\lambda=0 \\ L_y'=x+2z+\cancel{2y}\lambda=0 \\ L_z'=\cancel{2y}+2z\lambda=0 \\ L_\lambda'=x^2+y^2+z^2-10=0 \end{cases}$$

$x+2z=0$

设 $x\neq0, y\neq0, z\neq0$

$\lambda=\frac{-y}{2x}=-\frac{x+2z}{2y}=-\frac{2y}{2z}$

$\Rightarrow \frac{y}{2x}=\frac{x+2z}{2y}=\frac{y}{z}$

$2y^2=2x^2+4xz$
$=2x^2+8x^2$

$\Rightarrow \begin{cases} z=2x \\ y^2=5x^2 \end{cases}$

$x^2+5x^2+4x^2=10 \Rightarrow x^2=1.$

$$\begin{cases} x=-2z \\ y=0 \\ x^2+y^2+z^2=10 \end{cases}$$

$4z^2+z^2=10.$

$\Rightarrow z^2=2$

$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\sqrt{5} \\ z=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1 \\ y=\sqrt{5} \\ z=-2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1 \\ y=-\sqrt{5} \\ z=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-\sqrt{5} \\ z=-2 \end{cases}$

或 $\begin{cases} x=-2\sqrt{2} \\ y=0 \\ z=\sqrt{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=2\sqrt{2} \\ y=0 \\ z=-\sqrt{2} \end{cases}$

$u(1,\sqrt{5},2)=5\sqrt{5}=u(-1,-\sqrt{5},-2)$, $u(-1,\sqrt{5},-2)=-5\sqrt{5}=u(1,-\sqrt{5},2)$

$u(-2\sqrt{2},0,\sqrt{2})=0=u(2\sqrt{2},0,-\sqrt{2})$

故最大值为 $5\sqrt{5}$, 最小值为 $-5\sqrt{5}$.

3. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大值与最小值.

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(z-x^2-y^2)+\mu(x+y+z-4)$$

$$\begin{cases} L_x'=2x-2x\lambda+\mu=0 & ① \\ L_y'=2y-2y\lambda+\mu=0 & ② \\ L_z'=2z+\lambda+\cancel{\mu}=0 & ③ \\ L_\lambda'=z-x^2-y^2=0 \\ L_\mu'=x+y+z-4=0 \end{cases}$$

①−②:

$2(x-y)-2x\lambda+2y\lambda=0$

$\Rightarrow 2(x-y)-2\lambda(x-y)=0$

$\Rightarrow 2(x-y)(1-\lambda)=0.$

$\Rightarrow x=y$ 或 $\lambda=1$ (舍)

当 $\lambda=1$ 时，由①.②得 $\mu=0$.

由③得 $2z+1=0\Rightarrow z=-\frac{1}{2}<0$

故 $\lambda\neq1$

$$\begin{cases} z=2x^2 \\ z=4-2x \end{cases}\Rightarrow x^2+x-2=0.$$

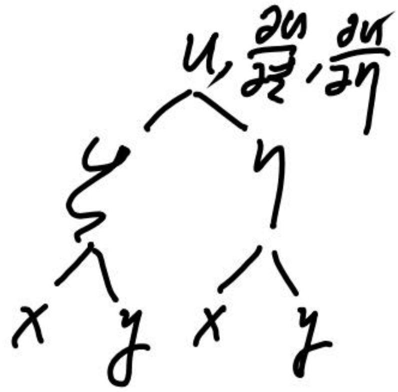
$\Rightarrow (x+2)(x-1)=0$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases} 或 \begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \\ z=8 \end{cases}$$

$u(1,1,2)=6$, $u(-2,-2,8)=72$.

故最大值为72. 最小值为6.

4 设函数 $u=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,且满足等式 $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$,确定 a,b 的值,使等式在变换 $\zeta=x+ay,\eta=x+by$ 下简化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial\eta}=0$.



$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=a\frac{\partial u}{\partial \xi}+b\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(a+b)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+b\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

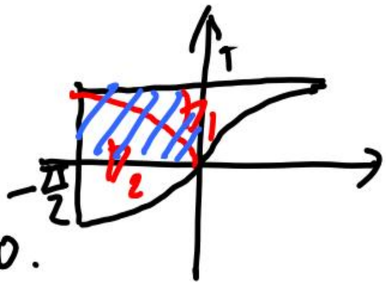
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2ab\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$(4+12a+5a^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(\underbrace{8+12a+12b+10ab}_{\neq 0})\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+(4+12b+5b^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$$

$$\begin{cases}4+12a+5a^2=0\\4+12b+5b^2=0\\8+12a+12b+10ab\neq 0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{2}{5}\\b=-2\end{cases}\text{或}\begin{cases}a=-2\\b=-\frac{2}{5}\end{cases}$$

5 设区域 D 由曲线 $y=\sin x,x=\pm\frac{\pi}{2},y=1$ 围成,则 $\iint\limits_D(x^5y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ (D)

(A) π. (B) 2. (C) -2. (D) -π.



记 $f(x,y)=x^5y$

$$\begin{cases}D_1\text{关于}y\text{轴对称}\\f(-x,y)=-f(x,y)\end{cases}\Rightarrow\iint\limits_{D_1}x^5y\,dxdy=0.$$

$$\begin{cases}D_2\text{关于}x\text{轴对称}\\f(x,-y)=-f(x,y)\end{cases}\Rightarrow\iint\limits_{D_2}x^5y\,dxdy=0$$

原式 $=-\iint\limits_D dxdy$

$=-S_D$

取 $y=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{x^2}=1$

2. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$，则（ C ）

(A) $f_x(0,0)$ 存在且不为零. (B) $f_x(0,0)$ 不存在.

(C) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值. (D) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极大值.

当 $(x,y)\to(0,0)$ 时. $\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}>0$，即 $f(x,y)>0$ $=f(0,0)$

$x^2+y^2>0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=f(0,0)=0$.

对于 A、B，$f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-\underbrace{f(0,0)}_{=0}}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)}{(\Delta x)^2}\Delta x=0$. （$\to 1$，$\to 0$）

6. 设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$，则 $\iint\limits_D(x^2+2y)\,dx\,dy=$ __________.

$\overline{\text{II}}$ $f(x,y)$

$\begin{cases} D\text{ 关于 }x\text{ 轴对称} \\ f(x,-y)=-f(x,y)\end{cases}\Rightarrow \iint\limits_D 2y\,dx\,dy=0$.

$A=B$

$\Rightarrow A=\frac{1}{2}(A+B)$

原式 $=\iint\limits_D x^2\,dx\,dy=\iint\limits_D y^2\,dy\,dx=\frac{1}{2}\iint\limits_D(x^2+y^2)\,dx\,dy$.

$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3\,dr=\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}$.

15. 求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

$$\begin{cases} f_x'=2x(2+y^2)=0 \\ f_y'=2x^2y+\ln y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{1}{e} \end{cases}$$

$f_{xx}''=2(2+y^2)$, $f_{xy}''=4xy$. $f_{yy}''=2x^2+\frac{1}{y}$

在 $(0,\frac{1}{e})$ 处，$A=2(2+\frac{1}{e^2})$, $B=0$, $C=e$

由于 $AC-B^2>0$, $A>0$, 故 $f(x,y)$ 有极小值 $f(0,\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$.

16. 已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $dz=2xdx-2ydy$,并且 $f(1,1)=2$. 求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1\right\}$ 上的最大值和最小值.

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}=2x \ ✓ \\ \frac{\partial z}{\partial y}=-2y \ ✓ \end{cases}$$

$f(x,y)=x^2+\varphi(y)$

$=-y^2+\psi(x)$

$f(x,y)=x^2-y^2+C$. 由 $f(1,1)=2 \Rightarrow C=2$.

故 $f(x,y)=x^2-y^2+2$.

1° 在 D 内部，由 $\begin{cases} f_x'=2x=0 \\ f_y'=-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ $f(0,0)=\boxed{2}$

2° 在 D 边界 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 上,

1° $z=x^2-4(1-x^2)+2=5x^2-2$ $(-1\le x\le 1)$

$z|_{x=0}=\boxed{-2}$. $z|_{x=\pm1}=\boxed{3}$.

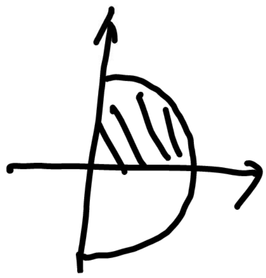
法二：$L(x,y,\lambda)=x^2-y^2+2+\lambda\left(x^2+\frac{y^2}{4}-1\right)$

$$\begin{cases} L_x'=2x+2\lambda x=0 \\ L_y'=-2y+\frac{\lambda}{2}y=0 \\ L_\lambda'=x^2+\frac{y^2}{4}-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\pm 2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=0 \end{cases}$$

故最大值为3，最小值为-2.

18. 设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0\}$，计算二重积分 $I=\iint\limits_D \frac{1+\cancel{xy}}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

记 $f(x,y)=\frac{xy}{1+x^2+y^2}$



$$\begin{cases} D\text{关于}x\text{轴对称} \\ f(x,-y)=-f(x,y) \end{cases} \Rightarrow \iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma=0$$

记 $g(x,y)=\frac{1}{1+x^2+y^2}$ $\quad\begin{cases} D\text{关于}x\text{轴对称} \\ g(x,-y)=g(x,y) \end{cases} \Rightarrow \iint\limits_D g(x,y)\,d\sigma = 2\iint\limits_{D_1} g(x,y)\,d\sigma$

(D_1为D在x轴上方的部分).

原式 $=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 \frac{r}{1+r^2}dr=\cancel{2}\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}}\cdot\left[\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\right]_0^1$

$=\frac{\ln 2}{2}\pi$.