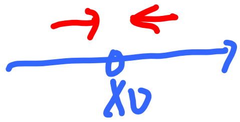
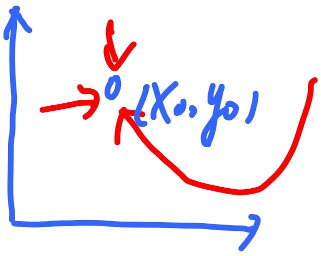
二. 求二元初等函数的极限

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A$





$\Leftrightarrow$ 当 $(x,y)\xrightarrow{\forall y=y(x)}(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)\to A$

☆ 除洛必达法则，单调有界准则外，其余求一元函数极限的方法都适用于二元函数.

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0) \Leftrightarrow f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续. 代入

【例 13】 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{xy}{x+y}=$ $\underline{\quad \frac{2}{3} \quad}$.

【例 15】 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{y\ln(1+2x)}{\boxed{\sqrt{xy+1}-1}}=$ $\underline{\quad 4 \quad}$. $\quad \frac{0}{0}$

$\ln(1+2x)\sim 2x$

$(1+xy)^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}xy$

【例 16】 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}(1+xy)^{\frac{1}{y}}=$ ________. $\quad 1^\infty$

原式 $=e^{\lim\limits_{\substack{x\to 2\\y\to 0}}\frac{1}{y}\ln(1+xy)}$ ($\ln(1+xy)\sim xy$) $=e^{\lim\limits_{x\to 2}x}=e^2$ ✓

【例 17】 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=$ ________. $\quad \frac{0}{0}$

$ab\leq\frac{1}{2}(a^2+b^2)$

法一：
$$\left\{\begin{array}{l} 0\leq\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\dfrac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}=0 \end{array}\right.$$

夹逼

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=0$

$\Rightarrow$ 原极限 $=0$

法二：原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\underline{x}\cdot\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ $\quad \left|\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq 1$

【例 14】 讨论极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x+y}$ 的存在性.

当 $x\to0^+$，$\frac{1}{x}\to+\infty$
当 $y\to0^-$，$\frac{1}{y}\to-\infty$
"$\infty-\infty$"

原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1}{\underset{\infty}{\frac{1}{y}}+\underset{\infty}{\frac{1}{x}}}=0$ ×

$\dfrac{xy}{x+y}=1 \Rightarrow xy=x+y \Rightarrow y=\dfrac{x}{x-1}\to0$

记 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$

取 $y=x$，$\lim\limits_{x\to0} f(x,x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{2x}=0$

取 $y=\dfrac{x}{x-1}$，$\lim\limits_{x\to0} f\left(x,\dfrac{x}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to0}1=1$

$\Rightarrow$ 原极限不$\exists$.

三."四句话"的相关问题

① 二元函数连续 ② 偏导数存在

③ 二元函数可微 ④ 偏导数连续

$$④ \underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow} ③,\quad ③ \underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow} ②,\quad ③ \underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow} ①,\quad ② \not\Leftrightarrow ①$$

一元：导数连续 $\underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow}$ 可微（导）$\underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow}$ 函数连续

1. 二元函数连续与偏导数存在

【例 18】 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点(0,0)处(C)

(A) 连续，偏导数存在. ~~(B)~~ 连续，偏导数不存在.

(C) 不连续，偏导数存在. ~~(D)~~ 不连续，偏导数不存在.

偏导数存在性.

法一: $f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0$

$f_y'(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta y}=0$

法二: $f(x,0)=\begin{cases}0, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ $f_x'(0,0)=\dfrac{d}{dx}f(x,0)\Big|_{x=0}=0.$

连续性 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)\overset{?}{=}0$

法一: 取 $y=x$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x^4+x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2+1}=0$

取 $y=x^2$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x^2)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^4+x^4}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在.

法二: $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x^2)=\dfrac{1}{2}\neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)\neq 0 \Rightarrow$ 不连续.

β

2. 二元函数可微

$\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-f_x'(x_0,y_0)\Delta x-f_y'(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$

对于 $y=f(x)$,

$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$

写成 $\underbrace{\boxed{A\Delta x}}_{dy}+o(\Delta x)$

$\Leftrightarrow f(x)$ 在 x 处可微, 且

$dy=A\Delta x=f'(x)dx$

对于 $z=f(x,y)$,

$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ α $\beta=o(\alpha)$

写成 $\underbrace{\boxed{A\Delta x+B\Delta y}}_{dz}+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$

$\Leftrightarrow f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微, 且

$dz=A\Delta x+B\Delta y=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

附 ☆ $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微

$$\Leftrightarrow \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-f_x'(x_0,y_0)\Delta x-f_y'(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0.$$

$f(0,1)-2\times 0+1-2=0$

【例 19】 (2012 年考研题)设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$,则 $dz|_{(0,1)}=$ $\underline{2dx-dy}$. ✓

$\to 0$ ∃

法一: 取 $f(x,y)=2x-y+2$, 则 $f_x'(0,1)=2$, $f_y'(0,1)=-1$

法二: 令 $x=\Delta x$, $y-1=\Delta y$. $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(0+\Delta x,1+\Delta y)-\underbrace{f(0,1)}_{=1}-2\Delta x+\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$

☆ $f(x,y)$ 连续, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}\frac{f(x,y)+Ax+By+C}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0 \Rightarrow \begin{cases} f_x'(a,b)=-A \\ f_y'(a,b)=-B \\ dz|_{(a,b)}=-Adx-Bdy \end{cases}$

【例 20】 证明二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0,0)处的偏导数存在,但不可微.

$f(x,0)=\begin{cases}0, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ $\quad f(0,y)=\begin{cases}0, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$

故 $f_x'(0,0)=\frac{d}{dx}f(x,0)\Big|_{x=0}=0$, $f_y'(0,0)=\frac{d}{dy}f(0,y)\Big|_{y=0}=0$.

又 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-0-0\cdot\Delta x-0\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}$ ✓ 3次 3次 不存

取 $\Delta y=\Delta x$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^3}{[2(\Delta x)^2]^{3/2}}\neq 0 \Rightarrow f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微. ☆

3. 偏导数连续

$f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续 $\Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f_x'(x,y)=f_x'(x_0,y_0) \\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f_y'(x,y)=f_y'(x_0,y_0) \end{cases}$

【例 21】 设函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0, \\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$ 试判断 $f_x(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性.

$f(x,0)=\begin{cases} x, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} = x$ $\quad f_x'(0,0)=\frac{d}{dx}f(x,0)\Big|_{x=0}=1$

当 $x\neq 0$ 或 $y\neq 0$ 时，$f_x'(x,y)=\dfrac{3x^2(x^2+y^2)-2x(x^3-y^3)}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$

对于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$ 4次 4次

取 $y=kx$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+3k^2x^4+2k^3x^4}{(x^2+k^2x^2)^2}=\dfrac{1+3k^2+2k^3}{(1+k^2)^2}$，

随着 k 的变化而变化，故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_x'(x,y)$ 不存在，从而 $f_x'(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

四. 已知偏导数求函数表达式

1. 已知偏导数 两端积分

【例 29】 已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=(x+y)dx+(x-y)dy$，且 $f(0,0)=1$，则 $f(x,y)=$__________.

$\frac{\partial z}{\partial x}=x+y$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x-y$

$f(x,y)=\int(x+y)dx=\frac{x^2}{2}+xy+\varphi(y)$ $\quad \varphi(y)=-\frac{y^2}{2}+C$

$$= \int (x-y)dy = xy - \frac{y^2}{2} + \varphi(x) \qquad \varphi(x) = \frac{x^2}{2} + C_2$$

$$故\ f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + C$$

由 $f(0,0)=1 \Rightarrow C=1$ 　　故 $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + 1$.

2. 已知含偏导数的等式　转化为微分方程.

【例 28】 设函数 $\varphi(u)$ 可导且 $\varphi(0)=1$，二元函数 $z=\varphi(x+y)e^{xy}$ 满足 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$，则 $\varphi(u)=$ ________.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(x+y)e^{xy} + \varphi(x+y)ye^{xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(x+y)e^{xy} + \varphi(x+y)xe^{xy}$$

$$2\varphi'(x+y)\cancel{e^{xy}} + \cancel{e^{xy}}(x+y)\varphi(x+y) = 0$$

记 $x+y=u$，$\varphi(u)=p$. 则 $2\frac{dp}{du}+up=0$

$$\Rightarrow \int \frac{dp}{p} = -\int \frac{1}{2}u\,du \Rightarrow \ln p = -\frac{1}{4}u^2 + \ln C$$

$$\Rightarrow p = Ce^{-\frac{1}{4}u^2}.$$

由 $\varphi(0)=1 \Rightarrow C=1$ 　故 $\varphi(u)=e^{-\frac{1}{4}u^2}$.

五. 多元函数的极值与最值

1. 无条件极值

(1) 必要条件

设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的一阶偏导数存在，且 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取极值，则 $f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0$.

(2) 充分条件

设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的某一邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数，又 $f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0$，令 $A=f_{xx}(x_0,y_0), B=f_{xy}(x_0,y_0), C=f_{yy}(x_0,y_0)$，则

① 当 $AC-B^2>0$ 时有极值，且当 $A<0$ 时有极大值，当 $A>0$ 时有极小值；

② 当 $AC-B^2<0$ 时无极值；

③ 当 $AC-B^2=0$ 时可能有极值，也可能无极值，需另做讨论.

定义

(23-2) 求函数 $f(x,y)=xe^{\cos y}+\dfrac{x^2}{2}$ 的极值.

$$\begin{cases} f_x'=e^{\cos y}+x=0 \\ f_y'=xe^{\cos y}(-\sin y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-e^{\cos k\pi}=-e^{(-1)^k} \\ y=k\pi \end{cases} \quad (k\in Z)$$

$A=1,\ B=-\sin y\, e^{\cos y},\ C=xe^{\cos y}(\sin^2 y-\cos y)$

在 $(-e^{(-1)^k}, k\pi)$ 处，$B=0$，$C=e^{2(-1)^k}(-1)^k$　>0

当 k 为奇数，$AC-B^2<0$，故不是极值点.

当 k 为偶数，$AC-B^2>0$，$A>0$，故 $f(x,y)$ 有极小值

$$f(-e^{(-1)^k}, k\pi)=-\frac{e^2}{2}.$$