

2026 考研数学

高等数学(微积分)基础课程

主讲: 王志超

周二、四、六(可能调整) 19:00-21:00

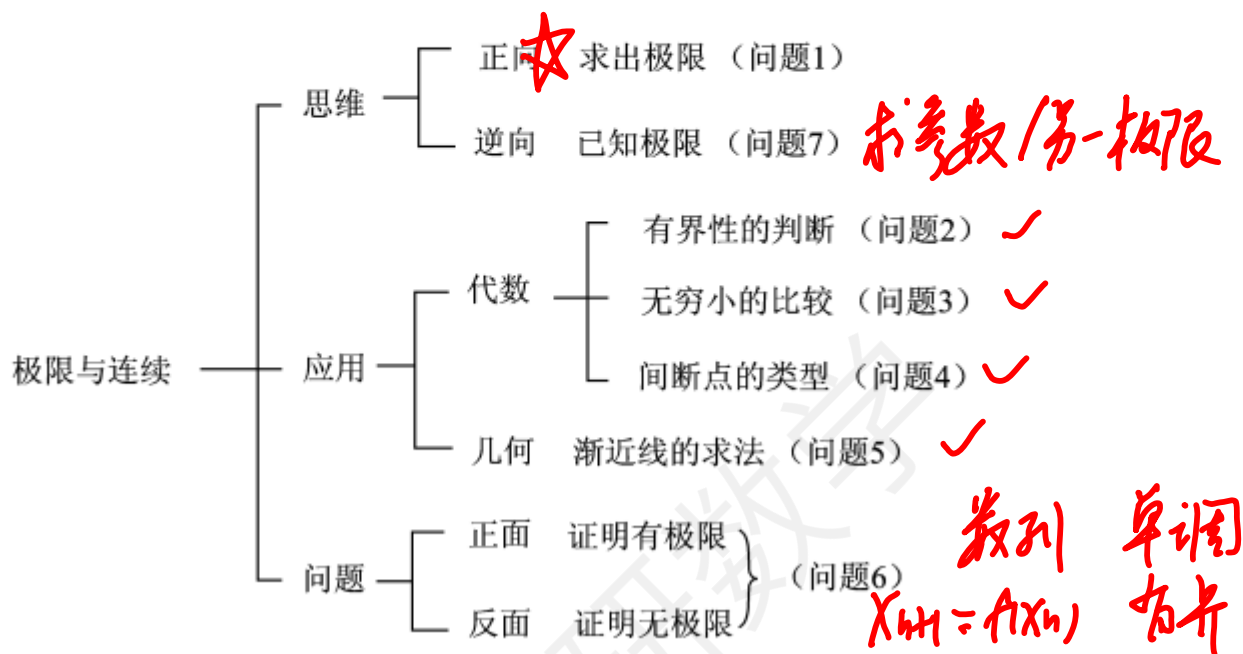
课前提醒

1. 务必听一次课, 做一次作业、订正一次作业, 切莫听了好几节课作业落下好多, 或者前面的错题不订正, 想着后面一起补
2. 务必完整地学完一轮再学下一轮, 一般不建议两轮同步进行, 切莫在前面的章节卡太久(有问题及时来问我, 不要不好意思, 不必觉得自己的问题低级), 每轮越靠后的章节越重要
3. 务必每道题独立算出最后结果, 切莫看得懂、有思路、感觉会做就轻易放过自己, 数学对细节的要求极其苛刻, 不能急躁不可敷衍, 要能耐下性子
4. 务必注重知识体系和方法体系的搭建, 切莫拿到题埋头就做, 这属于哪类题、为什么想到这么去做、有没有更好的方法、做的过程中需要注意什么(哪里容易出错)是听课的重点, 以及做题中不断思考的

数学一、三	高等数学	选择 1-4 (20 分)	填空 11-14 (20 分)	解答 17-20 (46 分)	共 86 分 约占 60%
	线性代数	选择 5-7 (15 分)	填空 15 (5 分)	解答 21 (12 分)	共 32 分 约占 20%
	概率论与数理统计	选择 8-10 (15 分)	填空 16 (5 分)	解答 22 (12 分)	共 32 分 约占 20%
数学二	高等数学	选择 1-7 (35 分)	填空 11-15 (25 分)	解答 17-21 (58 分)	共 118 分 约占 80%
	线性代数	选择 8-10 (15 分)	填空 16 (5 分)	解答 22 (12 分)	共 32 分 约占 20%

第一章 极限与连续

问题脉络



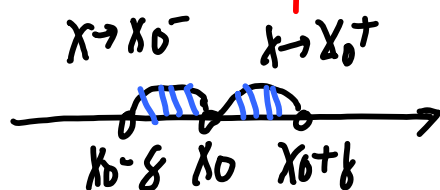
知识准备

1. 函数极限的概念

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} f(x) = A$$

$$\Leftrightarrow \text{当 } \boxed{x \rightarrow \cdot} \text{ 时, } \boxed{f(x) \rightarrow A}.$$

1) $x \rightarrow \cdot$ 的含义 (6种)



$$x \rightarrow x_0$$



$$\exists \delta > 0, \text{ 使 } x_0 - \delta < x < x_0 \checkmark$$

$$x_0 < x < x_0 + \delta \checkmark$$

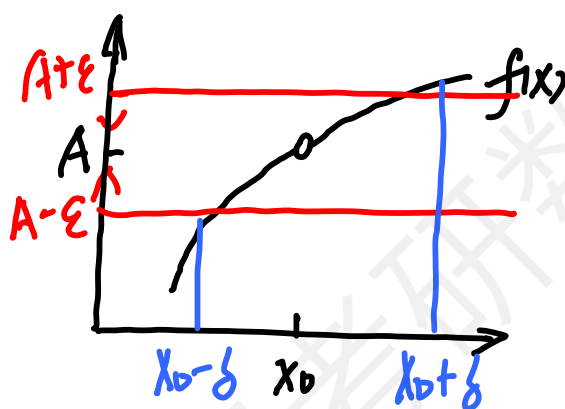
$$\underline{0 < |x - x_0| < \delta} \checkmark$$

$\star \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$
 $(x \rightarrow \infty)$

$\exists X > 0, \text{ 使 } x > X \quad \checkmark$
 $\text{或 } x < -X \quad \checkmark$

$|x| > X$

(2) $f(x) \rightarrow A$ 的含义



$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 使 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, } A - \epsilon < f(x) < A + \epsilon$
 $(x > 0) \quad (|x| > X) \quad (|f(x) - A| < \epsilon)$

$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$
 $(x \rightarrow \infty)$

2. 连续性的概念

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处连续}$

$f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \text{ 在 } (a, b) \text{ 内连续} \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \text{右连续} \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b) \quad \text{左连续} \end{cases}$

一. 求极限

1. 初等函数

(代入) $\rightarrow$ "型"

①

由常数和基本初等函数(即幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数)经有限次四则运算或有限次复合构成的用一个式子表示的函数叫做初等函数。

②

$\rightarrow$ 不务段

无省略号

一切初等函数在其定义区间内连续。

1) 呈已定型

① 常数型

【例 1】 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x)}{\arcsin(\tan x)} = \frac{\ln \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{2}}$ ✓

② "非0常数"型 $\frac{0}{0}$ (∞)

" $\frac{1}{0} \rightarrow \infty$ "
" $\frac{1}{\infty} \rightarrow 0$ "

【例 2】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x-1} = \infty$

③ "0.有界"型 $\frac{0}{0}$

析

【例 3】 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cos(\ln x) = 0$

$\downarrow$
 $-\infty$



Q. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

Q. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

" $\frac{0}{0}$ "

(2) 不定型 (7种)

$$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{\infty}{\infty} & 0 \cdot \infty & \frac{\infty}{0} \\ \frac{0}{0} & \infty - \infty & \frac{0}{\infty} \end{array} \right.$$

洛必达法则:

$$|x \rightarrow 0|$$



设:

① $\lim f(x) = \lim F(x) = 0$ ($\frac{0}{0}$ 型) 或 $\lim f(x) = \lim F(x) = \infty$ ($\frac{\infty}{\infty}$ 型);

② $f(x), F(x)$ 在自变量趋向的附近可导, 且 $F'(x) \neq 0$;

③ $\lim \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为 ∞), 则

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} = \lim \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

日亡日亡

日亡不日亡

不日亡不日亡

如 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \frac{0}{0}$ 用洛必达法则: $\lim_{x \rightarrow 0} [2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x^2})]$ 不日亡

" $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ ✓

① $\frac{\infty}{\infty}$ 型 优先: 同除法 保底: 洛

【例 5】(1997 年考研题) 求极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{\sin x}{x^2}}}$$

$$\sqrt{x^2} = |x| = -x$$

$$= \frac{\sqrt{4+0-0} - 1 + 0}{\sqrt{1+0}} = 1$$

② $\frac{0}{0}$ 型

(加)减)替换!

核心: 等价替换

- 直接换 (85) 独立/乘除可以换
- 变形换 $e^a - e^b, \ln(\omega x), \alpha^b - 1$
- 泰勒换 不能直接换的 加)减)形式 整体换

辅助: 约分、有理化、极限运算法则、换元、洛

当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$ $\tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3$ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

① $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3); \sim x$

② $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3); \sim x$

③ $\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3); \sim x$

④ $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3); \sim x$

⑤ $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ $e^x - 1 \sim x$ ⑥ $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3); \sim x$

⑦ $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4);$ ⑧ $(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2}x^2 + o(x^2).$

$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

$(1+x)^{\mu-1} \sim \mu x$

如 $\ln(1+x) - x \sim \underline{-\frac{1}{2}x^2}$

$\tan x - \sin x \sim \underline{\frac{1}{2}x^3}$

$\ln(1+x) - \sin x \sim \underline{-\frac{1}{2}x^2}$

$2x(\sin x + \cos x - 1) \sim \underline{\frac{1}{3}x^4}$
 $\sim -\frac{1}{2}(2x)^2$

$\ln(1+x) - \sin x$
 $= \underline{-\frac{1}{2}x^2} + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$

$2x \sin x = 2x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$

$\cos(2x) - 1 = -\frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{4!}(2x)^4 + o(x^4)$
 $= -2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$

$2x \sin x + \cos 2x - 1 = \underline{\frac{1}{3}x^4} + o(x^4)$

【例 11】 (1997 年考研题) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{x}$

$= \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} \right) = \frac{3}{2}$

证: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^3} - \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3}$

若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则:

① $\lim [k_1 f(x) \pm k_2 g(x)] = k_1 A \pm k_2 B$;

② $\lim [f(x) \cdot g(x)] = AB$;

③ $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

X: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$

X: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \cos x \cdot \sin x}{x^3} = \frac{2}{3}$

证: $x - \cos x \sin x = x - \left[x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right] \left[1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right]$
 $= x - \left[x - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right] = \frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \sim \frac{2}{3}x^3$

证: 解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{2}\sin 2x}{x^3} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x}{x^3} = \frac{2}{3}$

【例 10】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{\tan(\sin^3 x)}$

$e^{\tan x} - e^{\sin x} \sim e^0 (\tan x - \sin x)$

$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$ ($\alpha(x) \rightarrow 0$)

$\tan(\sin^3 x) \sim \sin^3 x \sim x^3$

法一: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} (e^{\tan x - \sin x} - 1)}{x^3}$

$\stackrel{=1}{=} \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x - \sin x} - 1}{x^3} = \frac{1}{2}$

$\sim \frac{1}{2} x^3$

法二: 拉格朗日中值定理:

$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a) \quad (a < \xi < b)$

$e^{\tan x} - e^{\sin x} \stackrel{L}{=} e^{\xi} (\tan x - \sin x)$

(ξ 介于 $\tan x$ 与 $\sin x$ 之间)

原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\xi} (\tan x - \sin x)}{x^3}$

$\stackrel{=1}{=} \lim_{x \rightarrow 0} e^{\xi} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$

$\stackrel{=1/2}{=}$

★ $e^{\alpha} - e^{\beta} \sim e^{\eta} (\alpha - \beta) \quad (\alpha - \beta \rightarrow 0, \beta \rightarrow a)$



【例 13】 (1992 年考研题) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi}{2} x}$.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t.$$

解: $\frac{1}{2}x-1=t$ $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \cos t}{1 - \sin \frac{\pi}{2}(t+1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \cos t}{1 - \cos \frac{\pi}{2}t}$

$$\ln \cos t = \ln(1 + \cos t - 1) \sim \cos t - 1 \sim -\frac{1}{2}t^2 \quad (t \rightarrow 0)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}t^2}{\frac{1}{2}t^2} = -\frac{4}{\pi^2}.$$

$$\boxed{\ln(1+d(x)) \sim d(x)} \quad (d(x) \rightarrow 0)$$

★ $\ln x \sim x-1 \quad (x \rightarrow 1)$

$$\boxed{\ln \cos t \sim -\frac{1}{2}t^2} \quad (t \rightarrow 0)$$

$$(15-1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = -\frac{1}{2} \checkmark$$

【例 14】 (1999 年考研题) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2}$.

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x})(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})}{[x \ln(1+x) - x^2](\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})} \rightarrow 2$$

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x \ln(1+x) - x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\ln(1+x) - x} = -\frac{1}{2} \checkmark$$

"无房子+无房子"