【例 33】 （1995 年考研题）设 $f'(\ln x)=1+x$，则 $f(x)=$____________.

法一：$\int f'(\ln x)\,d(\ln x)=\int(1+x)\,d(\ln x)$

$$f(\ln x)=\int\frac{1+x}{x}dx=x+\ln|x|+C$$

令 $\ln x=t$，则 $x=e^t$，$f(\cancel{x})=e^{\cancel{x}}+\cancel{x}+C$

法二：令 $\ln x=t$，则 $x=e^t$，$f'(t)=1+e^t$　　$f(x)=x+e^x+C$

【例 34】 设 $\frac{\ln x}{x}$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf'(x)dx=$____________.

$\int f(x)dx=\frac{\ln x}{x}+C \Rightarrow f(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{1-\ln x}{x^2}$

原式 $=\int x\,d[f(x)]=xf(x)-\int f(x)\,dx$　　$\int uv'dx=uv-\int u'v\,dx$

$=\frac{1-2\ln x}{x}+C$.

五. 定积分与抽象函数的相互变形

【例 35】 已知 $f''(x)$ 在[0,1]上连续，且 $f(0)=1, f(2)=3, f'(2)=5$，则 $\int_0^1 xf''(2x)dx=$

____________.

$[f'(2x)]'=f''(2x)\cdot 2$

原式 $=\frac{1}{2}\int_0^1 x\,d[f'(2x)]$

$=\frac{1}{2}[xf'(2x)]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(2x)\,dx$

$=\frac{1}{2}f'(2)-\frac{1}{4}[f(2x)]_0^1$

$=\frac{1}{2}f'(2)-\frac{1}{4}f(2)+\frac{1}{4}f(0)=\frac{5}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=2$. ✓

【例 36】 设 $f(x)=x^2-x\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，则 $f(x)=$ ________.

常数

设 $\int_0^2 f(x)dx=a$，$\int_0^1 f(x)dx=b$，则

$$f(x)=x^2-ax+2b.$$

$$\begin{cases} a=\int_0^2 (x^2-ax+2b)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}ax^2+2bx\right]_0^2=\frac{8}{3}-2a+4b \\ b=\int_0^1 (x^2-ax+2b)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}ax^2+2bx\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+2b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=\frac{4}{3} \\ b=\frac{1}{3} \end{cases}$$ 故 $f(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$. #

六. 证明积分等式

核心方法：换元积分法 $\begin{cases} \text{改变被积函数形式} \\ \text{改变积分限} \end{cases}$

辅助工具：可加性

$f(x+\pi)=f(x)$

【例 37】（2004 年考研题）设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t$，证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的函数.

$$f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3}{2}\pi}|\sin t|dt \xlongequal{\text{令}u=t-\pi} \int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(u+\pi)|du$$

$$=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt=f(x).$$

☆ 设 $F'(x)=f(x)$

① $F(x+T)=F(x) \Rightarrow f(x+T)=f(x)$ 反例: $F(x)=\sin x+x$

② $F(x)$ 偶 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 奇

③ $F(x)$ 奇 $\Rightarrow$ $f(x)$ 偶 反例: $F(x)=x^3+1$, $f(x)=3x^2$

$f(x)$ 偶 $\Rightarrow F(x)=\int_{\boxed{0}}^{x} f(t)dt$ 奇

【例 38】 已知 $f(x)$ 为连续的奇函数，试判断函数 $F(x)=\int_{\boxed{a}}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 的奇偶性.

" $\int f(x)dx+C$

$$F(-x)=\int_{a}^{-x} f(t)dt \overset{令u=-t}{=\!=\!=} \int_{-a}^{x} f(-u)du$$

$$=\int_{\boxed{-a}}^{x} f(t)dt=\int_{a}^{x} f(t)dt+\cancel{\int_{-a}^{\boxed{a}} f(t)dt}=F(x)$$

奇

故 $F(x)$ 为偶函数.

(17-1) 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，则 $f^{(3)}(0)=$ $\underline{\quad 0 \quad}$

诗二: $f(x)=1-x^2+x^4+\cdots$

$a_3=0$.

$f(x)$ 偶 $\Rightarrow f'(x)$ 奇 $\Rightarrow f''(x)$ 偶 $\Rightarrow f'''(x)$ 奇

$f'''(0)=a_3\cdot 3!=0$

☆ $f(x)$ 偶 $\Rightarrow f^{(2k+1)}(0)=0$.

$f(x)$ 奇 $\Rightarrow f^{(2k)}(0)=0$.

偶

(22-3) 已知函数 $f(x)=e^{\sin x}+e^{-\sin x}$，则 $f'''(2\pi)=$ ___0___.

$$f(x+2\pi)=f(x)\Rightarrow f'''(x+2\pi)=f'''(x)$$

$$f'''(2\pi)=f'''(0)$$

(24-2) 已知函数 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t^3\mathrm{d}t$，$g(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则（ D ）

(A) $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是奇函数.
(B) $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数.
(C) $f(x)$ 是偶函数，$g(x)$ 是偶函数.
(D) $f(x)$ 是偶函数，$g(x)$ 是奇函数.

$$f'(x)=\sin(\sin^3 x)\cdot\cos x \text{ 奇} \Rightarrow f(x)\text{偶}$$

奇　　　　偶

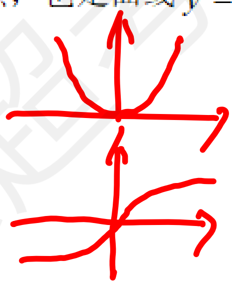
(25-1,2,3) 已知函数 $f(x)=\int_0^x e^{t^2}\sin t\,\mathrm{d}t$，$g(x)=\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\cdot\sin^2 x$，则（ B ）　5

奇　偶

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，也是 $g(x)$ 的极值点.
(B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=g(x)$ 的拐点.
(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.
(D) $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，也是曲线 $y=g(x)$ 的拐点.

$f(x)$偶

$g(x)$奇



【例 40】 (1995 年考研题)设 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $[-a,a]$ $(a>0)$ 上连续，$g(x)$ 为偶函数，且 $f(x)$ 满足条件 $f(x)+f(-x)=A$ (A 为常数).

(1) 证明 $\int_{-a}^{a}f(x)g(x)\mathrm{d}x=A\int_0^a g(x)\mathrm{d}x$；

(2) 利用(1)的结论计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan e^x\mathrm{d}x$.

$A=B$

$\Rightarrow A=\frac{1}{2}(A+B)$

(1) 左 $\xlongequal{令t=-x}$ $\int_{-a}^{a}f(-t)g(-t)dt=\int_{-a}^{a}f(-x)g(x)dx$

$=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}Ag(x)dx=\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{2}\int_0^a Ag(x)dx=$ 右

(2) 记 $a=\frac{\pi}{2}$，$g(x)=|\sin x|$，$f(x)=\arctan e^x$.

$g(x)$ 为偶函数

$$[f(x)+f(-x)]'=(\arctan e^x)'+(\arctan e^{-x})'$$

$$=\frac{e^x}{1+e^{2x}}+\frac{-e^x}{e^{2x}+1}=0$$

设 $F(x)=C$

$\Rightarrow F'(x)=0.$

设 $f(x)+f(-x)=A$. 令 $x=0$, $A=2f(0)=\frac{\pi}{2}$.

故原式 $=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}$ ✓

七. 证明积分不等式

1. 用一元微分学的方法

【例 42】 (2005 年考研题)设 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的导数连续,且 $f(0)=0$, $f'(x)\geqslant 0$, $g'(x)\geqslant 0$. 证明:对任何 $a\in[0,1]$, 有 $\int_0^a g(x)f'(x)dx+\int_0^1 f(x)g'(x)dx\geqslant f(a)g(1)$.

设 $F(a)=\int_0^a g(x)f'(x)dx+\underbrace{\int_0^1 f(x)g'(x)dx}_{\text{常数}}-f(a)g(1).\ (0\leq a\leq 1)$

$$F'(a)=g(a)f'(a)-f'(a)g(1)$$

$$=\underbrace{f'(a)}_{\geq 0}\underbrace{[g(a)-g(1)]}_{\leq 0}$$

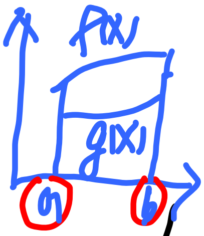
由 $g'(x)\geq 0\Rightarrow g(x)\nearrow\Rightarrow g(a)\leq g(1)$, 从而 $F'(a)\leq 0\Rightarrow F(x)\downarrow$

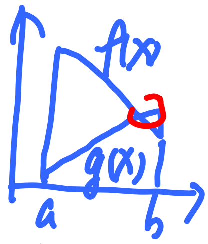
$$\Rightarrow F(a)\geq F(1)=\int_{\boxed{0}}^{\boxed{1}} \underline{g(x)f'(x)}dx+\int_{\boxed{0}}^{\boxed{1}} \underline{f(x)g'(x)}dx-f(1)g(1)$$

$$=\int_0^1[f(x)g(x)]'dx-f(1)g(1)$$

$$=[f(x)g(x)]_0^1-f(1)g(1)=0.$$

2. 用一元积分学的方法





法一：在 $[a,b]$ 上 $f(x)\geq g(x)$ $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$ $(a<b)$

$\cancel{\Leftarrow}$

$(\geq 且 \not\equiv)$ $\quad (>)$

法二：$-|f(x)|\leq f(x)\leq |f(x)| \Rightarrow \underbrace{-\int_a^b |f(x)|\,dx}_{-B} \leq \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{A} \leq \underbrace{\int_a^b |f(x)|\,dx}_{B}$

$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$ $(a<b)$

法三：$f(x)\nearrow \Rightarrow f(a)\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \overset{积中}{=\!=} f(\xi)\leq f(b)$ $(a\leq\xi\leq b)$

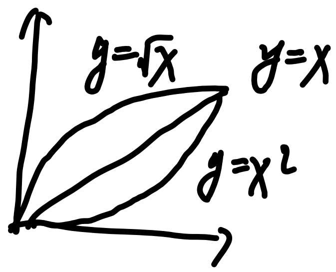
$\Rightarrow (b-a)f(a)\leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)f(b)$ $(a<b)$

【例 43】 设 $I=\int_0^1 \sin x^2\,dx$，$J=\int_0^1 \sin x\,dx$，$K=\int_0^1 \sin\sqrt{x}\,dx$，则 I,J,K 的大小关系是 (A)

(A) $I<J<K$. (B) $I<K<J$. (C) $J<I<K$. (D) $K<J<I$.

$\sin x$ 在 $[0,1]$ 上 $\nearrow$

$\sqrt{x}\geq x\geq x^2$ $(0\leq x\leq 1)$



【例 45】 (1993 年考研题)设 $f'(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，且 $f(0)=0$. 证明：

$$\left|\int_0^a f(x)\,dx\right|\leq \frac{Ma^2}{2},\quad 其中\quad M=\max_{0\leq x\leq a}|f'(x)|.$$

$f \xrightarrow[分部]{拉} f'$

法一：$f(x)=f(x)-f(0)\overset{拉}{=\!=}xf'(\xi)$ (ξ 介于 0 与 x 之间)

$\left|\int_0^a f(x)\,dx\right| = \left|\int_0^a x f'(\xi)\,dx\right| \leq \int_0^a x\underbrace{|f'(\xi)|}_{\leq M}\,dx$

$\leq \int_0^a Mx\,dx = \frac{M}{2}a^2.$

证二: $\left|\int_0^a f(x)\,dx\right| = \left|\int_0^a f(x)\,d(x-a)\right|$

$$= \left|\cancel{[(x-a)f(x)]_0^a} - \int_0^a (x-a)f'(x)\,dx\right|$$

$$\le \int_0^a (a-x)\underbrace{|f'(x)|}_{\le M}\,dx \le \int_0^a (a-x)M\,dx$$

$$= M\left[ax - \frac{1}{2}x^2\right]_0^a = \frac{M}{2}a^2. \quad \#$$

【例 47】 设 $0<a\leqslant b$, 连续函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少, 证明 $b\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geqslant a\int_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

证一: $$\underbrace{\frac{\int_0^a f(x)\,dx}{a}}_{F(a)} \ge \underbrace{\frac{\int_0^b f(x)\,dx}{b}}_{F(b)}$$

记 $F(x) = \dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}$ $(a \le x \le b)$

$$F'(x) = \frac{x f(x) - \boxed{\int_0^x f(t)\,dt}}{x^2} \xlongequal{积中} \frac{x f(x) - x f(\xi)}{x^2} \quad (0 \le \xi \le x)$$

$$= \frac{f(x) - f(\xi)}{x}$$

由 $f(x)\downarrow \Rightarrow f(x) \le f(\xi) \Rightarrow F'(x) \le 0 \Rightarrow F(x)\downarrow \Rightarrow F(a) \ge F(b)$.

法二: 做"変性"手术: $b \to x$

$$x\int_0^a f(t)\,dt \ge a\int_0^x f(t)\,dt$$

142

记 $G(x)=x\int_0^a f(t)dt-a\int_0^x f(t)dt \quad (x\geq a)$

$G'(x)=\int_0^a f(t)dt-af(x)$

$\xlongequal{积中} a[f(\xi)-f(x)] \quad (0\leq\xi\leq a)$

由 $f(x)\downarrow \Rightarrow f(\xi)\geq f(x)\Rightarrow G'(x)\geq 0\Rightarrow G(x)\uparrow$

$\Rightarrow G(x)\geq G(a)=0.$

令 $x=b$，则原不等式得证. #

强化班课讲：

定积分的物理应用（仅数一、二）

一 变力沿直线做功．抽水做功．水压力．

引力．质心．形心．变速直线运动