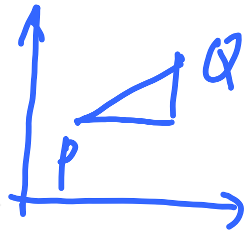
三. 求平面曲线的方程

【例 20】（1995 年考研题）设曲线 L 位于 xOy 平面的第一象限内，L 上任一点 M 处的切线与 y 轴总相交，交点记为 A. 已知 $|\overline{MA}|=|\overline{OA}|$，且 L 过点 $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$，求 L 的方程.

设M坐标为 (x,y)

$P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$

$|\overline{PQ}|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$



切线: $Y-y=y'(X-x)$

令 $X=0$, 则 $Y=y-xy'$, $A(0,y-xy')$

由 $\sqrt{x^2+(xy')^2}=|y-xy'| \Rightarrow x^2+\cancel{(xy')^2}=y^2+\cancel{(xy')^2}-2xyy'$

$$\Rightarrow y'=\frac{y^2-x^2}{2xy}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}{2\frac{y}{x}}$$

$$\xRightarrow{令\frac{y}{x}=u} u+x\frac{du}{dx}=\frac{u^2-1}{2u} \Rightarrow \int\frac{2u}{1+u^2}du=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln(1+u^2)=-\ln x+\ln C \Rightarrow 1+u^2=\frac{C}{x}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{y^2}{x^2}=\frac{C}{x} \Rightarrow x^2+y^2=Cx \Rightarrow y=\sqrt{Cx-x^2}$$

由 $y\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2} \Rightarrow C=3$　　故 $L: y=\sqrt{3x-x^2}$

【例 21】 已知曲线 $y=f(x)$ 在 $[0,a]$ 上（当 $x\geq 0$ 时，$f(x)>0$）与 x 轴围成的面积值比 $f(a)$ 大 be^a（其中常数 $a>0,b\neq 0$），且 $f(x)$ 在 $x=b$ 处取极小值，试求 $f(x)$ 的表达式.

$\int_0^a f(x)dx-f(a)=be^a$　　令 $x=0$, $f(0)=-b$.

在 $\int_0^x f(t)dt-f(x)=be^x$ 两边同时对x求导，

$f(x)-f'(x)=be^x$

$$\Rightarrow f'(x) - f(x) = -be^x$$

$$f(x) = e^{\int dx}\left[\int (-be^x)\, e^{-\int dx}\, dx + C\right]$$

$$= e^x\left[\int (-b\cancel{e^x e^{-x}})\, dx + C\right] = e^x(-bx+C).$$

由 $f'(b) = e^b(-b^2+C) - e^b b = e^b(-b-b^2+C) = 0 \Rightarrow C = b^2+b$

$$f(x) = e^x(b^2+b-bx).$$

由 $f(0) = -b \Rightarrow b^2+b = -b \Rightarrow b = -2$

故 $f(x) = 2e^x(x+1)$

★ 变限积分等式

两边求导

① 含 x, $f'(x)$ 的等式 $\xrightarrow[\text{积分}]{\text{两边}}$ $f(x)$

$\uparrow$ 两边求导

② 含 x, $f(x)$, $\int_a^x f(t)dt$ 的等式 $\xrightarrow{\text{赋值}}$ $\int_a^b f(x)dx$

$\downarrow$ 两边求导

③ 含 x. $f(x)$. $f'(x)$ 的等式 $\xrightarrow[\text{方程}]{\text{解微分}}$ $f(x)$

强化班讲:

1° 微分方程的物理应用（仅数一、二）

2° 差分方程（仅数三）

第五章　代数视角的多元函数微积分学

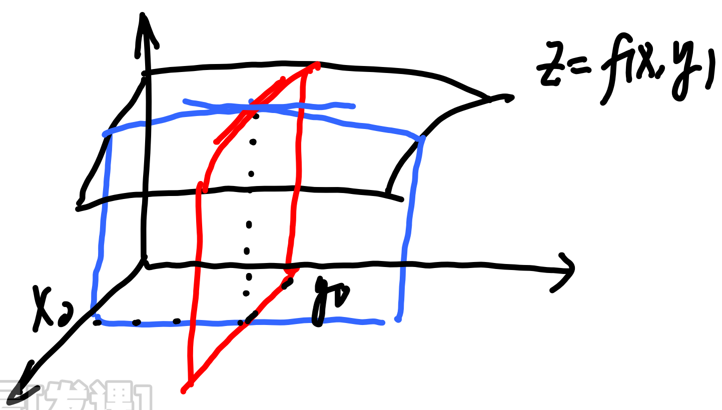
问题脉络

- 代数视角的多元函数微积分学
  - 多元函数微分学
    - 能力
      - 基本　二元函数极限的存在性　（问题2）
      - 综合　偏导数与全微分的存在性　（问题3）
    - 思维
      - 正向　求出偏导数　（问题1）
      - 逆向　已知偏导数　（问题5）
    - 应用　多元函数的极值与最值　（问题4）　12'
  - 二重积分
    - 计算
      - 直接　求二重积分　（问题6）　12'
      - 间接　求曲顶柱体的体积　（问题9）
    - 形式
      - 二次积分自身的变形　（问题7）
      - 定积分→二次积分　（问题8）

一、求偏导数

$$f_x'(x_0,y_0) \triangleq \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} = \frac{d}{dx}f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}$$

$$f_y'(x_0,y_0) \triangleq \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y} = \frac{d}{dy}f(x_0,y)\Big|_{y=y_0}$$



1.多元简单显函数

【例 1】 设 $z=x+y^2+\cancel{(y-1)\arcsin}\sqrt{\frac{x}{y}}$，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(\frac{1}{2},1)}=$______.

法一： $\frac{\partial z}{\partial x}=1+(y-1)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{y}$ $\quad\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(\frac{1}{2},1)}=1$ 先求后代

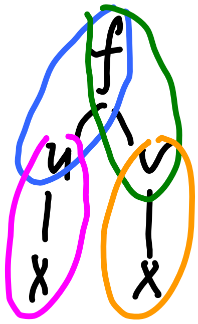
法二： $\frac{\partial z}{\partial x}=\left.\frac{d}{dx}(x+1)\right|_{x=\frac{1}{2}}=1$ ✓ 先代后求

2.多元复合显函数

多层用乘.多叉用加.单路全导.叉路偏导

如 $z=f(\overset{1}{u},\overset{2}{v})$, $u=u(x)$, $v=v(x)$

$$\frac{dz}{dx}=\underbrace{\boxed{\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}}}_{f_1'}+\underbrace{\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}}}_{f_2'}$$



【例 5】 设 f 可微，$f(2x,x^2)=2x^3+x^2+5$，$f_1'(2x,x^2)=x$，则 $f_2'(2x,x^2)=$______.

令 $2x=u$, $x^2=v$

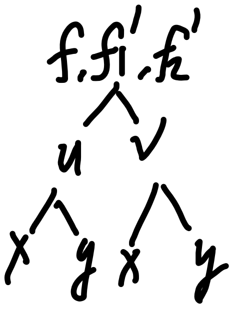
$$\frac{df}{dx}=f_1'\cdot 2+f_2'\cdot 2x=6x^2+2x \quad (f_2'=?)$$

$$\Rightarrow f_2'=\frac{6x^2+2x-2x}{2x}=3x \ ✓$$

【例 6】 (1993 年考研题)设 $z=x^3f\left(xy,\frac{y}{x}\right)$，$f$ 具有连续二阶偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

令 $xy=u$, $\frac{y}{x}=v$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^3\left(f_1'\cdot x+f_2'\cdot\frac{1}{x}\right)=x^4f_1'+x^2f_2' \ ✓$$



$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^4\left(f_{11}''\cdot x+f_{12}''\cdot\frac{1}{x}\right)+x^2\left(f_{21}''\cdot x+f_{22}''\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$=x^5 f_{11}''+2x^3 f_{12}''+x f_{22}''$$

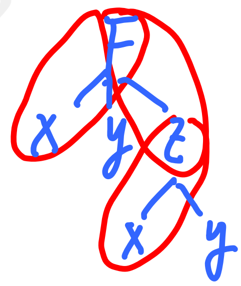
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=4x^3 f_1'+x^4\left[f_{11}''\cdot y+\cancel{f_{12}''\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)}\right]+2xf_2'+x^2\left[\cancel{f_{21}''\cdot y}+f_{22}''\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right]$$

$$=4x^3 f_1'+x^4 y f_{11}''+2xf_2'-y f_{22}'' \quad ※$$

☆ $f_1', f_2', \cdots$ 与 f 有相同的复合结构

∴所混合偏导数在连续的条件下与求导次序无关

3.多元隐函数



(1) 由一个方程确定的隐函数

法一：两边同时对自变量求偏导

$$F_x'+F_z'\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

法二：公式法

对于 $F(x,y,z)=0$，当 $F_z'\neq 0$ 时能确定函数 $z=z(x,y)$，且

u

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}$$

【例 8】（1988 年考研题）已知 $u+e^u=xy$，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

记 $F(x,y,u)=u+e^u-xy$，则 $F_x'=-y$，$F_u'=1+e^u$，$F_y'=-x$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_u'}=\frac{y}{1+e^u},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_u'}=\frac{x}{1+e^u}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1+e^u-ye^u\frac{\partial u}{\partial y}}{(1+e^u)^2}=\frac{(1+e^u)^2-xye^u}{(1+e^u)^3}$$

【变式】已知 $u+e^u=xy$，求 $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$.　　$u+e^u=1 \Rightarrow u=0$

$(1+e^u)\frac{\partial u}{\partial x}=y$ (※)，　$(1+e^u)\frac{\partial u}{\partial y}=x$

令 $x=y=1,u=0$，则 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1)}=\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1)}=\frac{1}{2}$.

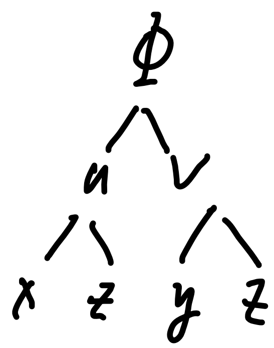
(※)式两边对 y 求偏导，$e^u\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+(1+e^u)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=1$

令 $x=y=1$，$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+2\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=1 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=\frac{3}{8}$.

【例 9】 设 $\Phi(u,v)$ 具有连续偏导数，$\Phi(cx-az,cy-bz)=0$ 确定函数 $z=f(x,y)$，求证：

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c.$$

令 $u=cx-az$，$v=cy-bz$

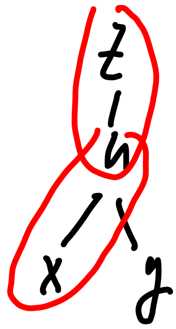


$\Phi_x'=\Phi_1'\cdot c$，$\Phi_y'=\Phi_2'\cdot c$，$\Phi_z'=\Phi_1'(-a)+\Phi_2'\cdot(-b)$

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\Phi_x'}{\Phi_z'}=\frac{c\Phi_1'}{a\Phi_1'+b\Phi_2'}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\Phi_y'}{\Phi_z'}=\frac{c\Phi_2'}{a\Phi_1'+b\Phi_2'}$

$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{ac\Phi_1'+bc\Phi_2'}{a\Phi_1'+b\Phi_2'}=c.$

【例 10】 设函数 $z=f(u)$，方程 $u=\varphi(u)+\int_y^{xy}p(xy+y-t)\mathrm{d}t$ 确定 u 是 x,y 的函数，其中 $f(u),\varphi(u)$ 可微；$p(t),\varphi'(u)$ 连续，且 $\varphi'(u)\neq 1$. 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.



$\int_y^{xy}p(xy+y-t)dt \xlongequal{令 v=xy+y-t} \int_y^{xy}p(v)dv$

$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}+p(xy)\cdot y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y\,p(xy)}{1-\varphi'(u)}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{y\,p(xy)}{1-\varphi'(u)}$ ✓

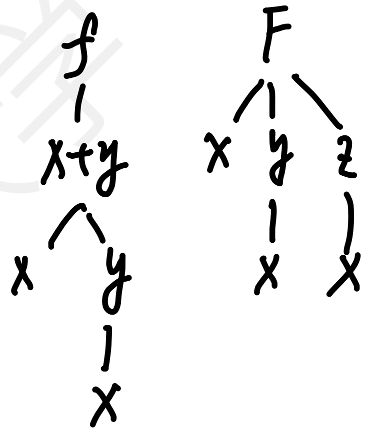
(2) 由方程组确定的隐函数

☆ 克拉默法则（线代大纲要求）：

$$\begin{cases} ax_1+bx_2=m \\ cx_1+dx_2=n \end{cases}$$

当 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ 时，$x_1=\dfrac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$，$x_2=\dfrac{\begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$

【例 12】（1999 年考研题）设 $y=y(x), z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数，其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数，求 $\frac{dz}{dx}$.



☆ 自变量个数 = 变量总个数 − 方程个数

$$\begin{cases} z=xf(x+y) \\ F(x,y,z)=0 \end{cases}$$ 两边分别对 x 求导，

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx}=f(x+y)+xf'(x+y)\cdot\left(1+1\cdot\dfrac{dy}{dx}\right) \\ F_1'+F_2'\cdot\dfrac{dy}{dx}+F_3'\cdot\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -xf'\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=f+xf' \\ F_2'\dfrac{dy}{dx}+F_3'\dfrac{dz}{dx}=-F_1' \end{cases}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\begin{vmatrix} -xf' & f+xf' \\ F_2' & -F_1' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -xf' & 1 \\ F_2' & F_3' \end{vmatrix}}=\frac{xf'F_1'-fF_2'-xf'F_2'}{-xf'F_3'-F_2'}$$