(3) 特殊的二阶常系数非齐次线性方程

$$y''+py'+qy=f(x)\ (p,q\text{为常数})$$

若 y^* 为非齐次线性方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的一个特解，Y 是该方程对应的齐次线性方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的通解，则 $y=Y+y^*$ 就是该方程的通解.

1) $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$　　① $m=?$　② $\lambda=?$ → 乘 x^k ?

λ 与特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的关系	特解 y^* 的设法　待定 $m+1$ 个系数
λ 不是 $r^2+pr+q=0$ 的根	设 $y^*=e^{\lambda x}(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)$
λ 是 $r^2+pr+q=0$ 的单根	设 $y^*=xe^{\lambda x}(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)$
λ 是 $r^2+pr+q=0$ 的重根	设 $y^*=x^2e^{\lambda x}(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)$

2) $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+Q_n(x)\sin\omega x]$　　① $l=?,\ n=?$ → $m=?$　② $\lambda=?,\ \omega=?$ → 乘 x^k ?

$\lambda+i\omega$ 与特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的关系	特解 y^* 的设法（$m=\max\{l,n\}$）　待定 $2m+2$ 个系数
$\lambda+i\omega$ 不是 $r^2+pr+q=0$ 的根	设 $y^*=e^{\lambda x}[(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)\cos\omega x+(c_0+c_1x+\cdots+c_mx^m)\sin\omega x]$
$\lambda+i\omega$ 是 $r^2+pr+q=0$ 的根	设 $y^*=xe^{\lambda x}[(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)\cos\omega x+(c_0+c_1x+\cdots+c_mx^m)\sin\omega x]$

$D^2y^*+pDy^*+qy^*=f(x)$　　$(D^2+pD+q)y^*=f(x)$

* 用微分算子法求 $y''+py'+qy=f(x)$ 的特解 y^*:

D—求导，$\frac{1}{D}$—积分，D^2—求导2次. $\frac{1}{D^2}$—积分2次

$$\boxed{y^*=\frac{1}{D^2+pD+q}f(x)}\ ✓$$

基本原则: ① 先代 D; ② 代不进去(分母为0)提 x 求导

1° $f(x)=Ae^{\lambda x}$ —用 λ 代 D

如 $y''+y'-2y=e^{x}$　　$\lambda=1$

$$y^{*}=\frac{1}{D^{2}+D-2}e^{x}=x\,\frac{1}{2D+1}e^{x}=\frac{1}{3}xe^{x}\ \checkmark$$

★ 记 $g(r)=r^{2}+pr+q$，则

$$y^{*}=\begin{cases}\dfrac{1}{g(\lambda)}f(x), & g(\lambda)\neq 0\\[2mm] x\,\dfrac{1}{g'(\lambda)}f(x), & g(\lambda)=0,\ g'(\lambda)\neq 0\\[2mm] x^{2}\,\dfrac{1}{g''(\lambda)}f(x), & g(\lambda)=g'(\lambda)=0\end{cases}$$

2° $f(x)=A\sin\omega x$ 或 $A\cos\omega x$ —用 $-\omega^{2}$ 代 $\boxed{D^{2}}$

如 $y''+y'=5\cos 3x$　　$-\omega^{2}=-9$

$$y^{*}=\frac{1}{D^{2}+D}5\cos 3x=\frac{1}{D-9}5\cos 3x=\frac{D+9}{D^{2}-81}5\cos 3x$$

$$=\frac{D+9}{-90}5\cos 3x=-\frac{1}{90}(-15\sin 3x+45\cos 3x)$$

$$=\frac{1}{6}\sin 3x-\frac{1}{2}\cos 3x\ \checkmark$$

★
$$y^{*}=\begin{cases}\dfrac{1}{q-\omega^{2}}f(x), & p=0,\ q-\omega^{2}\neq 0\\[2mm] \dfrac{x}{2}\int f(x)dx, & p=0,\ q-\omega^{2}=0\\[2mm] \dfrac{1}{p}\int f(x)dx, & p\neq 0,\ q-\omega^{2}=0\\[2mm] \dfrac{pf'(x)-(q-\omega^{2})f(x)}{-p^{2}\omega^{2}-(q-\omega^{2})^{2}}, & p\neq 0,\ q-\omega^{2}\neq 0.\end{cases}$$

5° $f(x)=ax^2+bx+c$ —— $\dfrac{1}{1+u}=1-u+u^2+\cdots$

(含D的和式

例 $y''+y'=2x+1$

$$y^*=\frac{1}{D^2+D}(2x+1)=\frac{1}{D}\,\frac{1}{1+D}(2x+1)=\frac{1}{D}(1-D)(2x+1)$$

$$=\frac{1}{D}(2x+1-2)=x^2-x \quad ✓$$

☆ $$y^*=\begin{cases}\dfrac{1}{q^3}\left[(p^2-q)f''(x)-pqf'(x)+q^2f(x)\right], & q\neq0,\ p\in R,\\[2mm] \dfrac{1}{p}\displaystyle\int\left[f(x)-\frac{1}{p}f'(x)+\frac{1}{p^2}f''(x)\right]dx, & q=0,\ p\neq0,\\[2mm] \displaystyle\int\left[\int f(x)dx\right]dx, & p=q=0.\end{cases}$$

4° $f(x)=e^{\lambda x}u(x)$ $\qquad y^*=\dfrac{1}{g(D)}e^{\lambda x}u(x)$

记 $g(r)=r^2+pr+q$，则 $y^*=e^{\lambda x}\dfrac{1}{g(D+\lambda)}u(x)$ ✓

例 $y''-3y'=4xe^x$ $\qquad \lambda=1$

$$y^*=\frac{1}{D^2-3D}4xe^x=e^x\frac{1}{(D+1)^2-3(D+1)}4x=e^x\frac{1}{D^2-D-2}4x$$

$$=-\frac{1}{2}e^x\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}D-\frac{1}{2}D^2\right)}4x=-\frac{1}{2}e^x\left(1-\frac{1}{2}D+\cancel{\frac{1}{2}D^2}\right)4x \quad ✓$$

$$=-\frac{1}{2}e^x\left(4x-\frac{1}{2}\cdot4\right)=(1-2x)e^x \quad ✓$$

#

【例 13】 设有微分方程 $y''-3y'=\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)=\begin{cases}4xe^x, & x<1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$ 试求在 $(-\infty,+\infty)$ 内的可导函数 $y=f(x)$，使之在 $(-\infty,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内都满足所给方程，且满足条件 $f(0)=f'(0)=0$.

由 $r^2-3r=0 \Rightarrow r_1=0, r_2=3$

$$f(x)=\begin{cases} C_1+C_2e^{3x}, & x>1 \\ C_3+C_4e^{3x}+(1-2x)e^x, & x<1 \end{cases}$$

当 $x<1$, $f'(x)=3C_4e^{3x}-2e^x+(1-2x)e^x$

$$\begin{cases} C_3+C_4+1=0 \\ 3C_4-2+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3=-\frac{4}{3} \\ C_4=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$f(1^+)=C_1+C_2e^3$, $f(1^-)=-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}e^3-e$

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to1^-}[e^{3x}-2e^x+(1-2x)e^x]=e^3-3e$

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to1^+}3C_2e^{3x}=3C_2e^3$

$$\begin{cases} f(1^+)=f(1^-) \\ f'_+(1)=f'_-(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1+C_2e^3=-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}e^3-e \\ 3C_2e^3=e^3-3e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=-\frac{4}{3} \\ C_2=\frac{1}{3}-e^{-2} \end{cases}$$

故 $$f(x)=\begin{cases} -\frac{4}{3}+(\frac{1}{3}-e^{-2})e^{3x}, & x\geq 1, \\ -\frac{4}{3}+\frac{1}{3}e^{3x}+(1-2x)e^x, & x<1. \end{cases}$$

若 y_1^* 和 y_2^* 分别为 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$ 和 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$ 的特解，则 $y_1^*+y_2^*$ 是 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$ 的特解.

$2x+1+5\cos 3x$

【例 15】 求微分方程 $y''+y'=2x+5\cos 3x+1$ 的通解.

由 $r^2+r=0 \Rightarrow r_1=0,\ r_2=-1$ $\quad Y=C_1+C_2e^{-x}$

对于 $y''+y'=2x+1$，$y_1^*=x(Ax+B)$ $\quad$ ① $m=1$ ② $\lambda=0$

对于 $y''+y'=5\cos 3x$，$y_2^*=C\cos 3x+D\sin 3x$ $\quad$ ① $l=0,\ n=0\to m=0$ ② $\lambda=0,\ \omega=3$

$y^*=y_1^*+y_2^*=x(Ax+B)+C\cos 3x+D\sin 3x$

$y=C_1+C_2e^{-x}+x^2-x+\frac{1}{6}\sin 3x-\frac{1}{2}\cos 3x$

(4) 欧拉方程(仅数一)

$$x^2y''+pxy'+qy=f(x)\quad (x>0,\ p,q\text{为常数})$$

令 $x=e^t$，则 $t=\ln x$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\quad ✓ \qquad \frac{1}{\frac{dt}{dx}}=x$$

$$y''=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\boxed{\frac{dx}{dt}}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$-\frac{dy}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}+p\frac{dy}{dt}+qy=f(e^t)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2}+(p-1)\frac{dy}{dt}+qy=f(e^t).\quad ✓$$

(24-2-局部) 设函数 $y(x)$ 为微分方程 $x^2y''+xy'-9y=0$ 满足条件 $y|_{x=1}=2, y'|_{x=1}=6$ 的解.

利用变换 $x=e^t$ 将上述方程化为常系数线性微分方程，并求 $y(x)$.

$$\frac{d^2y}{dt^2}-9y=0$$

由 $r^2-9=0 \Rightarrow r_1=3,\ r_2=-3.$

$$y=C_1e^{3t}+C_2e^{-3t}=C_1x^3+\frac{C_2}{x^3}.$$

$$y'=3C_1x^2-\frac{3C_2}{x^4}$$

$$\begin{cases}C_1+C_2=2\\3C_1-3C_2=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=2\\C_2=0\end{cases}\quad 故\ y(x)=2x^3\ ✓$$

二.已知常微分方程解的相关问题

1.已知解求方程

【例 16】 设 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3xe^x$($C_1,C_2,C_3$ 为任意常数)为某三阶常系数齐次线性方程的通解,则该方程为 $y'''-y''-y'+y=0$ ✓

$$y=(C_1+C_3x)e^x+C_2e^{-x}$$

$$(r-1)^2(r+1)=0 \Rightarrow r^3-r^2-r+1=0$$

【例 17】 设微分方程 $y''+ay=b\cos 2x$ 的一个特解为 $y=\cos 2x+(x+1)\sin 2x$,则(D)

(A) $a=2,b=2$.　　(B) $a=2,b=4$.

(C) $a=4,b=2$.　　(D) $a=4,b=4$.

$$y=\underbrace{C_1\cos 2x+C_2\sin 2x}_{Y}+\underbrace{x\sin 2x}_{y^*}$$

由 $r^2+a=0$ 的根为 $\pm 2i \Rightarrow a=4$

把 $y^*=x\sin 2x$ 代入 $y''+4y=b\cos 2x$,得 $b=4$.

2.已知特解求通解

【例 19】 (1989 年考研题)设线性无关的函数 y_1,y_2,y_3 都是二阶非齐次线性方程的解,C_1,C_2 是任意常数,则该非齐次线性方程的通解是(D)

(A) $C_1y_1+C_2y_2+y_3$.　　(B) $C_1y_1+C_2y_2+(C_1+C_2)y_3$.

(C) $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$.　　(D) $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$.

设原方程为 $y''+p(x)y'+Q(x)y=f(x)$.

$$\begin{cases} y_1''+p(x)y_1'+Q(x)y_1=f(x). & ① \\ y_2''+p(x)y_2'+Q(x)y_2=f(x). & ② \\ y_3''+p(x)y_3'+Q(x)y_3=f(x). & ③ \end{cases}$$

①−③: $(y_1-y_3)''+p(x)(y_1-y_3)'+q(x)(y_1-y_3)=0$

②−③: $(y_2-y_3)''+p(x)(y_2-y_3)'+q(x)(y_2-y_3)=0$

$\Rightarrow$ $y_1-y_3,\ y_2-y_3$ 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的解

设 $k_1(y_1-y_3)+k_2(y_2-y_3)=0$，则 $\underbrace{\overset{=0}{k_1}y_1+\overset{=0}{k_2}y_2-\overset{=0}{(k_1+k_2)}y_3=0}$ ✓

$\Rightarrow$ $k_1=k_2=0$，故 $y_1-y_3,\ y_2-y_3$ 线性无关.

$$y=\overbrace{\boxed{C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)}}^{Y}+\underbrace{y_3}_{y^*}$$

— y_1,y_2,y_3 中任一个

y_1,y_2,y_3 中任两个相减的不同情况

（13-1）已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}, y_2=e^{x}-xe^{2x}, y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，则该方程的通解为 $y=$ $C_1e^{3x}+C_2e^{x}-xe^{2x}$ ✓

$y_1-y_3=e^{3x}$

$y_2-y_3=e^{x}$