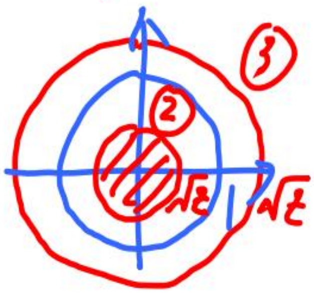
设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}(x^2+y^2), & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求$Z=X^2+Y^2$的概率密度.

23年数一



$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X^2+Y^2\le z\}$$

① $z<0$ $\quad F_Z(z)=0$

② $0\le z<1$ $\quad F_Z(z)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}}\frac{2}{\pi}r^2\cdot r\,dr$

$$=\cancel{2\pi}\cdot\frac{2}{\cancel{\pi}}\cdot\cancel{\frac{1}{4}}z^2=z^2$$

③ $z\ge 1$ $\quad F_Z(z)=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{2}{\pi}(x^2+y^2)\,d\sigma=1$

故 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ z^2, & 0\le z<1\\ 1, & z\ge 1\end{cases}$ $\quad$ 从而 $f_Z(z)=\begin{cases}2z, & 0\le z<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$

后续更新去公众号[有机研]
永久联系微信 4550060

1. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 X 和 Y 的概率分布分别为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则 $P\{X+Y=2\}=($ C $)$

(A) $\frac{1}{12}$.　　(B) $\frac{1}{8}$.　　(C) $\frac{1}{6}$.　　(D) $\frac{1}{2}$.

原式 $=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=2,Y=0\}+P\{X=3,Y=-1\}$

$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

2. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，则(B)

(A) $a=0.2,b=0.3$.　　(B) $a=0.4,b=0.1$.

(C) $a=0.3,b=0.2$.　　(D) $a=0.1,b=0.4$.

$P\{X=0\}=a+0.4$

$P\{X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=a+b$.

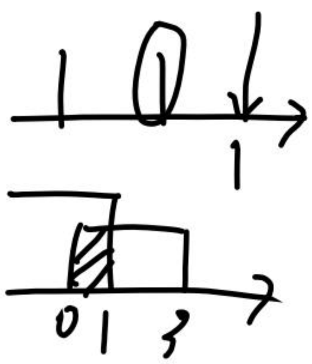
$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}=a$

$$\begin{cases} a=(a+0.4)(a+b) \\ a+b=0.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0.4 \\ b=0.1 \end{cases}$$

4. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布，则 $P\{\max\{X,Y\}\leqslant 1\}=$ ________.

原式 $=P\{X\leq 1,Y\leq 1\}=P\{X\leq 1\}P\{Y\leq 1\}$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$.



后续更新去公众号[有机研]
永久联系微信 4550060

5. 设平面区域 D 由曲线 $y=\frac{1}{x}$ 及直线 $y=0, x=1, x=e^2$ 所围成，二维随机变量(X, Y)在区域 D 上服从均匀分布，则(X,Y)关于 X 的边缘概率密度在 $x=2$ 处的值为 $1/4$.

$$S_D=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}dx=\left[\ln|x|\right]_1^{e^2}=2$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2}dy, & 1<x<e^2\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & 1<x<e^2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

6. 设二维随机变量(X,Y)服从正态分布 $N(1,0;1,1;\boxed{0})$，则 $P\{XY-Y<0\}=$________.

$$原式=P\{(X-1)Y<0\}=P\{X-1<0, Y>0\}+P\{X-1>0, Y<0\}$$

$$=\Phi(0)[1-\Phi(0)]+[1-\Phi(0)]\Phi(0)=\frac{1}{2}.$$

9. 假设随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立，且同分布，$P\{X_i=0\}=0.6, P\{X_i=1\}=0.4 (i=1,2,3,4)$. 求行列式 $X=\begin{vmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{vmatrix}$ 的概率分布.

X_i	0	1
p	0.6	0.4

$$X=X_1X_4-X_2X_3$$

$$P\{X=1\}=P\{X_1=1, X_4=1, X_2=0, X_3=1\}+$$

$$P\{X_1=1, X_4=1, X_3=0, X_2=1\}+P\{X_1=X_4=1, X_2=X_3=0\}$$

$$=0.4\times0.4\times0.6\times0.4+0.4\times0.4\times0.4\times0.6$$

$$+0.4\times0.4\times0.6\times0.6$$

$$=0.16\times(0.24+0.24+0.36)=0.1344.$$

$$P\{X=-1\}=P\{X_2=X_3=1, X_1=0, X_4=1\}+$$

$$P\{X_2=X_3=1, X_4=0, X_1=1\}+P\{X_2=X_3=1, X_1=X_4=0\}$$

$$=0.1344$$

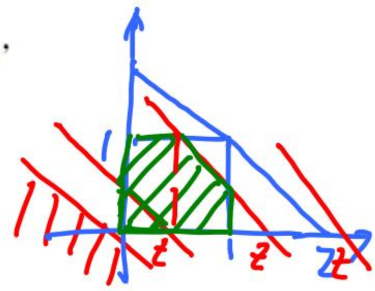
X	-1	0	1
p	0.1344	0.7312	0.1344

后续更新去公众号[有机研]
永久联系微信 4550060

10. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2x, & 0<x<1, 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度.



法一: $F_Z(z)=P\{Z\leq z\}=P\{X+Y\leq z\}$

① $z<0$ $\quad F_Z(z)=0$

② $0\leq z<1$ $\quad F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{z-x}2x\,dy=\int_0^z 2x(z-x)\,dx.$

$$=z\cdot z^2-\frac{2}{3}z^3=\frac{1}{3}z^3$$

③ $1\leq z<2$ $\quad F_Z(z)=\int_0^{z-1}dx\int_0^1 2x\,dy+\int_{z-1}^1 dx\int_0^{z-x}2x\,dy$

$$=(z-1)^2+\int_{z-1}^1 2x(z-x)\,dx$$

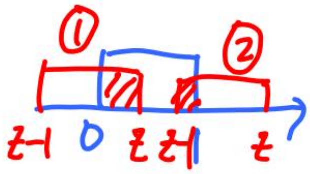
$$=(z-1)^2+z-\underline{z(z-1)^2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}(z-1)^3 \checkmark$$

④ $z\geq 2$ $\quad F_Z(z)=1$

故 $$f_Z(z)=\begin{cases}z^2, & 0\leq z<1\\ 2z-z^2, & 1\leq z<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

法二: $Z=X+Y \Rightarrow Y=Z-X$

$$\begin{cases}0<x<1\\ z-1<x<z\end{cases}$$



$$f(x,z-x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1, 0<z-x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

① $0<z<1$ $\quad f_Z(z)=\int_0^z 2x\,dx=z^2$

② $1\leq z<2$ $\quad f_Z(z)=\int_{z-1}^1 2x\,dx=1-(z-1)^2=2z-z^2$

故 $$f_Z(z)=\begin{cases}z^2, & 0<z<1\\ 2z-z^2, & 1\leq z<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

后续更新去公众号[有机研]
永久联系微信 4550060