1. 设随机变量 X, Y 相互独立，且 $X \sim N(0,2), Y \sim N(-1,1)$. 记 $p_1 = P\{2X > Y\}, p_2 = P\{X - 2Y > 1\}$，则（ B ）

(A) $p_1 > p_2 > \frac{1}{2}$. (B) $p_2 > p_1 > \frac{1}{2}$. (C) $p_1 < p_2 < \frac{1}{2}$. (D) $p_2 < p_1 < \frac{1}{2}$.

$2X-Y \sim N(1,3^2)$ $X-2Y \sim N(2,6)$

24年数三

$$p_1 = P\left\{\frac{2X-Y-1}{3} > -\frac{1}{3}\right\} = 1-\Phi\left(-\frac{1}{3}\right) = \Phi\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$p_2 = P\left\{\frac{X-2Y-2}{\sqrt{6}} > \frac{1-2}{\sqrt{6}}\right\} = 1-\Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

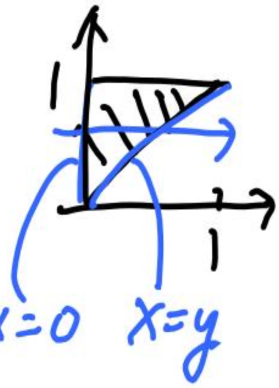
$p_2 > p_1 > \frac{1}{2}$

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 < x < 1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$ 在 $X = x(0 < x < 1)$ 的条件下，随机变量 Y 服从区间 $(x,1)$ 上的均匀分布，则 $\mathrm{Cov}(X,Y) =$（ D ）

(A) $-\frac{1}{36}$. (B) $-\frac{1}{72}$. (C) $\frac{1}{72}$. (D) $\frac{1}{36}$.

24年数一

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x<y<1 \\ 0, & 其他 \end{cases} \quad (0<x<1)$$



$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & 0<x<1,\ x<y<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^y 2\,dx, & 0<y<1 \\ 0, & 其他 \end{cases} = \begin{cases} 2y, & 0<y<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$E(XY) = \int_0^1 dx \int_x^1 2xy\,dy = \int_0^1 x\cdot(1-x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$EX = \int_0^1 x\cdot 2(1-x)\,dx = \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$EY = \int_0^1 y\cdot 2y\,dy = \left[\frac{2}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{36}$$

3 甲、乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球，先从甲盒中任取一球，观察颜色后放入乙盒中，再从乙盒中任取一球.令 X,Y 分别表示从甲盒和从乙盒中取到的红球个数，则 X 与 Y 的相关系数为________.

21年数一、三

2红2白 → 2红2白 →

甲 1个 乙 1个

P16

X\Y	0	1
0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

$$P\{X=0,Y=0\}=\underline{P\{X=0\}}P\{Y=0|X=0\}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$$

$$P\{X=0,Y=1\}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5} \qquad P\{\underline{X=1},Y=0\}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$$

X	0	1
P	1/2	1/2

Y	0	1
P	1/2	1/2

$$EX=EY=E(X^2)=E(Y^2)=\frac{1}{2} \qquad E(XY)=\frac{3}{10}$$

$$Cov(X,Y)=\frac{3}{10}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{20}$$

$$DX=DY=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \qquad \rho_{XY}=\frac{\frac{1}{20}}{\sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{5}.$$

1. 将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 和 Y 的相关系数为(A)

(A) -1. (B) 0. (C) $\frac{1}{2}$. (D) 1.

$$X+Y=n \Rightarrow Y=-X+n$$

2. 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\{X=E(X^2)\}=$______.

$E(X^2)=1+1^2=2$

$P\{X=2\}=\frac{1^2e^{-1}}{2!}=\frac{1}{2}e^{-1}$

3. 设随机变量 X 在区间[0,2]上服从均匀分布，则 $E(X+e^{-2X})=$______.

$EX=\frac{0+2}{2}=1.$

$E(e^{-2X})=\int_0^2 e^{-2x}\cdot\frac{1}{2}dx=-\frac{1}{4}\left[e^{-2x}\right]_0^2=\frac{1}{4}(1-e^{-4})$

故 $=1+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{-4}=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}e^{-4}.$

☆ 4. 某人向同一目标独立重复射击，每次命中目标的概率为 0.5，直到第 2 次命中目标时停止射击. 记 X 为射击次数，则 $EX=$______.

设 X_1 表示从第1次射击到首次命中的射击次数

X_2 …… 首次命中后到第2次命中 ……

$X_1\sim G(0.5)$，$X_2\sim G(0.5)$ $\quad \underline{X=X_1+X_2}.$

$EX=E(X_1+X_2)=EX_1+EX_2=2+2=4.$

5. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且都服从正态分布 $N\left(0,\frac{1}{2}\right)$，则 $D(|X-Y|)=$______.

记 $Z=X-Y$，$Z\sim N(0,1)$

$D(|Z|)=E(Z^2)-[E(|Z|)]^2 \qquad E(Z^2)=DZ+(EZ)^2=1.$

$E(|Z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz$

$=-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{z^2}{2}}\right]_0^{+\infty}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$

故 $=1-\frac{2}{\pi}$ ✓

6. 设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.9，若 $Z=X-0.4$，则 Y 与 Z 的相关系数为________.

$\mathrm{Cov}(Y,Z)=\mathrm{Cov}(Y,X-0.4)=\mathrm{Cov}(Y,X)+\underline{\mathrm{Cov}(Y,-0.4)}=\mathrm{Cov}(X,Y)$

$DZ=D(X-0.4)=DX.$

$\rho_{YZ}=\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=0.9.$

7. 设二维随机变量(X,Y)的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(1) 求 $P\{X=2Y\}$；

(2) 求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$.

(1) $P\{X=2Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}.$

(2) $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)=E[(X-Y)Y]-E(X-Y)EY$

$=E(XY-Y^2)-(EX-EY)EY$

$=\underline{E(XY)}-E(Y^2)-\underline{EX\cdot EY}+(EY)^2$

X	0	1	2
P	1/2	1/3	1/6

Y	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

XY	0	1	2	4
P	7/12	1/3	0	1/12

$E(XY)=1\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$ $\quad EX=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

$EY=\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}=1$ $\quad E(Y^2)=\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

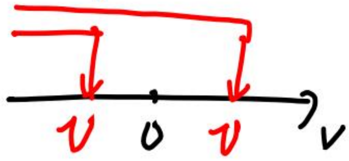
原式 $=\cancel{\frac{2}{3}}-\frac{5}{3}-\cancel{\frac{2}{3}}+1=-\frac{2}{3}.$

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从参数为 1 的指数分布. 记 $U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$.

(1) 求 V 的概率密度 $f_V(v)$；

(2) 求 $E(U+V)$.

$E(UV)=E(XY)=EX\cdot EY$



(1) $f_X(v)=f_Y(v)=\begin{cases} e^{-v}, & v>0 \\ 0, & v\leq 0. \end{cases}$

$$F_X(v)=F_Y(v)=\begin{cases} 0, & v<0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int_{0}^{v} e^{-t}\,dt, & v\geq 0 \end{cases}=\begin{cases} 1-e^{-v}, & v\geq 0 \\ 0, & v<0. \end{cases}$$

$$F_V(v)=1-[1-F_X(v)][1-F_Y(v)]=\begin{cases} 1-e^{-2v}, & v\geq 0. \\ 0, & v<0 \end{cases}$$

$$f_V(v)=\begin{cases} 2e^{-2v}, & v\geq 0 \\ 0, & v<0. \end{cases}$$

(2) $E(U+V)=E(X+Y)=EX+EY=1+1=2$.